

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија

ЈАНУАР 1 - 18.02.2026. године

Групе вежби: 1И2А, 1И2Б и 1И2В

Време рада: 180 мин. Срећно!



Пре израде задатака, на вежбанци **ОБАВЕЗНО** попунити назив предмета, име и презиме, број индекса (број досијеа) као и име асистента код кога сте распоређени на Хипатији (у пољу задатак прегледао)! Остала поља не морате попуњавати.

1. Дефинисати следеће појмове (а–д):

а) [1п] линеарно независни вектори $v_1, v_2, \dots, v_k$;

б) [1п] адјунгована матрица $\text{adj} A$;

в) [1п] директна сума $V = U \oplus W$ векторских потпростора $U, W \leq V$;

г) [1п] формулисати Кејли-Хамилтонову теорему;

д) [1п] скаларни производ на векторском простору V ;

ђ) [2п] Нека су A и B симетричне матрице. Доказати да је AB симетрична матрица ако и само ако матрице A и B комутирају;

е) [3п] Испитати да ли су вектори $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (1, 1, -2)$ и $\vec{c} = (5, 8, 5)$ копланарни.

Ако јесу, вектор $\vec{c}$ изразити као линеарну комбинацију вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а уколико нису копланарни, израчунати запремину паралелепипеда разапетог векторима $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

2. [10п] Нека је $U \leq \mathbb{R}^3[x]$ генерисан полиномима $p_1 = 1 + 2x + x^3$, $p_2 = 1 + x + x^2$ и $p_3 = x - x^2 + x^3$, а $W \leq \mathbb{R}^3[x]$ генерисан са $q_1 = 1 + x^2$, $q_2 = 1 + 3x + x^3$ и $q_3 = 3x - x^2 + x^3$. Наћи бар по једну базу за U , W , $U + W$ и $U \cap W$.

3. [10п] Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \end{bmatrix}$.

Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A .

Испитати да ли је A дијагоналног типа и ако јесте наћи инвертибилну матрицу P и дијагоналну D такве да је $D = P^{-1}AP$.

4. [10п] У векторском простору $M_2(\mathbb{R})$ са скаларним производом $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$ дат је векторски потпростор W са

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid 2a + b - 2c + d = 0, 5a + b - 3c + 3d = 0 \right\}.$$

Одредити растојање матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ од $W^\perp$ као и угао између A и W .

5. Дате су права $p: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{1}$ и раван $\alpha: x + y - 2z + 6 = 0$.

а) [4п] Одредити једначину равни β која садржи праву p и паралелна је равни α .

б) [6п] Одредити једначину праве q која је симетрична правој p у односу на раван α .

6. Пресликавање $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ дато је са

$$F(x, y, z) = (xe^{(a-2)y} + \cos(cz)y - 3z, (\ln b)x^2 - 3by + a^2z, bx - ay + bz), \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

а) [4п] Одредити вредности параметара a , b и c тако да пресликавање F буде линеарно.

б) [6п] За такве a , b и c одредити бар по једну базу за $\text{Ker } F$ и $\text{Im } F$, као и ранг и дефект пресликавања F .