



1. а), б), в), г) и) - већ виђено ...

ђ) [1п] Дате су матрице A типа 5×3 , B типа 3×3 и C и D типа 3×2 . Испитати који од следећих израза су дефинисани и који је тип резултујуће матрице: A^2 , B^3 , CD , $A+C$, ABD и $BC+D$.

▲ 5) Дефинисане операције: $X_{m \times n} + Y_{m \times n} = Z_{m \times n}$, $X_{m \times n} \cdot Y_{n \times k} = T_{m \times k}$

$\Rightarrow$ није дефинисано: $A^2 = A \cdot A$, $C \cdot D$, $A+C$

дефинисано: $B^3 \in M_3(\mathbb{R})$, $ABD \in M_{5 \times 2}(\mathbb{R})$, $BC+D \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$

2. [5п] Дати су вектори $\vec{a} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\vec{b} = (5, -2, 5, -2)$ и $\vec{c} = (2, -2, 0, 5)$, при чему је

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 2, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 0, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 6. \end{aligned}$$

Одредити угао између вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, као и растојање вектора $\vec{a}$ и $\vec{c}$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 6 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ x_2 - 5x_3 - x_4 = -4 \\ x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ x_2 - 5x_3 - x_4 = -4 \\ x_2 + x_3 = 4 \\ 4x_2 = 12 \end{cases} \\ &\Rightarrow x_2 = 3, x_3 = 1, x_4 = 2, x_1 = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = (1, 3, 1, 2)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 3, 1, 2) \cdot (5, -2, 5, -2) = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \text{ т.ј. } \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/2$$

$$d(\vec{a}, \vec{c}) = \|\vec{a} - \vec{c}\| = \|(-1, 5, 1, -3)\| = \sqrt{1+25+1+9} = \sqrt{36} = 6$$

3. Нека је $U = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$, где је $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, и $W = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}$.

а) [2п] Доказати да су U и W векторски потпростор од $M_3(\mathbb{R})$.

б) [4п] Одредити бар по једну базу, као и димензије U и W .

в) [1п] Испитати да ли је $M_3(\mathbb{R}) = U + W$. Да ли је сума директна?

▲ ⑥ $\boxed{U}$ 1) $0 \in U$ јер $0 \cdot M = 0 = M \cdot 0$ ✓

2) $A, B \in U \Rightarrow (A+B)M = AM+BM = MA+MB = M(A+B) \Rightarrow A+B \in U$ ✓

3) $\alpha \in \mathbb{R}, A \in U \Rightarrow (\alpha A)M = \alpha AM = \alpha MA = M(\alpha A) \Rightarrow \alpha A \in U$ ✓

$\boxed{W}$ 1) $0 \in W$ јер $0^T = 0 = -0$ ✓

2) $A, B \in W \Rightarrow (A+B)^T = A^T+B^T = -A-B = -(A+B) \Rightarrow A+B \in W$ ✓

3) $\alpha \in \mathbb{R}, A \in W \Rightarrow (\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha(-A) = -\alpha A \Rightarrow \alpha A \in W$ ✓

$$\begin{aligned} \textcircled{6} U &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} d &= 0 & e &= a & f &= b \\ g &= 0 & h &= d & i &= e \\ 0 &= 0 & g &= 0 & h &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow U = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right), \dim U = 3$$

$$\begin{aligned} W &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} a &= -a & d &= -b & g &= -c \\ b &= -d & e &= -e & h &= -f \\ c &= -g & f &= -h & i &= -i \end{aligned} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{bmatrix} \mid b, c, f \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow W = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\right), \dim W = 3$$

⑤ $\dim U + \dim W = 6 < 9 = \dim M_3(\mathbb{R}) \Rightarrow$ није сума (ни обична на ни директна)

4. Нека је $G: \mathbb{R}^3[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$ пресликавање дато са $G(p) = (p(1), p'(1), p''(1))$.

а) [4п] Наћи матрицу G у односу на базе $S = \{p_1 = x^3 + 1, p_2 = -2x^2 + x, p_3 = 2x - 5, p_4 = x^3 + x^2 + x\}$ и $S' = \{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, 0, -1)\}$ простора $\mathbb{R}^3[x]$ и $\mathbb{R}^3$.

б) [4п] Наћи базу и димензију за $\text{Im } G$ и $\text{Ker } G$.

▲ $\textcircled{a} p = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow p' = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow p'' = 6ax + 2b$
 $\Rightarrow G(ax^3 + bx^2 + cx + d) = (a + b + c + d, 3a + 2b + c, 6a + 2b)$

$G(p_1) = G(x^3 + 1) = (2, 3, 6)_E = (5, -2, -1)_{S'}$
 $G(p_2) = G(-2x^2 + x) = (-1, -3, -4)_E = (-2, -1, 2)_{S'}$
 $G(p_3) = G(2x - 5) = (-3, 2, 0)_E = (-5, 7, -5)_{S'}$
 $G(p_4) = G(x^3 + x^2 + x) = (3, 6, 8)_E = (5, 1, -3)_{S'}$

$\Rightarrow [G]_{S'}^{S'} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -5 & 5 \\ -2 & -1 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & -5 & -3 \end{bmatrix}$

$(a, b, c)_E = x \cdot u_1 + y \cdot u_2 + z \cdot u_3$

$x + y + z = a$

$x + y = b \Rightarrow y = b - x$

$x - z = c \Rightarrow z = x - c$

$\Rightarrow x + b - x + x - c = a$

$\Rightarrow x = a - b + c$

$y = -a + 2b - c$ *

$z = a - b$

⑥ $\text{Ker } G = \{p \in \mathbb{R}^3[x] \mid G(p) = 0\}$

$= \{ax^3 + bx^2 + cx + d \mid \begin{matrix} a + b + c + d = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 6a + 2b = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} d = -a \\ c = 3a \\ b = -3a \end{matrix} \parallel (x-1)^3$

$= \{ax^3 - 3ax^2 + 3ax - a \mid a \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}(x^3 - 3x^2 + 3x - 1), \delta(G) = 1$

$\mathbb{R}^3[x] = \mathbb{R}(x^3, x^2, x, 1) \Rightarrow \text{Im } G = \mathbb{R}(G(x^3), G(x^2), G(x), G(1))$

$G(x^3) = (1, 3, 6)$ $G(x) = (1, 1, 0)$

$G(x^2) = (1, 2, 2)$ $G(1) = (1, 0, 0)$

$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \text{Im } G = \mathbb{R}((1, 3, 6), (1, 2, 2), (1, 1, 0)) = \mathbb{R}^3, \delta(G) = 3$

могли смо користити и део ⑤ и базу S' !

5. [5п] Израчунати

$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2025 & 2026 \\ 1 & 8 & 3 & 4 & \dots & 2025 & 2026 \\ 1 & 2 & 12 & 4 & \dots & 2025 & 2026 \\ 1 & 2 & 3 & 16 & \dots & 2025 & 2026 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 8100 & 2026 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2025 & 8104 \end{vmatrix}$

из k -те колоне извучемо k

$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots 2025 \cdot 2026$

прву врсту одуземо од осталих

$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 4 \end{vmatrix}$

збир свих врста (колоне) је чисти па додамо све колоне првој

2026×2026

$= 2026! \cdot \begin{vmatrix} 2025 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2025 & 4 & 1 & \dots & 1 \\ 2025 & 1 & 4 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2025 & 1 & 1 & \dots & 4 \end{vmatrix} = 2026!$

$\begin{vmatrix} 2025 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix}$

горње троугаона дете рминанта

$= 2025 \cdot 3^{2025} \cdot 2026!$

6. а) [4п] Нека је U тродимензиони, а W четвородимензиони векторски потпростор шестодимензионог векторског простора V . Одредити могуће вредности за $\dim(U + W)$ и $\dim(U \cap W)$. Навести пример за сваку од вредности.

б) [2п] Ако вектори u_1, u_2 и u_3 чине базу векторског простора U , испитати да ли и вектори $u_1 - 2u_2 + u_3, -u_1 + 3u_2$ и $u_1 + 3u_3$ чине базу за U .

▲ $\textcircled{a} \dim U = 3, \dim W = 4, \dim V = 6$

1) $U + W \leq V \Rightarrow \dim(U + W) \leq 6 \Rightarrow \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W)$

$\min\{\dim U, \dim W\}$

$\Rightarrow \dim(U \cap W) \geq 1$

2) $U \cap W \leq U$
 $U \cap W \leq W \Rightarrow \dim(U \cap W) \leq 3$

$\Rightarrow \begin{matrix} 1 \leq \dim(U \cap W) \leq 3 \\ 4 \leq \dim(U + W) \leq 6 \end{matrix}$

Примери $V = \mathbb{R}^6 = \mathcal{L}(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$

1) $U = \mathcal{L}(e_1, e_2, e_3)$

$W = \mathcal{L}(e_1, e_4, e_5, e_6)$

$U \cap W = \mathcal{L}(e_1)$

$U + W = \mathcal{L}(e_1, \dots, e_6) = \mathbb{R}^6$

2) $U = \mathcal{L}(e_1, e_2, e_3)$

$W = \mathcal{L}(e_1, e_2, e_4, e_5)$

$U \cap W = \mathcal{L}(e_1, e_2)$

$U + W = \mathcal{L}(e_1, \dots, e_5)$

3) $U = \mathcal{L}(e_1, e_2, e_3)$

$W = \mathcal{L}(e_1, e_2, e_3, e_4)$

$U \cap W = U$

$U + W = W$

⑤ u_1, u_2, u_3 лчн. нез. $\Rightarrow u_1 - 2u_2 + u_3, -u_1 + 3u_2, u_1 + 3u_3$ лчн. нез. ?

$x(u_1 - 2u_2 + u_3) + y(-u_1 + 3u_2) + z(u_1 + 3u_3) = 0$

$(x - y + z)u_1 + (-2x + 3y)u_2 + (x + 3z)u_3 = 0$

u_1, u_2, u_3 лчн. нез. $\Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ -2x + 3y = 0 \\ x + 3z = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -2x + 3y = 0 \\ x + 3z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = -3z \\ y = -2z \end{cases}$

$-3z + 2z + z = 0 \checkmark$

$\Rightarrow \begin{cases} y = -2z \\ x = -3z \end{cases}$

$\Rightarrow$ лчн. зависни

$\Rightarrow$ не чине БАЗУ

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија

Први колоквијум - 10.01.2026. године

Групе вежби: 1И2А, 1И2Б и 1И2В

Група задатака: ДИНСТАЈ

Време рада: 180 мин. Срећно!



1) а), б), в), г), д) - већ учено

б) [1п] Дате су матрице A типа 3×3 , B типа 3×4 и C и D типа 2×3 . Испитати који од следећих израза су дефинисани и који је тип резултујуће матрице: A^2 , B^3 , DAB , CD , $A+B$, и $CA+D$.

▲ дефинисано: $A^2 \in M_3(\mathbb{R})$, $DAB \in M_{2 \times 4}(\mathbb{R})$, $CA+D \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$

није дефинисано: B^3 , CD , $A+B$

2) исти систем $\Rightarrow \vec{c} = (1, 3, 1, 2) \Rightarrow \angle(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{\pi}{2}$, $d(\vec{b}, \vec{c}) = 6$

3) а) исто б) слично $\Rightarrow U = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \right\} = \mathcal{L} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$

б) $\dim U + \dim W = 6 < 9 = \dim M_3(\mathbb{R}) \Rightarrow$ није сума

4. Нека је $F: \mathbb{R}^3[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$ пресликавање дато са $F(p) = (p(1), p'(1), p''(1))$.

а) [4п] Наћи матрицу F у односу на базе $S = \{q_1 = x^3 + x^2 + x, q_2 = x^3 + 1, q_3 = 2x - 5, q_4 = -2x^2 + x\}$ и $S' = \{u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (1, 1, 1), u_3 = (1, 0, -1)\}$ простора $\mathbb{R}^3[x]$ и $\mathbb{R}^3$.

б) [4п] Наћи базу и димензију за $\text{Im } F$ и $\text{Ker } F$.

$F(ax^3 + bx^2 + cx + d) = (a+b+c+d, 3a+2b+c, 6a+2b)$

а) исти су вектори из претх. групе

$F(q_1) = (3, 6, 8)_E = (1, 5, -3)_{S'}$

$F(q_2) = (2, 3, 6)_E = (-2, 5, -1)_{S'}$

$F(q_3) = (-3, 2, 0)_E = (7, -5, -5)_{S'}$

$F(q_4) = (-1, -3, -4)_E = (-1, -2, 2)_{S'}$

$\Rightarrow [F]_S^{S'} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 & -1 \\ 5 & 5 & -5 & -2 \\ -3 & -1 & -5 & 2 \end{bmatrix}$

б) исто

$(a, b, c) = xu_1 + yu_2 + zu_3$

$x + y + z = a$

$x + y = b \Rightarrow x = b - y$

$y - z = c \Rightarrow z = y - c$

$\Rightarrow y = a - b + c$

$x = -a + 2b - c$

$z = a - b$

(само замењене прва и друга координата)

5. [5п] Израчунати

3	2	3	4	...	2025	2026
1	6	3	4	...	2025	2026
1	2	9	4	...	2025	2026
1	2	3	12	...	2025	2026
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮
1	2	3	4	...	6075	2026
1	2	3	4	...	2025	6078

= слично претходном

$= 2028 \cdot 2^{2025} \cdot 2026!$

6) а) исто само замењени U и W

б) слично $\Rightarrow$ лчн. зависни $\Rightarrow$ не чине БАЗУ