

Биоматематика — материјали

Димитрије Шпадијер

25. фебруар 2021.

Садржај

Увод	2
1 Математичка индукција	3
2 Низови	10
3 Редови	32
4 Лимеси функција и непрекидност	43
5 Извод функције	63
6 Испитивање тока функције	77
7 Неодређени интеграл	97

Увод

У уводном делу навешћемо основне једнакости које омогућавају манипулацију изразима. Списак ће повремено бити допуњаван.

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b) \\(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\(a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) \\a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\a^0 &= 1, \text{ ако је } a \neq 0 \\a^{-n} &= \frac{1}{a^n}, \text{ ако је } a \neq 0, n \in \mathbb{N} \\a^n \cdot a^m &= a^{n+m}, \text{ ако је } a \neq 0, n, m \in \mathbb{Z} \\\frac{a^n}{a^m} &= a^{n-m}, \text{ ако је } a \neq 0, n, m \in \mathbb{Z} \\(a^n)^m &= a^{n \cdot m}, \text{ ако је } a \neq 0, n, m \in \mathbb{Z} \\(ab)^n &= a^n \cdot b^n, \text{ ако је } a \neq 0, b \neq 0, n \in \mathbb{Z} \\\left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n}, \text{ ако је } a \neq 0, b \neq 0, n \in \mathbb{Z} \\a^{\frac{1}{n}} &= \sqrt[n]{a} \text{ (ако је } n \text{ парно, онда је } a \geq 0) \\(\sqrt{a})^2 &= a, \text{ ако је } a \geq 0 \\\sqrt{a^2} &= |a| = \begin{cases} a, & \text{ако је } a \geq 0, \\ -a, & \text{ако је } a < 0 \end{cases} \\\sqrt{ab} &= \sqrt{a}\sqrt{b}, \text{ ако је } a \geq 0, b \geq 0 \\a^{-p} &= \frac{1}{a^p}, \text{ ако је } a > 0, p \in \mathbb{Q} \text{ (разломак)} \\a^p \cdot a^q &= a^{p+q}, \text{ ако је } a > 0, p, q \in \mathbb{Q} \\\frac{a^p}{a^q} &= a^{p-q}, \text{ ако је } a > 0, p, q \in \mathbb{Z} \\(a^p)^q &= a^{p \cdot q}, \text{ ако је } a > 0, p, q \in \mathbb{Q} \\(ab)^p &= a^p \cdot b^p, \text{ ако је } a > 0, b > 0, p \in \mathbb{Q} \\\left(\frac{a}{b}\right)^p &= \frac{a^p}{b^p}, \text{ ако је } a > 0, b > 0, p \in \mathbb{Q} \\0! &= 1 \\n! &= n \cdot (n-1) \cdots 1 = n \cdot (n-1)!, n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

Ако је $a < b$ и $c > 0$, онда је $ac < bc$. Такође, ако је $ac < bc$ и $c > 0$, онда је $a < b$. Дакле, множење и дељење неједнакости позитивним бројем c обе стране не мења знак неједнакости.

Ако је $a < b$ и $c < 0$, онда је $ac > bc$. Такође, ако је $ac > bc$ и $c < 0$, онда је $a > b$. Дакле, множење и дељење неједнакости негативним бројем c обе стране мења знак неједнакости.

Ако је $a = b$, онда је $ac = bc$ (c може бити и нула). Обрнуто, ако је $ac = bc$ и $c \neq 0$, онда је $a = b$ (овде c не сме бити нула). Дакле, скраћивање се може радити само ако је број којим се скраћује различит од нуле.

Ако је $a < b$ и $a \geq 0, b \geq 0$, онда је $a^2 < b^2$. Такође, ако је $a^2 < b^2$ и $a \geq 0, b \geq 0$, онда је $a < b$.

Ако је $a < b$ и $a > 0, b > 0$, онда је $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. Такође, ако је $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ и $a > 0, b > 0$, онда је $a > b$.

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c, \text{ ако је } a > 0, a \neq 1, b, c > 0 \quad (1)$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c, \text{ ако је } a > 0, a \neq 1, b, c > 0 \quad (2)$$

$$\log_a b^p = p \log_a b, \text{ ако је } a > 0, a \neq 1, b > 0, p \in \mathbb{Q} \quad (3)$$

$$a^{\log_a b} = b, \text{ ако је } a > 0, a \neq 1, b > 0 \quad (4)$$

$$\frac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b, \text{ ако је } a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0, c \neq 1 \quad (5)$$

Ако је основа логаритма број e , тада се то зове природни логаритам и ознака је $\ln$.

1 Математичка индукција

Посматрајмо скуп природних бројева $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Он има једну занимљиву особину, која се може исказати на следећи начин:

1. $1 \in \mathbb{N}$,
2. ако за неко n важи $n \in \mathbb{N}$, онда и $n + 1 \in \mathbb{N}$. Шта нам ово својство заправо говори? Прво својство нам говори да природни бројеви почињу од јединице, односно да је 1 најмањи елемент скупа природних бројева. Примењујмо сада само друго правило. Пошто 1 припада скупу природних бројева, онда и $1 + 1 = 2$ припада скупу природних бројева. Сада имамо да 2 припада скупу природних бројева, па и $2 + 1 = 3$ припада скупу природних бројева. Сада и 3 припада скупу природних бројева, па му припада и $3 + 1 = 4$. Овако можемо ићи унедоглед. Оно што је битно јесте да смо сигурни да ћемо стићи до сваког природног броја, само треба довољно пута применити другу особину.

Ова својство скупа природних бројева користи се за доказивање разних тврђења. Како се то ради? Нека је $\varphi(n)$ неко тврђење које зависи од природног броја n . Ако докажемо да тврђење $\varphi(1)$ важи и да ако претпоставимо да за неко n важи $\varphi(n)$, онда мора да важи и $\varphi(n+1)$, тиме смо, заправо, доказали да тврђење важи за све природне бројеве n . Заиста, подсетимо се разматрања од малопре. Пошто је $\varphi(1)$ доказано да је тачно, онда због друге особине следи да мора бити тачно и $\varphi(1+1) = \varphi(2)$. Сада пошто је $\varphi(2)$ тачно, због друге особине мора бити тачно и $\varphi(2+1) = \varphi(3)$. Настављајући поступак довољно пута, добићемо да је $\varphi(n)$ тачно, ма шта био n . Самим тим, $\varphi(n)$ је тачно за све $n \in \mathbb{N}$. Кажемо тада да смо тврђење доказали принципом математичке индукције.

1.1. (а) $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Користимо принцип математичке индукције.

База индукције ($n = 1$): $1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$, па једнакост важи за $n = 1$. Претпоставимо да једнакост важи за неко n , односно да важи да је $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Докажимо да тада једнакост важи и за $n + 1$.

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n + (n + 1) &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

(искоришћена је претпоставка у првој једнакости). Дакле, једнакост важи и за $n + 1$.

Према томе, на основу принципа математичке индукције, једнакост важи за сваки природан број $n \in \mathbb{N}$.

(б) $1 + 4 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Користимо принцип математичке индукције.

База индукције ($n = 1$): $1^2 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$, па једнакост важи за $n = 1$.

Претпоставимо да једнакост важи за неко n , односно да важи да је $1 +$

$4 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Докажимо да тада једнакост важи и за $n + 1$.

$$\begin{aligned}
 1 + 4 + \dots + n^2 + (n + 1)^2 &= \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} + (n + 1)^2 \\
 &= \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} + \frac{6(n + 1)^2}{6} \\
 &= \frac{(n + 1)(n(2n + 1) + 6(n + 1))}{6} \\
 &= \frac{(n + 1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} \\
 &= \frac{(n + 1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}
 \end{aligned}$$

(искоришћена је претпоставка у првој једнакости). Приметимо и да је $(n+2)(2(n+1)+1) = (n+2)(2n+2+1) = (n+2)(2n+3) = 2n^2+3n+4n+6 = 2n^2+7n+6$, па се претходна једнакост своди на

$$1 + 4 + \dots + n^2 + (n + 1)^2 = \frac{(n + 1)(n + 2)(2(n + 1) + 1)}{6},$$

што значи да једнакост важи и за $n + 1$.

Према томе, на основу принципа математичке индукције, једнакост важи за сваки природан број $n \in \mathbb{N}$.

(в) домаћи

(г) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

База индукције ($n = 1$): $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$, па једнакост важи за $n = 1$.

Претпоставимо да једнакост важи за неко n , односно да важи да је $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$. Докажимо да тада важи једнакост и за $n + 1$.

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
 &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
 &= \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
 &= \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} \\
 &= \frac{n+1}{n+2},
 \end{aligned}$$

(претпоставка је искоришћена у првој једнакости), што значи да једнакост важи и за $n + 1$.

Према томе, на основу принципа математичке индукције, једнакост важи за сваки природан број $n \in \mathbb{N}$.

(д) $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

База индукције ($n = 1$): $1 + x^1 = 1 + x = x + 1 = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{x^{1+1}-1}{x-1}$, па једнакост важи за $n = 1$.

Претпоставимо да једнакост важи за неко n , односно да је $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$. Докажимо да једнакост важи и за $n + 1$.

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 + \dots + x^n + x^{n+1} &= \frac{x^{n+1}-1}{x-1} + x^{n+1} \\ &= \frac{x^{n+1}-1}{x-1} + \frac{x^{n+1}(x-1)}{x-1} \\ &= \frac{x^{n+1}-1}{x-1} + \frac{x^{n+2}-x^{n+1}}{x-1} \\ &= \frac{x^{n+1}-1+x^{n+2}-x^{n+1}}{x-1} \\ &= \frac{x^{n+2}-1}{x-1}, \end{aligned}$$

па је тврђење тачно и за $n + 1$.

Према принципу математичке индукције, једнакост за сваки природан број $n \in \mathbb{N}$.

1.2. (а) $7|2^{n+1} + 3^{2n-1}$

База индукције ($n = 1$): $2^{1+1} + 3^{2 \cdot 1 - 1} = 2^2 + 3^{2-1} = 4 + 3^1 = 4 + 3 = 7$, што је дељиво са 7. Дакле, тврђење је тачно за $n = 1$.

Претпоставимо да је тврђење тачно за неко n , односно да је $2^{n+1} + 3^{2n-1}$ дељиво са 7. Докажимо да је тврђење тачно и за $n + 1$.

$$\begin{aligned} 2^{n+2} + 3^{2(n+1)-1} &= 2^{n+1} \cdot 2^1 + 3^{2n+2-1} = 2 \cdot 2^{n+1} + 3^2 \cdot 3^{2n-1} \\ &= 2 \cdot 2^{n+1} + 9 \cdot 3^{2n-1} = 2 \cdot 2^{n+1} + (2 + 7) \cdot 3^{2n-1} \\ &= 2 \cdot 2^{n+1} + 2 \cdot 3^{2n-1} + 7 \cdot 3^{2n-1} \\ &= 2(2^{n+1} + 3^{2n-1}) + 7 \cdot 3^{2n-1} \end{aligned}$$

Према индуктивној претпоставци, $2^{n+1} + 3^{2n-1}$ је дељиво са 7, па је и $2(2^{n+1} + 3^{2n-1})$ дељиво са 7. Такође, $7 \cdot 3^{2n-1}$ је дељиво са 7, па је и $2(2^{n+1} + 3^{2n-1}) + 7 \cdot 3^{2n-1}$ дељиво са 7. Дакле, $2^{n+2} + 3^{2(n+1)-1}$ је дељиво са 7, односно тврђење важи и за $n + 1$.

Према принципу математичке индукције, тврђење је тачно за све природне бројеве $n \in \mathbb{N}$.

(б) $9|n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$

База индукције ($n = 1$): $1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 9 + 27$, што је дељиво са 9. Дакле, тврђење је тачно за $n = 1$.

Претпоставимо да је тврђење тачно за неко n , односно претпоставимо да је $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ дељиво са 9. Докажимо да је тада тврђење тачно и за $n+1$.

$$\begin{aligned}
(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 &= (n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 + n^3 - n^3 \\
&= n^3 + (n+1)^2 + (n+2)^3 + (n+3)^3 - n^3 \\
&= n^3 + (n+1)^2 + (n+2)^3 \\
&\quad + (n+3-n)((n+3)^2 + (n+3)n + n^2) \\
&= n^3 + (n+1)^2 + (n+2)^3 \\
&\quad + 3(n^2 + 6n + 9 + n^2 + 3n + n^2) \\
&= n^3 + (n+1)^2 + (n+2)^3 \\
&\quad + 3(3n^2 + 9n + 9) \\
&= n^3 + (n+1)^2 + (n+2)^3 \\
&\quad + 9n^2 + 3(9n + 9) \\
&= n^3 + (n+1)^2 + (n+2)^3 \\
&\quad + 9n^2 + 3 \cdot 9(n+1)
\end{aligned}$$

Према индуктивној претпоставци је $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ дељиво са 9. Такође, $9n^2$ и $3 \cdot 9(n+1)$ су дељиви са 9, па је и $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 + 9n^2 + 3 \cdot 9(n+1)$ дељиво са 9, односно $(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3$ је дељиво са 9. Дакле, тврђење је тачно и за $n+1$.

На основу принципа математичке индукције, тврђење је тачно за све природне бројеве $n \in \mathbb{N}$.

1.3. (a) $\frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n-1)}{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdots (4n+1)} < \sqrt{\frac{3}{4n+3}}$

База индукције ($n = 1$): $\frac{4 \cdot 1 - 1}{4 \cdot 1 + 1} = \frac{3}{5}$, $\sqrt{\frac{3}{4 \cdot 1 + 3}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$ и важи да је $\frac{3}{5} < \sqrt{\frac{3}{7}}$, јер

је $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} = \frac{63}{25 \cdot 7} < \frac{75}{25 \cdot 7} = \frac{3}{7} = \frac{3}{7} = \sqrt{\frac{3}{7}}^2$. Дакле, тврђење је тачно за $n = 1$.

Претпоставимо да је тврђење тачно за неко n , односно претпоставимо да је $\frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n-1)}{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdots (4n+1)} < \sqrt{\frac{3}{4n+3}}$. Докажимо да је тада тврђење тачно и за $n+1$.

$$\begin{aligned}
\frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n-1)(4(n+1)-1)}{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdots (4n+1)(4(n+1)+1)} &= \frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n-1)}{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdots (4n+1)} \cdot \frac{4(n+1)-1}{4(n+1)+1} \\
&< \sqrt{\frac{3}{4n+3}} \cdot \frac{4n+4-1}{4n+4+1} \\
&= \sqrt{\frac{3}{4n+3}} \cdot \frac{4n+3}{4n+5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{3}{4n+3}} \sqrt{\frac{(4n+3)^2}{(4n+5)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{3}{4n+3} \cdot \frac{(4n+3)^2}{(4n+5)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{3(4n+3)}{(4n+5)^2}}
\end{aligned}$$

Ако докажемо да је $\frac{4n+3}{(4n+5)^2} < \frac{1}{4(n+1)+3} = \frac{1}{4n+4+3} = \frac{1}{4n+7}$, онда ћемо имати да је $\frac{3(4n+3)}{(4n+5)^2} < \frac{3}{4n+7}$, тј. $\sqrt{\frac{3(4n+3)}{(4n+5)^2}} < \sqrt{\frac{3}{4n+7}}$, па ће бити

$$\frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n-1)(4(n+1)-1)}{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdots (4n+1)(4(n+1)+1)} < \sqrt{\frac{3(4n+3)}{(4n+5)^2}} < \sqrt{\frac{3}{4n+7}},$$

и онда ће неједнакост важити и за $n+1$. Приметимо да је $(4n+3)(4n+7) = ((4n+5)-2)((4n+5)+2) = (4n+5)^2 - 2^2 < (4n+5)^2$. Дакле, доказали смо да је $(4n+3)(4n+7) < (4n+5)^2$. Ако ову неједнакост поделимо са $(4n+5)^2(4n+7)$ (што је позитивно), добићемо да је

$$\frac{(4n+3)(4n+7)}{(4n+5)^2(4n+7)} < \frac{(4n+5)^2}{(4n+5)^2(4n+7)},$$

односно $\frac{4n+3}{(4n+5)^2} < \frac{1}{4n+7}$. Према томе, на основу претходног образложења, неједнакост коју доказујемо важи и за $n+1$.

На основу принципа математичке индукције, неједнакост важи за све $n \in \mathbb{N}$.

(б) $2^n > n^2$, за $n \geq 5$

База индукције ($n = 5$): $2^5 = 32 > 25 = 5^2$, па неједнакост важи за $n = 5$.

Претпоставимо да неједнакост важи за неко $n \geq 5$, односно да је $2^n > n^2$.

Тада је

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2^1 = 2^n \cdot 2 > n^2 \cdot 2 = 2n^2.$$

Ако докажемо да је $2n^2 > (n+1)^2$, онда ће бити $2^{n+1} > 2n^2 > (n+1)^2$, што ће значити да неједнакост коју доказујемо важи и за $n+1$. Како је $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ и $2n^2 = n^2 + n^2$, довољно је доказати да је $n^2 > 2n + 1$ (додавањем n^2 левој и десној страни неједнакости добијамо $n^2 + n^2 > n^2 + 2n + 1$, тј. $2n^2 > (n+1)^2$). Одузмимо $2n$ од леве и десне стране неједнакости и додајмо 1. Добијамо $n^2 - 2n + 1 > 2n + 1 - 2n + 1$, тј. $(n-1)^2 > 2$, а ова неједнакост је тачна, јер је $n \geq 5$. Дакле, $n^2 > 2n + 1$, па је и $2^{n+1} > 2n^2 = n^2 + n^2 > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$, односно неједнакост важи и за $n+1$.

Према принципу математичке индукције, неједнакост важи за све природне бројеве $n \geq 5$. Приметимо да је база индукције била $n = 5$, а не $n = 1$. Пошто смо доказали да ако неједнакост важи за неко $n \geq 5$, онда важи и за $n + 1$, онда неједнакост важи и за $5 + 1 = 6$, па затим за $6 + 1 = 7$, па затим за $7 + 1 = 8$ и тако даље. Дакле, математичка индукција није ограничена на то да се нешто доказује за све природне бројеве n .

$$(в) \frac{4^n}{n+1} \leq \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

Свеједно је да ли ћемо доказати неједнакост која је дата или неједнакост $\frac{(2n)!}{(n!)^2} \geq \frac{4^n}{n+1}$, те ћемо доказати ову другу.

База индукције ($n = 1$): $\frac{(2 \cdot 1)!}{(1!)^2} = \frac{2!}{1^2} = \frac{2}{1} = 2$, $\frac{4^1}{1+1} = \frac{4}{2} = 2$. Дакле, важи неједнакост за $n = 1$ (јер ако важи $=$, важи и $\geq$).

Претпоставимо да неједнакост важи за неко n , односно да је $\frac{(2n)!}{(n!)^2} \geq \frac{4^n}{n+1}$. Тада је

$$\begin{aligned} \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} &= \frac{(2n+2)!}{((n+1)n!)^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2(n!)^2} \\ &= \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)^2} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} \geq \frac{2(2n+1)}{n+1} \cdot \frac{4^n}{n+1}, \end{aligned}$$

па је довољно доказати да је $\frac{2(2n+1)}{(n+1)^2} \geq \frac{4}{n+2}$. Приметимо да је

$$\begin{aligned} 2(2n+1)(n+2) &= (4n+2)(n+2) = 4n^2 + 8n + 2n + 4 \\ &= 4(n^2 + 2n + 1) + 2n = 4(n+1)^2 + 2n \geq 4(n+1)^2, \end{aligned}$$

тј. $2(2n+1)(n+2) \geq 4(n+1)^2$. Делењем ове неједнакости са $(n+1)^2(n+2)$, које је позитивно, добијамо

$$\frac{2(2n+1)(n+2)}{(n+1)^2(n+2)} \geq \frac{4(n+1)^2}{(n+1)^2(n+2)},$$

односно $\frac{2(2n+1)}{(n+1)^2} \geq \frac{4}{n+2}$. Сада следи да је

$$\frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} \geq \frac{2(2n+1)}{(n+1)^2} \cdot 4^n \geq \frac{4}{n+2} \cdot 4^n = \frac{4^{n+1}}{n+2},$$

односно да неједнакост важи и за $n + 1$.

Према принципу математичке индукције, неједнакост важи за све природне бројеве $n \in \mathbb{N}$.

2 Низови

Шта је то низ? Низ представља колекцију бројева, при чему је важно да сваки број има своју позицију и да се на свакој позицији налази тачно један број. Дакле, низ би могао бити нешто овако: 1, 3, 2, 5, 4, 5, 6, 2, 6, 9. Заиста, на првој позицији налази се број 1, на другој позицији налази се број 3 и тако даље. Приметимо да се број 2 налази на трећој и на осмој позицији. Ово је у реду, јер је једини захтев био да се на свакој позицији налази тачно један број. Дакле, позиција једнозначно одређује број у низу, док се исти број може наћи и на више различитих позиција. Ово оправдава следећу, формалну, дефиницију низа.

Дефиниција 2.1. Свака функција $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ назива се низом реалних бројева.

Претходни пример је био коначни низ, јер није постојао број који одговара једанаестој позицији, дванаестој позицији итд. У овој глави ћемо под низом бројева подразумевати искључиво бесконачне низове, односно низове код којих на свакој позицији постоји неки број. При томе, број на позицији n , што је заправо број $a(n)$ (вредност функције a за аргумент n), означаваћемо са a_n , а низове ћемо обележавати са $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Пример 2.1. Низ природних бројева 1, 2, 3, 4, ... можемо формално записати као низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, где је n -ти члан низа, односно број на n -тој позицији, а то означавамо са a_n , једнак n -том природном броју (што је заправо број n), односно $a_n = n$.

Пример 2.2. Низ бројева $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ можемо формално записати као низ $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, где је $b_n = \frac{1}{n}$.

Пример 2.3. Посматрајмо низ бројева $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ задат са $c_n = (-1)^n$. Његови чланови су $-1, 1, -1, 1, \dots$. Дакле, на непарним позицијама овог низа налази се број -1 , а на парним позицијама број 1 .

Дакле, низови бројева могу бити разни. Неке битне особине које низови могу задовољити су монотоност и ограниченост. Видећемо ове особине на претходним примерима.

Низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ из примера 2.1. задовољава да му је сваки следећи члан низа већи од претходног. Заиста, други члан низа, 2, већи је од првог члана, тј. од 1, затим је трећи члан, 3, већи од другог, 2, и тако даље. Другим речима, за свако n важи да је $a_{n+1} > a_n$. Такве низове зовемо растућим низовима. Ако дозволимо једнакост, односно ако важи да је $a_{n+1} \geq a_n$ за све n , тада је у питању неоппадајући низ.

Слично томе, низ $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ има особину да је сваки следећи члан низа мањи од претходног. Заиста, други члан низа, $\frac{1}{2}$, већи је од првог члана, тј. од 1, затим је трећи члан, $\frac{1}{3}$, већи од другог, $\frac{1}{2}$, и тако даље. Другим речима, за свако n важи да је $b_{n+1} < b_n$. Такве низове зовемо опадајућим низовима. Ако дозволимо једнакост, односно ако важи да је $b_{n+1} \leq b_n$ за све n , тада је у питању нерастући низ.

Дефиниција 2.2. (а) Низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ такав да је $a_{n+1} > a_n$ за све $n \in \mathbb{N}$ зове се растући низ.

(б) Низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ такав да је $a_{n+1} \geq a_n$ за све $n \in \mathbb{N}$ зове се неопадајући низ.

(в) Низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ такав да је $a_{n+1} < a_n$ за све $n \in \mathbb{N}$ зове се опадајући низ.

(г) Низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ такав да је $a_{n+1} \leq a_n$ за све $n \in \mathbb{N}$ зове се нерастући низ.

Низ који задовољава неку од ових особина зове се монотон низ. Ако задовољава особине (а) или (в), онда је то строго монотон низ.

Низ $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ из примера 2.2. има особину да се сви његови чланови налазе у интервалу $[0, 1]$ (тачније, у интервалу $(0, 1]$, јер је $0 < \frac{1}{n} \leq 1$ за све $n \in \mathbb{N}$). Дакле, бројеви 0 и 1 ограничавају чланове низа $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, па је ово пример једног ограниченог низа.

Низ $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ из примера 2.3. има само чланове -1 и 1 , који се наизменично понављају. Дакле, можемо рећи да су сви његови чланови у интервалу $[-1, 1]$, односно да је за свако $n \in \mathbb{N}$ испуњено $-1 \leq c_n \leq 1$. Дакле, и овај низ је ограничен, јер га ограничавају бројеви -1 и 1 .

За разлику од претходних низова, низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ из примера 2.1. није ограничен. Његови чланови су сви већи од 1 или једнаки 1, међутим, не постоји ниједан број $b \in \mathbb{R}$ од којег су сви чланови низа мањи. Шта год бисмо узели за b , довољно је само узети први природан број који је већи од b и сви чланови низа почевши од тог биће већи од b . Дакле, постоји доње ограничење низа $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, али не постоји горње ограничење.

Дефиниција 2.3. (а) Ако постоји број $a \in \mathbb{R}$ такав да је $x_n \geq a$ за све $n \in \mathbb{N}$, онда је низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ограничен одоздо.

(б) Ако постоји број $b \in \mathbb{R}$ такав да је $x_n \leq b$ за све $n \in \mathbb{N}$, онда је низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ограничен одозго.

Ако је низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ограничен и одоздо и одозго, онда је он ограничен низ.

Ако бисмо са M означили већи од бројева $|a|$ и $|b|$, онда за низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ који је ограничен одоздо са a и одозго са b важи $-M \leq x_n \leq M$, па можемо написати да је $|x_n| \leq M$ за све $n \in \mathbb{N}$.

Кључна разлика између коначних и бесконачних низова јесте у томе да коначни низ има последњи елемент, док бесконачни низ то нема

(после сваког члана низа постоји следећи). Међутим, можемо покушати да замислимо члан бесконачног низа на позицији ∞ , али то морамо урадити на неки смислен начин, тј. морамо некако да закључимо који би то број могао бити на позицији ∞ у зависности од осталих (правих) чланова низа.

Низ $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ из примера 2.2. има чланове који су између 0 и 1. При томе, што је већа позиција n коју посматрамо, број на тој позицији је све мањи и мањи, али и даље је позитиван. Зато има смисла рећи да би последњи члан тог низа, односно члан на позицији ∞ морао бити 0.

Низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ из примера 2.1. има чланове који су све већи и већи и није их могуће ограничити одозго. Пошто не постоји највећи реалан број, ниједан реалан број не би могао бити последњи члан овог низа, тј. члан на позицији ∞ . Заправо, проблем је у томе што бројеви представљају неке коначне величине. Пошто низ није ограничен, једини смислени кандидат за последњи члан низа $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ је заправо бесконачност, односно $+\infty$.

За разлику од низова из примера 2.1. и 2.2, низ $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ нема никакву шансу да му се одреди последњи члан. Заиста, који број би могао бити последњи у низу $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$? Нема смисла да то буде -1 , јер би после њега требало да иде 1. Нема смисла да буде ни 1, јер би после њега требало да иде -1 . Можда њихова аритметичка средина, тј. $\frac{-1+1}{2} = 0$? То можда и има смисла, али ћемо у овом курсу ипак одбацити ту идеју и просто ћемо рећи да за овај низ не постоји никакав број који би могао бити последњи члан низа.

Нагласимо да је израз последњи члан за (бесконачне) низове погрешан и зато га надаље нећемо употребљавати. Уместо тога ћемо говорити о граничној вредности низа, познатијој под називом лимес низа. Покушајмо да мало формализујемо појам граничне вредности. Пошто то неформално треба да буде последњи члан низа, можемо рећи да је особина, коју гранична вредност треба да задовољи, та да се у њеној околини налазе скоро сви чланови низа. Шта значи околина и шта значи скоро сви чланови низа?

Замислимо неки позитиван број $\varepsilon > 0$. Околина би требало да буде нешто што је близу, па има смисла рећи да су бројеви из интервала $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ близу броју a , у смислу да растојање од њега до a мора бити мање од ε . Заиста, нека је $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ произвољан. Он задовољава да је $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$. Одузимањем a овим неједнакостима добијамо $-\varepsilon < x - a < \varepsilon$, односно $|x - a| < \varepsilon$. Дакле, растојање између x и a мање је од ε . Из тог разлога се интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ зове ε -околином тачке a .

Посматрајмо сада низ $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ из примера 2.2. Рекли смо да има смисла да његов последњи члан, односно гранична вредност, буде број 0, јер што гледамо веће позиције, бројеви постају све мањи и мањи, али и да-

ље остају позитивни. Фиксирајмо неко мало $\varepsilon > 0$, рецимо $\varepsilon = 0.1$. Тада се у ε -околини тачке 0, тј. у интервалу $(-0.1, 0.1)$ налазе сви чланови низа b_n почевши од једанаесте позиције. Заиста, члан низа b_n на десетој позицији је $b_{10} = \frac{1}{10} = 0.1$ и сви чланови низа (b_n) након њега су мањи од 0.1 и позитивни, па самим тим већи и од -0.1 . Дакле, сви чланови низа b_n почевши од једанаесте позиције припадају ε -околини тачке 0. Пошто низ (b_n) има бесконачно много чланова, првих десет чланова је занемарљиво у односу на бесконачно много чланова почевши од једанаестог, па можемо слободно рећи да скоро сви чланови низа (b_n) припадају тој околини.

Ако сматрамо да је вредност 0.1 за ε превелика, можемо је смањити, рецимо на $\varepsilon = 0.01$. Међутим, и даље ће скоро сви чланови низа (b_n) упасти у ε -околину тачке 0, односно сада у интервал $(-0.01, 0.01)$, јер је стоти члан низа b_n једнак $b_{100} = \frac{1}{100} = 0.01$, а сви чланови након њега су мањи од 0.01 и већи од -0.01 јер су позитивни. Наравно, опет смо рекли скоро сви чланови низа, јер су првих сто чланова низа, који нису упали у ту околину, занемарљиви у односу на све остале на позицијама од стоте па надаље (којих има бесконачно много) који јесу. Дакле, термин скоро сви чланови код низова односи се на чланове низа на позицијама почевши од неке, јер се сви чланови на претходним позицијама слободно могу занемарити у односу на све остале којих има бесконачно много.

Наравно, ε можемо произвољно смањивати, али ћемо приметити да све док је $\varepsilon > 0$, у ε -околину тачке 0 упашће скоро сви чланови низа (b_n) , тј. можда првих коначно много неће упасти, али ће зато сви чланови на позицијама почевши од n_0 -те упасти. Зато имамо следећу, формалну дефиницију граничне вредности.

Дефиниција 2.4. Нека је $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ. Реалан број $a \in \mathbb{R}$ зовемо граничном вредности низа $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји неки природан број n_0 такав да су сви чланови низа (a_n) на позицијама почевши од n_0 -те у ε -околини тачке a , односно да за све $n \geq n_0$ важи да је $|a_n - a| < \varepsilon$. За низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ који има (коначну) граничну вредност $a \in \mathbb{R}$ кажемо да је конвергентан или да конвергира, а чињеницу да је a гранична вредност тога низа пишемо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Низ који не конвергира зове се дивергентан низ или се каже да низ дивергира.

Дакле, низ $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ из примера 2.2. конвергира и његова гранична вредност је 0, што записујемо са $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. Такође, пошто је $b_n = \frac{1}{n}$, онда се пише и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

За низ $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ из примера 2.3. не постоји гранична вредност. Заиста, нека је рецимо $\varepsilon = 0.1$. Ако посматрамо ε -околину тачке 1, тј. интервал

$(0.9, 1.1)$, у њу не могу упасти скоро сви чланови низа c_n , јер чланови низа иду у редоследу $-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$. Дакле, шта год да пробамо да ставимо за n_0 , неће сви чланови низа на позицијама после n_0 -те упасти у интервал $(0.9, 1.1)$ због чланова -1 на непарним позицијама после n_0 -те. Слично важи и за тачку -1 , тј. за њену ε -околину $(-1.1, -0.9)$. Шта год да узмемо за n_0 , чланови 1 на парним позицијама после n_0 -те неће упасти у интервал $(-1.1, -0.9)$. Дакле, бројеви -1 и 1 нису граничне вредности овог низа. Ниједан други реалан број $c \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ не може бити гранична вредност, јер је могуће узети довољно мало $\varepsilon > 0$ такво да ниједан члан низа не упадне у интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Нпр, ако бисмо узели $a = 0$, довољно је узети $\varepsilon = 0.5$ и интервалу $(-0.5, 0.5)$ неће припадати ниједан члан низа (c_n) , па самим тим ни скоро сви чланови низа.

А шта ћемо с низом $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ из примера 2.1? За њега смо рекли да ниједан реалан број не може бити његова гранична вредност, јер низ није ограничен, односно након сваког члана низа иду све већи бројеви за које није могуће наћи горње ограничење. Заправо, не постоји коначно горње ограничење овог низа, а постоји једно тривијално горње ограничење, а то је $+\infty$. Треба обратити пажњу да $+\infty$ не сматрамо горњим ограничењем у смислу дефиниције 2.3, јер се у њој захтева да број b који представља горње ограничење низа буде (коначан) реалан број, а $+\infty$ то није! Такође, може се увести појам околине тачке $+\infty$ и под тиме се сматра сваки интервал $(b, +\infty)$. Шта год да је $b \in \mathbb{R}$, постоји n_0 такво да су сви чланови низа (a_n) на позицијама почевши од n_0 -те већи од b , односно ти чланови низа припадају околини $(b, +\infty)$ тачке $+\infty$. У смислу сличном као кад је коначна гранична вредност, казаћемо да је $+\infty$ гранична вредност низа a_n , односно да је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$. Такође, треба приметити да низ a_n није конвергентан, јер му је гранична вредност бесконачна, а у дефиницији 2.4. стоји да низ (a_n) који има коначну граничну вредност, односно за који постоји (коначан) број $a \in \mathbb{R}$ такав да је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, зовемо конвергентним низом. Дакле, низ (a_n) из примера 2.1. дивергира.

Дефиниција 2.5. (а) Ако за свако $b \in \mathbb{R}$ постоји n_0 такво да су сви чланови низа $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ на позицијама почевши од n_0 -те већи од b , односно да је $a_n > b$ за све $n \geq n_0$, онда пишемо да је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, али низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ није конвергентан низ.

(б) Ако за свако $a \in \mathbb{R}$ постоји n_0 такво да су сви чланови низа $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ на позицијама почевши од n_0 -те мањи од a , односно да је $a_n < a$ за све $n \geq n_0$, онда пишемо да је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, али низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ није конвергентан низ.

Наведимо особине граничне вредности. Ако су $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конвергентни низови, тада важи:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}, \text{ ако је } b_n \neq 0 \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^k &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^k, \quad k \in \mathbb{Z}, \text{ ако је } a_n \neq 0 \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^p &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^p, \quad p \in \mathbb{Q}, \text{ ако је } a_n > 0 \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{b_n} &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}, \text{ ако је } a_n > 0 \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 0\end{aligned}$$

Треба имати у виду да ове особине важе за конвергентне низове (a_n) и (b_n) , односно да су њихове граничне вредности коначне. Код бесконачних граничних вредности већина ових правила важе следећа правила. Биће наведена неформално, а формални списак правила биће доступан касније.

- (1) $\infty + c = \infty$
- (2) $+\infty + \infty = +\infty$
- (3) $-\infty - \infty = -\infty$
- (4) $+\infty - \infty$ не може директно да се одреди
- (5) $\infty \cdot c = \infty$ ако је $c \neq 0$
- (6) $0 \cdot \infty$ не може директно да се одреди
- (7) $\frac{\infty}{c} = \infty$ ако су чланови низа у имениоцу истог знака
- (8) $\frac{c}{\infty} = 0$
- (9) $\frac{c}{0} = \infty$ ако је $c \neq 0$ и чланови низа у имениоцу су истог знака
- (10) $\frac{0}{0}$ не може директно да се одреди
- (11) $\frac{\infty}{\infty}$ не може директно да се одреди
- (12) 0^0 не може директно да се одреди
- (13) $0^{-\infty} = +\infty$
- (14) $0^{+\infty} = 0$
- (15) 1^∞ не може директно да се одреди
- (16) $(+\infty)^0$ не може директно да се одреди
- (17) $(+\infty)^{+\infty} = +\infty$
- (18) $(+\infty)^{-\infty} = 0$

2.1. (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2n+1} = \frac{1}{2}$

Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Треба наћи n_0 такав да су сви чланови низа почевши од n_0 -те позиције у ε -околини тачке $\frac{1}{2}$. Другим речима, треба наћи n_0 такво да за све $n \geq n_0$ важи $\left| \frac{n+2}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{n+2}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| &< \varepsilon \\ \left| \frac{2(n+2)}{2(2n+1)} - \frac{2n+1}{2(2n+1)} \right| &< \varepsilon \\ \left| \frac{2n+4-2n-1}{2(2n+1)} \right| &< \varepsilon \\ \left| \frac{3}{2(2n+1)} \right| &< \varepsilon \\ \frac{3}{2(2n+1)} &< \varepsilon \\ 2n+1 &> \frac{3}{2\varepsilon} \\ 2n &> \frac{3}{2\varepsilon} - 1 = \frac{3}{2\varepsilon} - \frac{2\varepsilon}{2\varepsilon} = \frac{3-2\varepsilon}{2\varepsilon} \\ n &> \frac{3-2\varepsilon}{4\varepsilon} \end{aligned}$$

Дакле, довољно је за n_0 узети први природан број који је већи од $\frac{3-2\varepsilon}{4\varepsilon}$. Тада ће за све $n \geq n_0$ важити $n > \frac{3-2\varepsilon}{4\varepsilon}$, односно $\left| \frac{n+2}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$. Према томе, по дефиницији је $\frac{1}{2}$ гранична вредност низа $\frac{n+2}{2n+1}$, односно $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2n+1} = \frac{1}{2}$.

2.2. (а) $a_n = \frac{n+1}{n+2}$

Сви чланови низа су позитивни (јер је $n+1 > 0$ и $n+2 > 0$). Дакле, $a_n > 0$ за све n . Такође, $\frac{n+1}{n+2} < \frac{n+2}{n+2} = 1$, односно $a_n < 1$ за све n . Дакле, $0 < a_n < 1$ за све n , па је низ (a_n) ограничен.

(б) $b_n = \frac{3n^2-1}{n^2+1}$

Сви чланови низа су позитивни (јер је $3n^2 \geq 3$, па је $3n^2 - 1 \geq 2 > 0$, а и $n^2 + 1 > 0$), па је $b_n > 0$ за све n . Такође, $\frac{3n^2-1}{n^2+1} < \frac{3n^2+3}{n^2+1} = \frac{3(n^2+1)}{n^2+1} = 3$, односно $b_n < 3$ за све n . Дакле, $0 < \frac{3n^2-1}{n^2+1} < 3$, па је низ (b_n) ограничен.

(в) $a_n = \frac{n+1}{n+2}$

Сви чланови низа су позитивни (јер је $n+1 > 0$ и $n+2 > 0$). Дакле, $a_n > 0$ за све n . Такође, $\frac{n+1}{n+2} < \frac{n+2}{n+2} = 1$, односно $a_n < 1$ за све n . Дакле, $0 < a_n < 1$ за све n , па је низ (a_n) ограничен.

(г) $b_n = \frac{3n^2-1}{n^2+1}$

Сви чланови низа су позитивни (јер је $3n^2 \geq 3$, па је $3n^2 - 1 \geq 2 > 0$, а и $n^2 + 1 > 0$), па је $b_n > 0$ за све n . Такође, $\frac{3n^2-1}{n^2+1} < \frac{3n^2+3}{n^2+1} = \frac{3(n^2+1)}{n^2+1} = 3$,

односно $b_n < 3$ за све n . Дакле, $0 < \frac{3n^2-1}{n^2+1} < 3$, па је низ (b_n) ограничен.

(д) $c_n = \max\{n, 5\}$

Ако је $n < 5$, онда је $\max\{n, 5\} = 5$, па је $c_n = 5$. С друге стране, ако је $n \geq 5$, онда је $\max\{n, 5\} = n$, па је $c_n = n$. Дакле, низ (c_n) има чланове $5, 5, 5, 5, 5, 6, 7, 8, 9, \dots$, па пошто није могуће наћи горњу границу, као у примеру 2.1, низ (c_n) није ограничен.

(ђ) $d_n = \frac{2^n}{n!}$

Сви чланови низа су позитивни (јер је $2^n > 0$ и $n! > 0$), па је $d_n > 0$ за све n . Докажимо принципом математичке индукције да је $n! > 2^n$ за све $n \geq 4$.

База индукције ($n = 4$): $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12 \cdot 2 = 24$, $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 4 \cdot 4 = 16$, па је $4! > 2^4$, односно неједнакост важи за $n = 4$.

Претпоставимо да је $n! > 2^n$ за неко $n \geq 4$. Тада је $(n+1)! = (n+1)n! > (n+1)2^n > 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$, па неједнакост важи и за $n+1$.

Дакле, на основу принципа математичке индукције је $n! > 2^n$ за све $n \geq 4$. Одавде следи да је $d_n = \frac{2^n}{n!} < 1$ за све $n \geq 4$. Како је $d_1 = \frac{2^1}{1!} = \frac{2}{1} = 2$, $d_2 = \frac{2^2}{2!} = \frac{4}{2 \cdot 1} = 2$ и $d_3 = \frac{2^3}{3!} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$, следи да је $d_n \leq 2$ за све n . Дакле, $0 < d_n \leq 2$, па је низ (d_n) ограничен.

2.3. (а) $a_n = \frac{n}{n+1}$

Како је $a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(n+2)(n+1)} - \frac{n(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+2)(n+1)} - \frac{n^2+2n}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0$, следи да је $a_{n+1} > a_n$ за све n , односно да је (a_n) растући.

(б) $b_n = n^2 - 8n + 12$

Како је $b_{n+1} - b_n = (n+1)^2 - 8(n+1) + 12 - n^2 + 8n - 12 = n^2 + 2n + 1 - 8n - 8 - n^2 + 8n = 2n - 7$, следи да је $b_{n+1} - b_n < 0$ за $n \leq 3$ и да је $b_{n+1} - b_n > 0$ за $n \geq 4$. Дакле, $b_{n+1} < b_n$ за $n \leq 3$, односно $b_2 < b_1$, $b_3 < b_2$ и $b_4 < b_3$. Такође, $b_{n+1} > b_n$ за $n \geq 4$, односно $b_5 > b_4$, $b_6 > b_5$ и тако даље. Следи да је $b_1 > b_2 > b_3 > b_4$ и $b_4 < b_5 < b_6 < \dots$, односно низ (b_n) није монотон. Прецизније, (b_n) опада за n између 1 и 4 и расте за n веће од 4.

2.4. (а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{3n-5}\right)^3$

Посматрајмо низ $a_n = \frac{2n+1}{3n-5}$. Тражи се $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^3$. Ако је низ (a_n) конвергентан, онда је $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^3 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right)^3$, па ћемо прво потражити граничну вредност низа (a_n) .

Приметимо да је бројилац $2n+1$ низ чија је гранична вредност $+\infty$, а да је именилац $3n-5$ низ чија је гранична вредност такође $+\infty$. Дакле, не можемо помоћу тога утврдити граничну вредност низа $a_n = \frac{2n+1}{3n-5}$, већ морамо урадити нешто друго. У оваквим случајевима се извлачи највећи

степен у бројиоцу и у имениоцу испред заграда. Добијамо

$$a_n = \frac{2n+1}{3n-5} = \frac{n(2+\frac{1}{n})}{n(3-\frac{5}{n})} = \frac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{5}{n}}.$$

За разлику од малопре, сада су бројилац и именилац конвергентни низови. Заиста, $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 + \frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 2 + 0 = 2$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} (3 - \frac{5}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} = 3 - 0 = 3$, па је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{5}{n}} = \frac{2}{3}$.

Према томе, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{3n-5}\right)^3 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n-5}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$.

2.5.

2.6.

2.7. (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$

Користимо познати лимес $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Оно што је важно код овог лимеса јесте да је у загради израз облика $1 + \frac{1}{u}$, где је u неки израз који тежи ка бесконачности и да се тај исти израз u појављује као степен на који се подиже заграда. У нашем задатку је израз у загради $1 + \frac{1}{2n}$, међутим, степен на који подижемо заграду није $2n$, већ је само n . То можемо поправити, множењем и дељењем са 2. Добијамо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{\frac{2n}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Уочимо да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} = e$. Дакле, горњи лимес је онда једнак $e^{\frac{1}{2}}$.

(б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+3n+4}{n^2+2n+2}\right)^{2n}$

Погледајмо чему тежи израз у загради. Извлачењем n^2 и у бројиоцу и у имениоцу добијамо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2(1+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2})}{n^2(1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2})}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}\right)^{2n}.$$

Примећујемо да израз у загради тежи ка $\frac{1+0+0}{1+0+0} = \frac{1}{1} = 1$, али да степен на који га подижемо заграду тежи ка ∞ . То значи да овај лимес треба свести на e . У том циљу додајмо и одузмемо јединицу почетном изразу

у загради. Добијамо

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n^2 + 3n + 4}{n^2 + 2n + 2} - 1 \right)^{2n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n^2 + 3n + 4}{n^2 + 2n + 2} - \frac{n^2 + 2n + 2}{n^2 + 2n + 2} \right)^{2n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n^2 + 3n + 4 - n^2 - 2n - 2}{n^2 + 2n + 2} \right)^{2n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n + 2}{n^2 + 2n + 2} \right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n^2 + 2n + 2}{n + 2}} \right)^{2n}.
\end{aligned}$$

Да би се овај лимес свео на лимес који даје број e , потребно је наместити да степен на који се подиже заграда буде исти као израз у имениоцу другог сабирка у загради. Да би се то постигло, степен се множи и дели тим изразом. Дакле,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n^2 + 2n + 2}{n + 2}} \right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n^2 + 2n + 2}{n + 2}} \right)^{2n \cdot \frac{n^2 + 2n + 2}{n + 2} \cdot \frac{n + 2}{n^2 + 2n + 2}}.$$

Коришћењем особина степена, добијамо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n^2 + 2n + 2}{n + 2}} \right)^{\frac{n^2 + 2n + 2}{n + 2}} \right)^{\frac{2n(n + 2)}{n^2 + 2n + 2}}.$$

Израз у највећој загради тежи ка e , па следи да је крајње решење

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n(n + 2)}{n^2 + 2n + 2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 4n}{n^2 + 2n + 2} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(2 + \frac{4}{n} \right)}{n^2 \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} \right)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{4}{n}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2}} = e^{\frac{2+0}{1+0+0}} = e^{\frac{2}{1}} = e^2.
\end{aligned}$$

(в) домаћи

2.8. (а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2}$

У задатку 1.1. смо доказали да је $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Искористимо то и добијамо

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2+n}{2}}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{2n^2} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(б) домаћи

(в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} \right)$

Означимо $a_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \dots + \frac{2n-1}{2^n}$. Помножимо са 2. Добијамо $2a_n = 1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} + \dots + \frac{2n-1}{2^{n-1}}$. Како је $a_n = 2a_n - a_n$, добијамо

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} + \dots + \frac{2n-1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2^2} - \dots - \frac{2n-3}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^n} \\ &= 1 + \frac{3-1}{2} + \frac{5-3}{2^2} + \dots + \frac{2n-1-2n+3}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^n} \\ &= 1 + \frac{2}{2} + \frac{2}{2^2} + \dots + \frac{2}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n}. \end{aligned}$$

Препознајемо да је $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}}$ представља суму геометријске прогресије $1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2}$, где је $q = \frac{1}{2}$. Како је $1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2} = \frac{1-q^{n-2+1}}{1-q} = \frac{1-q^{n-1}}{1-q}$, следи да је

$$a_n = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^n},$$

па је тражени лимес

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^n} \right) \\ &= 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2^n} \\ &= 1 + \frac{1-0}{1-\frac{1}{2}} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2^n} \\ &= 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2^n} \\ &= 1 + 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2^n} = 3 - 0 = 3. \end{aligned}$$

Објашњење зашто је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2^n} = 0$ видећемо у задатку 2.10.

(г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$

У задатку 1.1. смо доказали да је $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$, па је

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{1} = 1. \end{aligned}$$

2.9. (а) $a_n = \frac{1}{n!}$

Како је $n! \geq n$, за сваки природни број n , следи да је $0 < \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n}$. Како је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, на основу теореме о два полицајца следи да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0$.

(б) $a_n = \frac{c^n}{n!}$, $c > 0$

Да бисмо доказали конвергенцију низа $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, доказаћемо да је монотон и ограничен. Како је $a_{n+1} = \frac{c^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{c \cdot c^n}{(n+1)n!} = \frac{c}{n+1} \cdot \frac{c^n}{n!} = \frac{c}{n+1} a_n$, следи да је $a_{n+1} - a_n = \frac{c}{n+1} a_n - a_n = \left(\frac{c}{n+1} - 1\right) a_n = \left(\frac{c}{n+1} - \frac{n+1}{n+1}\right) a_n = \frac{c-n-1}{n+1} a_n$. Како је $a_n = \frac{c^n}{n!}$ и $c > 0$, следи да је $a_n > 0$ за све природне бројеве n . Такође, $c - n - 1 > 0$ за све n мање од $c - 1$. Дакле, $a_{n+1} - a_n > 0$ за све n који су мањи од $c - 1$, а $a_{n+1} - a_n < 0$ за све n који су већи од $c - 1$. Значи, низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ није монотон, јер је растући за n између 1 и $c - 1$, а опадајући за n веће од $c - 1$. За примену теореме о монотонном и ограниченем низу није неопходно да низ буде монотон, већ је довољно да буде монотон почевши од неког члана. Пошто је $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ опадајући почевши од n_0 -тог члана, где је n_0 први природан број већи од $c - 1$, и пошто је ограничен одоздо, јер је $a_n > 0$ за све n , следи да низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конвергентан, односно да постоји коначна гранична вредност $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Присетимо се да је $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ ако су низови x_n и y_n конвергентни. Нека је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Тада је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = a$. Како је низ $\frac{c}{n+1}$ конвергентан, као и низ a_n , следи да је

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{c}{n+1} \cdot a_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \cdot a = 0.$$

Дакле, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, тј. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c^n}{n!} = 0$.

2.10. (а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{b^n} = 0$, $b > 1$

Нека је $a_n = \frac{n}{b^n}$. Тада је $a_{n+1} = \frac{n+1}{b^{n+1}} = \frac{n}{b} \cdot \frac{n+1}{b^n} = \frac{n+1}{b} \cdot \frac{n}{b^n} = \frac{n+1}{b} \cdot a_n$, па је $a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{b} a_n - a_n = \left(\frac{n+1}{b} - 1\right) a_n = \left(\frac{n+1}{b} - \frac{b \cdot n}{b \cdot n}\right) a_n = \frac{n+1-b \cdot n}{b \cdot n} a_n = \frac{1-(b-1) \cdot n}{b \cdot n} a_n$. Важи да је $a_n = \frac{n}{b^n} > 0$ за све n и $b \cdot n > 0$ за све n , а $1 - (b-1) \cdot n > 0$ ако је $(b-1) \cdot n < 1$, односно $n < \frac{1}{b-1}$ (због $b > 1$ следи да је $b-1 > 0$, па се дељењем не мења знак неједнакости). Дакле, низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ је растући за n између 1 и $\frac{1}{b-1}$, а опадајући за n веће од $\frac{1}{b-1}$. За примену теореме о монотонном и ограниченем низу довољно је да низ буде монотон почевши од неког члана. Пошто је низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ опадајући почевши од n_0 -тог члана, где је n_0 први природан број већи од $\frac{1}{b-1}$ и пошто је ограничен одоздо, јер је $a_n > 0$ за све n , следи да је низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конвергентан.

Нека је $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Тада је и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}$, па је

$$\begin{aligned} a &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{b \cdot n} \cdot a_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n(1 + \frac{1}{n})}{b \cdot n} \cdot a_n \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{b} \cdot a_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{b} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1+0}{b} \cdot a = \frac{1}{b} \cdot a. \end{aligned}$$

Дакле, $a - \frac{1}{b} \cdot a = 0$, тј. $a(1 - \frac{1}{b}) = 0$. Како је $b \neq 1$, следи да је $1 - \frac{1}{b} \neq 0$, па мора бити $a = 0$. Дакле, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

(б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$, $a > 1$, $k \in \mathbb{N}$

Нека је $b = \sqrt[k]{a}$. Тада је $b^k = a$, па је $\frac{n^k}{a^n} = \frac{n^k}{(b^k)^n} = \frac{n^k}{b^{kn}} = \frac{n^k}{(b^n)^k} = \left(\frac{n}{b^n}\right)^k$. Како је $a > 1$, онда је и $b = \sqrt[k]{a} > 1$, па је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{b^n}\right)^k = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{b^n}\right)^k = 0^k = 0$.

(в) $\lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0$, $|q| < 1$

Ако је $q = 0$, онда је $nq^n = 0$ за све n , па је и $\lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$.

Нека је $q \neq 0$. За сваки реални број a важи да је $-|a| \leq a \leq |a|$, па је $-|nq^n| \leq nq^n \leq |nq^n|$. Важи да је $|nq^n| = |n||q^n| = n|q|^n$ (јер је $n > 0$, па је $|n| = n$). Дакле, $-n|q|^n \leq nq^n \leq n|q|^n$. Означимо $b = \frac{1}{|q|}$. Тада је $n|q|^n = n \cdot \frac{1}{b^n} = \frac{n}{b^n}$, па је $-\frac{n}{b^n} \leq nq^n \leq \frac{n}{b^n}$. Из $|q| < 1$ следи да је $b > 1$, а из дела (а) следи да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{b^n} = 0$, па на основу теореме о два полицајца следи да је и $\lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0$.

(г) домаћи

(д) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $a > 0$

Пре него што докажемо ово, докажимо следећу неједнакост, познату под именом Бернулијева неједнакост:

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \text{ за све } n \in \mathbb{N}, \text{ ако је } x \geq -1.$$

Ову неједнакост доказаћемо принципом математичке индукције.

База индукције ($n = 1$): $(1+x)^1 = 1+x = 1+1 \cdot x$, па је неједнакост испуњена (ако важи $=$, важи и $\geq$).

Претпоставимо да неједнакост важи за неко n и докажимо да онда важи и за $n+1$. Важи

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) \\ &= 1+x+nx+nx^2 = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x. \end{aligned}$$

При томе, битно је да је $x \geq -1$, јер онда из индуктивне претпоставке $(1+x)^n \geq 1+nx$ множењем обеју страну неједнакости бројем $1+x \geq 0$ не мењамо знак неједнакости. Такође, за сабирак nx^2 важи $nx^2 \geq 0$, па отуд следи последња неједнакост.

Према принципу математичке индукције следи да је $(1+x)^n \geq 1+nx$, за све $n \in \mathbb{N}$, ако је $x \geq -1$.

Претпоставимо прво да је $a > 1$. Нека је $x_n = \sqrt[n]{a}$. Тада је $x_n \geq 1$, за све природне бројеве n . Такође, $a = x_n^n = (1+(x_n-1))^n \geq 1+n(x_n-1)$, па је $a-1 \geq n(x_n-1)$, тј. $x_n-1 \leq \frac{a-1}{n}$. Дакле, добијамо $1 \leq x_n \leq 1 + \frac{a-1}{n}$, па пошто је $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a-1}{n}\right) = 1$, на основу теореме о два полицајца следи да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Ако је $a = 1$, онда је $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{1} = 1$, па је $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$.

Ако је $0 < a < 1$, онда је $b = \frac{1}{a} > 1$, па је $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b}} = \frac{1}{1} = 1$ (коришћено је $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b} = 1$ за све $b > 1$).

(ђ) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Пре него што докажемо ово, докажимо следећу неједнакост (уопштење Бернулијеве неједнакости):

$$(1+x)^n \geq 1+nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2, \text{ за све } n \in \mathbb{N}, \text{ ако је } x \geq 0.$$

Ову неједнакост доказаћемо принципом математичке индукције.

База индукције ($n = 1$): $(1+x)^1 = 1+x = 1+x+0 \cdot x^2 = 1+1 \cdot x + \frac{1(1-1)}{2}x^2$, па је неједнакост испуњена (ако важи $=$, важи и $\geq$).

Претпоставимо да неједнакост важи за неко n и докажимо да онда важи и за $n+1$. Важи

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \geq \left(1+nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2\right)(1+x) \\ &= 1+x+nx+nx^2 + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)}{2}x^3 \\ &\geq 1+(n+1)x + \left(n + \frac{n(n-1)}{2}\right)x^2 \\ &= 1+(n+1)x + \left(\frac{2n}{2} + \frac{n^2-n}{2}\right)x^2 \\ &= 1+(n+1)x + \frac{n^2+n}{2}x^2 \\ &= 1+(n+1)x + \frac{(n+1)n}{2}x^2. \end{aligned}$$

При томе, битно је да је $x \geq 0$, јер онда из индуктивне претпоставке $(1+x)^n \geq 1+nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$ множењем обеју страну неједнакости бројем $1+x \geq 1 > 0$ не мењамо знак неједнакости. Такође, за сабирак $\frac{n(n-1)}{2}x^3$ важи $\frac{n(n-1)}{2}x^3 \geq 0$, јер је $x \geq 0$, па отуд следи последња неједнакост.

Дакле, према принципу математичке индукције доказано је да важи $(1+x)^n \geq 1+nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$, за све $n \in \mathbb{N}$, ако је $x \geq 0$.

Нека је $x_n = \sqrt[n]{n}$. Тада је $x_n \geq 1$ за све $n \in \mathbb{N}$, па на основу претходне неједнакости важи $n = x_n^n = (1+(x_n-1))^n \geq 1+n(x_n-1) + \frac{n(n-1)}{2}(x_n-1)^2 \geq \frac{n(n-1)}{2}(x_n-1)^2$. Следи да је $n \geq \frac{n(n-1)}{2}(x_n-1)^2$, па је $\frac{2}{n-1} \geq (x_n-1)^2$, за

све $n > 1$. Оба броја су позитивна, па кореновањем добијамо $\sqrt{\frac{2}{n-1}} \geq x_n - 1$ (јер је $x_n \geq 1$, тј. $x_n - 1 \geq 0$), па је $1 \leq x_n \leq 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}$. Како

је $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}\right) = 1$, на основу теореме о два полицајца следи да је $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$, односно да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

(е) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$, $a > 1$

Једноставно добијамо да је $\log_a \sqrt[n]{n} = \log_a n^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a n = \frac{\log_a n}{n}$. Како је малопре доказано да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, следи да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \log_a \sqrt[n]{n} = \log_a \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \right) = \log_a 1 = 0.$$

Вратимо се низу $c_n = (-1)^n$ из примера 2.3. Он нема граничну вредност. Једини кандидати за граничну вредност су били -1 и 1 , а за њих смо доказали да нису граничне вредности тако што смо утврдили да за $\varepsilon = 0.1$ у ε -околину $(0.9, 1.1)$ тачке 1 не можемо сместити све чланове низа (c_n) почевши од n_0 -те позиције, јер шта год одабрали за n_0 , сваки други члан низа биће -1 , што не упада у посматрану ε -околину. Слично је и за ε -околину $(-1.1, -0.9)$ тачке -1 , јер шта год одабрали за n_0 , није могуће сместити све чланове низа почевши од n_0 -те позиције, јер ће сваки други члан бити 1 , што не припада посматраној ε -околини. Међутим, иако тачке -1 и 1 нису граничне вредности овог низа, ипак имају неко занимљиво својство. Приметимо да није било могуће у ε -околину тачке 1 сместити све чланове низа (c_n) почевши од неке позиције n_0 , али је ипак бесконачно много чланова низа упало у посматрану ε -околину (то су сви чланови низа који се налазе на непарним позицијама, којих има бесконачно много). Исто је важило и за ε -околину тачке -1 , односно у њу је упало бесконачно много чланова низа (сви чланови на парним позицијама, којих такође има бесконачно много). Оваквим тачкама дајемо посебно име.

Дефиниција 2.6. Тачка $a \in \mathbb{R}$ назива се тачком нагомилавања низа $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ако је за свако $\varepsilon > 0$ у ε -околину $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ тачке a могуће сместити бесконачно много чланова низа $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Гранична вредност низа увек представља његову тачку нагомилавања. Заиста, ако је $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, онда за свако $\varepsilon > 0$ постоји n_0 такво да сви чланови низа (a_n) почевши од n_0 -те позиције припадају ε -околини $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ тачке a , а чланова низа на позицијима $n \geq n_0$ има бесконачно много. Обрнуто не мора да важи, као што смо видели на примеру низа $c_n = (-1)^n$ из примера 2.3. Наравно, тачке -1 и 1 јесу тачке нагомилавања низа (c_n) .

Назив тачка нагомилавања је такав зато што се око ње гомилају чланови низа (колико год малу околину те тачке посматрали, у њој се налази бесконачно много чланова низа, односно они се гомилају око ње). Гранична вредност низа такође представља тачку нагомилавања, при чему се захтева да се око ње гомилају редом сви чланови низа почевши од неке позиције, без прескакања. Постоји још теснија веза између граничне вредности и тачке нагомилавања, а за њу је потребно знати шта се сматра поднизом неког низа.

Дефиниција 2.7. Нека је $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ растући низ природних бројева, односно нека је $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ и сви n_k су природни бројеви. Ако је $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ неки низ реалних бројева, онда је низ $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ подниз низа $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Другим речима, низ $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ представља (бесконачан) низ позиција са којих бирамо чланове низа $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ које ћемо сместити у подниз. Подниз низа је заправо низ сачињен од чланова полазног низа, при чему се чува њихов редослед, али се не морају бирати узастопно, већ неким произвољних редоследом.

Пример 2.4. Нека је $n_k = 2k$ низ парних природних бројева. Тада је $(c_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ подниз низа $c_n = (-1)^n$ сачињен искључиво од чланова низа c_n на парним позицијама. Његови чланови су $c_{n_k} = c_{2k} = (-1)^{2k} = 1$. Приметимо да је, за разлику од низа (c_n) , подниз (c_{n_k}) конвергентан и његова гранична вредност је 1 , што је једна од тачака нагомилавања низа (c_n) .

Пример 2.5. Из низа $c_n = (-1)^n$ могуће је издвојити и подниз сачињен од чланова на непарним позицијама. У питању је онда подниз $(c_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, где је $n_k = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, низ непарних природних бројева. Чланови овог подниза низа (c_n) су $c_{n_k} = c_{2k-1} = (-1)^{2k-1} = -1$. И овај подниз низа

(c_n) је конвергентан и његова гранична вредност је -1 , што представља другу тачку нагомилавања низа (c_n) .

Из претходна два примера можемо доћи до следећег закључка. Наиме, тачке нагомилавања низа нису ништа друго него граничне вредности специјално одабраних поднизова. Дакле, да бисмо нашли тачке нагомилавања неког низа, потребно је погодно одабрати његове поднизове и наћи њихове граничне вредности. Нагласимо, само, да је из низа $c_n = (-1)^n$ било могуће извући и другачије поднизове, нпр. подниз $(c_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ одређен са $n_k = 3k$, односно подниз одређен члановима полазног низа на позицијама које су дељиве са 3, међутим, такав подниз није користан за одређивање тачака нагомилавања, јер он нема граничну вредност. Заиста, његови чланови су $c_{n_k} = c_{3k} = (-1)^{3k} = ((-1)^3)^k = (-1)^k$, а тај низ нема граничну вредност.

2.11. $a_n = \frac{(1+(-1)^n)n^2+n}{3n^2-1} + \cos \frac{2n\pi}{3}$

Да бисмо утврдили шта су тачке нагомилавања низа (a_n) , утврдимо прво које је поднизове најзгодније посматрати. Изрази $(-1)^n$ и $\cos \frac{2n\pi}{3}$ имају коначан скуп вредности које могу узети и те вредности се периодично понављају. Вредности које израз $(-1)^n$ може узети су -1 и 1 и период понављања ових вредности је 2 . С друге стране, из тригонометрије знамо да је $\cos(ax)$ периодична функција и да је њен период $\frac{2\pi}{a}$. Дакле, $\cos \frac{2n\pi}{3}$ се понавља са периодом $\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}} = 3$ и вредности које узима су:

$$\begin{aligned}\cos \frac{2 \cdot 1 \cdot \pi}{3} &= \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \\ \cos \frac{2 \cdot 2 \cdot \pi}{3} &= \cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \\ \cos \frac{2 \cdot 3 \cdot \pi}{3} &= \cos 2\pi = 1.\end{aligned}$$

Најмањи заједнички садржалац бројева 2 и 3 је 6 . Зато ћемо посматрати поднизове $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ одређене следећим низовима (n_k) :

1° $n_k = 6k$

Тада је

$$\begin{aligned}a_{n_k} &= a_{6k} = \frac{(1+(-1)^{6k})(6k)^2+6k}{3(6k)^2-1} + \cos \frac{2 \cdot (6k)\pi}{3} \\ &= \frac{(1+1)36k^2+6k}{3 \cdot 36k^2-1} + \cos(2 \cdot (2k)\pi) \\ &= \frac{2 \cdot 36k^2+6k}{108k^2-1} + \cos(4k\pi) = \frac{72k^2+6k}{108k^2-1} + 1.\end{aligned}$$

Гранична вредност овог подниза је

$$\begin{aligned}
 \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{72k^2 + 6k}{108k^2 - 1} + 1 \right) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2 \left(72 + \frac{6}{k} \right)}{k^2 \left(108 - \frac{1}{k^2} \right)} + 1 \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{72 + \frac{6}{k}}{108 - \frac{1}{k^2}} + 1 = \frac{72 + 0}{108 - 0} + 1 \\
 &= \frac{72}{108} + 1 = \frac{2 \cdot 36}{3 \cdot 36} + 1 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{2}{3} + \frac{3}{3} = \frac{5}{3}.
 \end{aligned}$$

Дакле, тачка $\frac{5}{3}$ је тачка нагомилавања низа (a_n) , јер се око ње гомилају чланови низа на позицијама које су дељиве са 6.

2° $n_k = 6k + 1$

Тада је

$$\begin{aligned}
 a_{n_k} &= a_{6k+1} = \frac{(1 + (-1)^{6k+1})(6k+1)^2 + 6k+1}{3(6k+1)^2 - 1} + \cos \frac{2 \cdot (6k+1)\pi}{3} \\
 &= \frac{(1 + (-1))(6k+1)^2 + 6k+1}{3 \cdot (36k^2 + 12k + 1) - 1} + \cos \left(\frac{2 \cdot (6k)\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) \\
 &= \frac{0 \cdot (6k+1)^2 + 6k+1}{108k^2 + 36k + 3 - 1} + \cos \left(4k\pi + \frac{2\pi}{3} \right) \\
 &= \frac{6k+1}{108k^2 + 36k + 2} + \cos \frac{2\pi}{3} = \frac{6k+1}{108k^2 + 36k + 2} - \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Гранична вредност овог подниза је

$$\begin{aligned}
 \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{6k+1}{108k^2 + 36k + 2} - \frac{1}{2} \right) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k \left(6 + \frac{1}{k} \right)}{k^2 \left(108 + \frac{36}{k} + \frac{2}{k^2} \right)} - \frac{1}{2} \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{1}{k}}{k \left(108 + \frac{36}{k} + \frac{2}{k^2} \right)} - \frac{1}{2} \\
 &= 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Дакле, тачка $-\frac{1}{2}$ је тачка нагомилавања низа (a_n) , јер се око ње гомилају чланови низа на позицијама које дају остатак 1 при дељењу са 6.

3° $n_k = 6k + 2$

Тада је

$$\begin{aligned}
a_{n_k} &= a_{6k+2} = \frac{(1 + (-1)^{6k+2})(6k+2)^2 + 6k+2}{3(6k+2)^2 - 1} + \cos \frac{2 \cdot (6k+2)\pi}{3} \\
&= \frac{(1+1)(6k+2)^2 + 6k+2}{3 \cdot (36k^2 + 24k + 4) - 1} + \cos \left(\frac{2 \cdot (6k)\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} \right) \\
&= \frac{2 \cdot (36k^2 + 24k + 4) + 6k+2}{108k^2 + 72k + 12 - 1} + \cos \left(4k\pi + \frac{4\pi}{3} \right) \\
&= \frac{72k^2 + 48k + 8 + 6k+2}{108k^2 + 72k + 11} + \cos \frac{4\pi}{3} = \frac{72k^2 + 54k + 10}{108k^2 + 72k + 11} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Гранична вредност овог поднiza је

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{72k^2 + 54k + 10}{108k^2 + 72k + 11} - \frac{1}{2} \right) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2 \left(72 + \frac{54}{k} + \frac{10}{k^2} \right)}{k^2 \left(108 + \frac{72}{k} + \frac{11}{k^2} \right)} - \frac{1}{2} \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{72 + \frac{54}{k} + \frac{10}{k^2}}{108 + \frac{72}{k} + \frac{11}{k^2}} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{72 + 0 + 0}{108 + 0 + 0} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{72}{108} - \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 36}{3 \cdot 36} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Дакле, тачка $\frac{1}{6}$ је тачка нагомилавања низа (a_n) , јер се око ње гомилају чланови низа на позицијама које дају остатак 2 при дељењу са 6.

4° $n_k = 6k + 3$

Тада је

$$\begin{aligned}
a_{n_k} &= a_{6k+3} = \frac{(1 + (-1)^{6k+3})(6k+3)^2 + 6k+3}{3(6k+3)^2 - 1} + \cos \frac{2 \cdot (6k+3)\pi}{3} \\
&= \frac{(1 + (-1))(6k+3)^2 + 6k+3}{3 \cdot (36k^2 + 36k + 9) - 1} + \cos \frac{2 \cdot 3(2k+1)\pi}{3} \\
&= \frac{0 \cdot (6k+3)^2 + 6k+3}{108k^2 + 108k + 27 - 1} + \cos(2(2k+1)\pi) \\
&= \frac{6k+3}{108k^2 + 108k + 26} + 1 = \frac{6k+3}{108k^2 + 108k + 25} + 1.
\end{aligned}$$

Гранична вредност овог подниза је

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{6k+3}{108k^2+108k+25} + 1 \right) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k \left(6 + \frac{3}{k} \right)}{k^2 \left(108 + \frac{108}{k} + \frac{26}{k^2} \right)} + 1 \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{1}{k}}{k \left(108 + \frac{108}{k} + \frac{26}{k^2} \right)} + 1 \\
&= 0 + 1 = 1.
\end{aligned}$$

Дакле, тачка 1 је тачка нагомилавања низа (a_n) , јер се око ње гомилају чланови низа на позицијама које дају остатак 3 при дељењу са 6.

5° $n_k = 6k + 4$

Тада је

$$\begin{aligned}
a_{n_k} &= a_{6k+4} = \frac{(1 + (-1)^{6k+4})(6k+2)^2 + 6k+4}{3(6k+4)^2 - 1} + \cos \frac{2 \cdot (6k+4)\pi}{3} \\
&= \frac{(1+1)(6k+2)^2 + 6k+4}{3 \cdot (36k^2 + 48k + 16) - 1} + \cos \frac{2 \cdot (6k+3+1)\pi}{3} \\
&= \frac{2 \cdot (36k^2 + 48k + 16) + 6k+4}{108k^2 + 144k + 48 - 1} + \cos \left(\frac{2(6k+3)\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) \\
&= \frac{72k^2 + 96k + 32 + 6k+4}{108k^2 + 144k + 47} + \cos \left(\frac{2 \cdot 3(2k+1)\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) \\
&= \frac{72k^2 + 102k + 36}{108k^2 + 144k + 47} + \cos \left(2 \cdot (2k+1)\pi + \frac{2\pi}{3} \right) \\
&= \frac{72k^2 + 102k + 36}{108k^2 + 144k + 47} + \cos \frac{2\pi}{3} = \frac{72k^2 + 102k + 36}{108k^2 + 144k + 47} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Гранична вредност овог подниза је

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{72k^2 + 102k + 36}{108k^2 + 144k + 47} - \frac{1}{2} \right) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2 \left(72 + \frac{102}{k} + \frac{36}{k^2} \right)}{k^2 \left(108 + \frac{144}{k} + \frac{47}{k^2} \right)} - \frac{1}{2} \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{72 + \frac{102}{k} + \frac{36}{k^2}}{108 + \frac{144}{k} + \frac{47}{k^2}} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{72 + 0 + 0}{108 + 0 + 0} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{72}{108} - \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 36}{3 \cdot 36} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Тачку $\frac{1}{6}$ смо већ добили као тачку нагомилавања низа (a_n) . Дакле, око тачке $\frac{1}{6}$ не гомилају се само чланови низа на позицијама које дају остатак

2 при дељењу са 6, већ и чланови низа на позицијама које дају остатак 4 при дељењу са 6.

6° $n_k = 6k + 5$

Тада је

$$\begin{aligned}
 a_{n_k} &= a_{6k+5} = \frac{(1 + (-1)^{6k+5})(6k+5)^2 + 6k+5}{3(6k+5)^2 - 1} + \cos \frac{2 \cdot (6k+5)\pi}{3} \\
 &= \frac{(1 + (-1))(6k+5)^2 + 6k+5}{3 \cdot (36k^2 + 60k + 25) - 1} + \cos \frac{2 \cdot (6k+3+2)\pi}{3} \\
 &= \frac{0 \cdot (6k+5)^2 + 6k+5}{108k^2 + 180k + 75 - 1} + \cos \left(\frac{2(6k+3)\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} \right) \\
 &= \frac{6k+5}{108k^2 + 180k + 74} + \cos \left(\frac{2 \cdot 3(2k+1)\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} \right) \\
 &= \frac{6k+5}{108k^2 + 180k + 74} + \cos \left(2(2k+1)\pi + \frac{4\pi}{3} \right) \\
 &= \frac{6k+5}{108k^2 + 180k + 74} + \cos \frac{4\pi}{3} = \frac{6k+5}{108k^2 + 180k + 74} - \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Гранична вредност овог подниза је

$$\begin{aligned}
 \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{6k+5}{108k^2 + 180k + 74} - \frac{1}{2} \right) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k \left(6 + \frac{5}{k} \right)}{k^2 \left(108 + \frac{180}{k} + \frac{74}{k^2} \right)} - \frac{1}{2} \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{5}{k}}{k \left(108 + \frac{180}{k} + \frac{74}{k^2} \right)} - \frac{1}{2} \\
 &= 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Тачку $\frac{1}{6}$ смо већ добили као тачку нагомилавања низа (a_n) . Дакле, око тачке $-\frac{1}{2}$ не гомилају се само чланови низа на позицијама које дају остатак 1 при дељењу са 6, већ и чланови низа на позицијама које дају остатак 5 при дељењу са 6.

Дакле, тачке нагомилавања низа (a_n) су $\frac{5}{3}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ и 1.

2.12. $a_n = \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^n + A \sin \frac{n\pi}{2}$. (а) Вредности $\sin \frac{n\pi}{2}$ се периодично пона-

вљају. Период је $\frac{2\pi}{2} = 4$. Дакле, $\sin \frac{n\pi}{2}$ узима вредности

$$\begin{aligned}\sin \frac{1\pi}{2} &= \sin \frac{\pi}{2} = 1, \\ \sin \frac{2\pi}{2} &= \sin \pi = 0, \\ \sin \frac{3\pi}{2} &= -1, \\ \sin \frac{4\pi}{2} &= \sin 2\pi = 0.\end{aligned}$$

Раздвојмо низ a_n на збир низова $b_n = \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^n$ и $c_n = A \sin \frac{n\pi}{2}$. Низ b_n је конвергентан, јер је

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2n+3}{2n+1} - 1\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2n+3}{2n+1} - \frac{2n+1}{2n+1}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{2n+1}{2}}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{2n+1}{2}}\right)^{n \cdot \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{2}{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{2n+1}{2}}\right)^{\frac{2n+1}{2}}\right)^{\frac{2n}{2n+1}} \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot 2}{n \cdot \left(\frac{2n+1}{2}\right)}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{2 + \frac{1}{n}}} = e^{\frac{2}{2+0}} = e^{\frac{2}{2}} = e^1 = e.\end{aligned}$$

То значи да било који његов подниз $(b_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ конвергира ка истој граничној вредности (јер је e једина тачка нагомилавања низа (b_n)). С друге стране, за низ $c_n = A \sin \frac{n\pi}{2}$ посматраћемо следеће поднизовете:

1° $n_k = 4k$

Тада је $c_{n_k} = c_{4k} = A \sin \frac{4k\pi}{2} = A \sin 2k\pi = 0$. Дакле, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} (b_{n_k} + c_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} b_{n_k} + \lim_{k \rightarrow \infty} c_{n_k} = e + 0 = e$, па је e тачка нагомилавања низа (a_n) и око ње се гомилају чланови тог низа на позицијама које су дељиве са 4.

2° $n_k = 4k + 1$

Тада је $c_{n_k} = c_{4k+1} = A \sin \frac{(4k+1)\pi}{2} = A \sin \left(\frac{4k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = A \sin \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = A \sin \frac{\pi}{2} = A$. Дакле, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} (b_{n_k} + c_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} b_{n_k} + \lim_{k \rightarrow \infty} c_{n_k} = e + A$, па је $e + A$ тачка нагомилавања низа (a_n) и око ње се гомилају чланови тог низа на позицијама које дају остатак 1 при дељењу са 4.

3° $n_k = 4k + 2$

Тада је $c_{n_k} = c_{4k+2} = A \sin \frac{(4k+2)\pi}{2} = A \sin \left(\frac{4k\pi}{2} + \frac{2\pi}{2} \right) = A \sin(2k\pi + \pi) = A \sin \pi = 0$. Дакле, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} (b_{n_k} + c_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} b_{n_k} + \lim_{k \rightarrow \infty} c_{n_k} = e + 0 = e$. Тачка e је већ тачка нагомилавања низа (a_n) . Дакле, око ње се не гомилају само чланови низа (a_n) на позицијама које су дељиве са 4, већ и чланови низа на позицијама које дају остатак 2 при дељењу са 4. Може се рећи да се око тачке 0 гомилају чланови низа (a_n) на позицијама које су дељиве са 2.

4° $n_k = 4k + 3$

Тада је $c_{n_k} = c_{4k+3} = A \sin \frac{(4k+3)\pi}{2} = A \sin \left(\frac{4k\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} \right) = A \sin \left(2k\pi + \frac{3\pi}{2} \right) = A \sin \frac{3\pi}{2} = -A$. Дакле, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} (b_{n_k} + c_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} b_{n_k} + \lim_{k \rightarrow \infty} c_{n_k} = e - A$, па је $e - A$ тачка нагомилавања низа (a_n) и око ње се гомилају чланови низа (a_n) на позицијама које дају остатак 3 при дељењу са 4. Дакле, тачке нагомилавања низа (a_n) су e , $e + A$ и $e - A$. (б) Да би низ (a_n) био конвергентан, он мора имати тачно једну тачку нагомилавања. То значи да мора бити $e = e + A = e - A$. Ово је могуће само ако је $A = 0$, што значи да је (a_n) конвергентан за $A = 0$.

3 Редови

Ако треба сабрати 2 броја a_1 и a_2 , то обично пишемо као $a_1 + a_2$. Некад желимо сабрати n бројева $a_1, a_2, \dots, a_n$. Тада можемо писати $a_1 + a_2 + \dots + a_n$, а можемо писати и $\sum_{i=1}^n a_i$. Овај израз читамо као суму (збир) бројева a_i када i иде од 1 до n . Заправо, променљива i представља бројач којим бројимо до ког сабирка смо дошли. Ово још можемо схватити као да имамо коначан низ бројева $a_1, a_2, \dots, a_n$ и да се променљива i креће по позицијама у том коначном низу и да у сваком следећем кораку додајемо следећи члан овог коначног низа.

Редови ће нам представљати бесконачне суме, односно сабираћемо бесконачно много елемената (све елементе неког (бесконачног) низа реалних бројева). Формална дефиниција је следећа.

Дефиниција 3.1. Нека је $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ реалних бројева. Формирајмо низ $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ где је $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$ збир првих n чланова тог низа. Тада је ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ гранична вредност низа (S_n) , односно гранична вредност низа зби-рова првих n чланова низа. Уколико постоји коначна гранична вредност $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, тада кажемо да ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира и да је S његова сума

(пишемо $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$). Уколико, пак, не постоји гранична вредност $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ или је она једнака $+\infty$ или $-\infty$, онда кажемо да ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира и у случају да је гранична вредност бесконачна пишемо $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, односно $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$.

3.1. (а) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$

По дефиницији је $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \left(\frac{2}{5}\right)^i$. Израчунајмо коначну суму $\sum_{i=0}^n \left(\frac{2}{5}\right)^i$. Из задатка 1.1. знамо да је $\sum_{i=0}^n x^i = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$, па специјално за $x = \frac{2}{5}$ важи да је $\sum_{i=0}^n \left(\frac{2}{5}\right)^i = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}-1}{\frac{2}{5}-1}$. Гранична вредност низа ових коначних сума је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}-1}{\frac{2}{5}-1} = \frac{0-1}{\frac{2}{5}-1} = \frac{-1}{-\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$. Према томе, ред $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ конвергира и његова сума је једнака $\frac{5}{3}$.

(б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)}$

По дефиницији је $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{3}{i(i+1)}$. Израчунајмо коначну суму $\sum_{i=1}^n \frac{3}{i(i+1)}$. Из задатка 1.1. је $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$. Према томе, $\sum_{i=1}^n \frac{3}{i(i+1)} = 3 \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{3n}{n+1}$ и гранична вредност овог низа је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot 3}{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{3}{1} = 3$. Следи да је $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)} = 3$.

3.2. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$

По дефиницији је $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n q^i$. Из задатка 1.1. знамо да је $\sum_{i=0}^n q^i = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$, ако је $q \neq 1$, односно $\sum_{i=0}^n 1^i = 1 + 1 + 1^2 + \cdots + 1^n = 1 + 1 + \cdots + 1 = n + 1$, ако је $q = 1$. Низ $\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$, $q \neq 1$, конвергира ако и само ако конвергира q^{n+1} , а то се дешава ако и само ако је $|q| < 1$. С друге стране, низ $n + 1$ дивергира. Следи да ред $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ конвергира ако и само ако је $|q| < 1$ и његова сума

је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{0-1}{q-1} = -\frac{1}{q-1} = \frac{1}{1-q}$.

Нека ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира и нека је његова сума $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Тада је $S_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ конвергентан низ и важи $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Тада је $a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) = S_n - S_{n-1}$, па је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0$. Према томе, ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира, онда мора бити $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. То значи да ако гранична вредност $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ није једнака 0 (било из разлога да низ (a_n) дивергира или да је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$), онда ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира. С друге стране, постоје редови $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ који дивергирају, а важи $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Специјално се издвајају редови $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ код којих је $a_n \geq 0$ за све $n \in \mathbb{N}$. Такви редови се зову редови с позитивним члановима. Да би се испитала њихова конвергенција, користе се следећи критеријуми:

- (1) Поредбени критеријум: Ако је $a_n \leq b_n$ за све $n \geq n_0$ и ред $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира, онда и ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира. Ако је $a_n \geq c_n$ за све $n \geq n_0$ и ред $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ дивергира, онда и ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира.
- (2) Критеријум еквиконвергенције: Ако је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = C > 0$ и $C \neq +\infty$, онда су редови $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ еквиконвергентни, што значи да или оба конвергирају, или оба дивергирају.
- (3) Кошијев критеријум: Нека је $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = a$. Ако важи $a > 1$, онда ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира. Ако важи $a < 1$, онда ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира. Ако важи $a = 1$, онда овај критеријум не даје одговор на питање да ли ред конвергира или дивергира.
- (4) Даламберов критеријум: Нека је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$. Ако важи $a > 1$, онда ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира. Ако важи $a < 1$, онда ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира. Ако важи $a = 1$, онда овај критеријум не даје одговор на питање да ли ред конвергира или дивергира.
- (5) Рабеов критеријум: Нека је $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = r$. Ако важи $r > 1$,

онда ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира. Ако важи $r < 1$, онда ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира. Ако важи $r = 1$, онда овај критеријум не даје одговор на питање да ли ред конвергира или дивергира.

Користи се као познато то да ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ конвергира ако је $p > 1$, односно да дивергира ако је $p \leq 1$. Такође, користи се као познато то да ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p (\ln n)^q}$ конвергира ако је $p > 1$ или је $p = 1$ и $q > 1$, а дивергира ако је $p = 1$ и $q \leq 1$ или је $p \leq 1$.

3.3. (а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n+1}$

Овај ред дивергира јер је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1-\frac{1}{n})}{n(1+\frac{1}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 1$, а неопходно да та гранична вредност буде једнака 0.

(б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

Приметимо да је израз под кореном степена 2, па се може рећи да је израз у имениоцу степена 1. Ово нас наводи на то да покушамо да докажемо да су дати ред и ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ еквиконвергентни. Како је

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}}{\frac{1}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n})}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1, \end{aligned}$$

следи да су редови $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ еквиконвергентни. Како ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ дивергира, следи да и ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ дивергира.

(в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

Овај ред дивергира, јер је то ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ чија је конвергенција позната.

Пошто је $\frac{1}{2} \leq 1$, следи да ред дивергира.

(г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^2+1}$

Како је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2(2+\frac{1}{n^2})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \neq 0$, следи да ред

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^2+1}$ дивергира.

$$(д) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

У задатку 2.4. (ђ) смо доказали да је $n! > 2^n$ за све $n \geq 4$ (користили смо принцип математичке индукције). Према томе $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ за све $n \geq 4$. Како ред $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ конвергира, на основу поредбеног критеријума следи да и ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ конвергира.

Конвергенцију можемо доказати и Даламберовим критеријумом. Нека је $a_n = \frac{1}{n!}$. Тада је

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)n!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0, \end{aligned}$$

па пошто је $0 < 1$, према Даламберовом критеријуму ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ конвергира.

$$(ђ) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

Нека је $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. Тада је

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((n+1)!)^2 (2n)!}{(2n+2)! (n!)^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((n+1)n!)^2 (2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!(n!)^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 (n!)^2}{2(n+1)(2n+1)(n!)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2(2n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{4n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n \left(4 + \frac{2}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{4 + \frac{2}{n}} = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

па пошто је $\frac{1}{4} < 1$, на основу Даламберовог критеријума ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ конвергира.

(е) домаћи

$$(ж) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n-1}\right)^{3n}$$

Нека је $a_n = \left(\frac{n}{2n-1}\right)^{3n}$. Тада је

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n-1}\right)^{3n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2n-1}\right)^3 \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1}\right)^3 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n(2 - \frac{1}{n})}\right)^3 \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 - \frac{1}{n}}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8},\end{aligned}$$

па пошто је $\frac{1}{8} < 1$, на основу Кошијевог критеријума ред $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n-1}\right)^{3n}$ конвергира.

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$$

Како је израз под кореном трећег степена, можемо сматрати да је именилац израз степена $\frac{3}{2}$, што нас наводи на то да покажемо да су дати ред и ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ еквиконвергентни. Како је

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n \cdot n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot n \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n^3 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{3}{2}} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right)}} = 1,\end{aligned}$$

слиди да су редови $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ еквиконвергентни. Пошто је

$\frac{3}{2} > 1$, слиди да ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ конвергира, па самим тим конвергира и ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}.$$

3.4. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{n+1}}$

Како је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{2^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{2^{n+1}}{n!}} = +\infty \neq 0$, јер је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{n!} = 0$ (доказали смо да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c^n}{n!} = 0$ за све $c > 0$), следи да ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{n+1}}$ дивергира (потребно је да важи $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ да би ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ уопште могао бити конвергентан).

(б) домаћи

(в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-2)}$

Нека је $a_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-2)}$. Тада је

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-2)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n-1}{n+1} - 1\right)^{n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n-1}{n+1} - \frac{n+1}{n+1}\right)^{n-2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{n+1}\right)^{n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-\frac{n+1}{2}}\right)^{n-2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-\frac{n+1}{2}}\right)^{(n-2) \cdot \left(-\frac{n+1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{n+1}\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{-\frac{n+1}{2}}\right)^{-\frac{n+1}{2}}\right)^{-(n-2) \cdot \frac{2}{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{2(n-2)}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{2n-4}{n+1}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{n(2-\frac{4}{n})}{n(1+\frac{1}{n})}} \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{2-\frac{4}{n}}{1+\frac{1}{n}}} = e^{-\frac{2}{1}} = e^{-2}, \end{aligned}$$

па пошто је $e^{-2} < 1$, према Кошијевом критеријуму ред $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-2)}$ конвергира.

(г) $\sum_{n=1}^{\infty} n^k q^n$, $0 < q < 1$, $k \in \mathbb{N}$

Нека је $a_n = n^k q^n$. Тада је

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^k q^{n+1}}{n^k q^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \cdot q^n \cdot q}{n^k q^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k q\right) = q, \end{aligned}$$

па пошто је $q < 1$, према Даламберовом критеријуму ред $\sum_{n=1}^{\infty} n^k q^n$ конвергира.

$$(д) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\dots(2+\sqrt{n})}$$

Нека је $a_n = \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\dots(2+\sqrt{n})}$. Тада је

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{(n+1)!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\dots(2+\sqrt{n})(2+\sqrt{n+1})}}{\frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\dots(2+\sqrt{n})}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n+1)n!}}{(2+\sqrt{n+1})\sqrt{n!}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{n+1})\sqrt{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\frac{2}{\sqrt{n+1}} + 1\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{2}{\sqrt{n+1}}} = 1, \end{aligned}$$

па Даламберов критеријум не даје одговор на питање да ли ред конвергира или дивергира. Како је

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{2}{\sqrt{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n}\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = +\infty, \end{aligned}$$

према Рабеовом критеријуму следи да ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\dots(2+\sqrt{n})}$ конвергира.

Сада ћемо размотрити конвергенцију редова $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где су неки a_n позитивни, а неки негативни. Наравно, неопходно је да бесконачно много њих буде позитивно и бесконачно много њих да буде негативно, јер ако их је нпр. само коначно много негативних, онда се за конвергенцију реда сви чланови a_n до позиције где је последњи негативни члан могу занемарити (као што се код тражења граничне вредности низа увек може занемарити првих n_0 чланова, где је n_0 било који природан број, јер сама гранична вредност зависи само од чланова на позицијама $n \geq n_0$). Најчешћи пример редова где има бесконачно много позитивних a_n и бесконачно много негативних a_n је алтернарајући ред. Код алтернарајућег

реда су чланови на парним позицијама једног знака, док су чланови на непарним позицијама супротног знака.

Дефиниција 3.2. Ред облика $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$, где је $b_n \geq 0$ за све n , зове се алтернирајући ред.

За ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ који има бесконачно много позитивних a_n и бесконачно много негативних a_n постоје појмови апсолутне и условне конвергенције. Те појмове прецизирамо следећим дефиницијама.

Дефиниција 3.3. За ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ кажемо да апсолутно конвергира ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ конвергира. У том случају и полазни ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира. С друге стране, ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ дивергира, а полазни ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира, кажемо да ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ условно конвергира.

Приликом испитивања конвергенције алтернирајућег реда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$, $b_n \geq 0$, користи се следећи критеријум. Ако је низ $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ опадајући и има граничну вредност једнаку нули, онда алтернирајући ред $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ конвергира.

Пример 3.1. Ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ условно конвергира. Заиста, можемо приметити да ред $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(-1)^n|}{|n|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ дивергира. С друге стране, полазни ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ конвергира, јер је низ $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ опадајући и његова гранична вредност је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Пример 3.2. Ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ апсолутно конвергира, јер се одмах добија да ред $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(-1)^n|}{|n^2|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ конвергира.

3.5. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

Наравно да то што ред није облика $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$, $b_n \geq 0$ него је облика $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$, $b_n \geq 0$. Дакле, прво проверавамо апсолутну конвергенцију. Како добијамо ред $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(-1)^{n-1}|}{|2n-1|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$, намеће се идеја да се искористи критеријум еквиконвергенције са редом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Добија се $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n(2-\frac{1}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$, односно да су редови $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ еквиконвергентни. Пошто ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ дивергира, онда дивергира и ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$, што значи да ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ не конвергира апсолутно.

Дакле, ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ или конвергира условно (ако конвергира, јер не конвергира апсолутно), или дивергира. Пошто је низ $b_n = \frac{1}{2n-1}$ опадајући, јер је $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2(n+1)-1} - \frac{1}{2n-1} = \frac{1}{2n+2-1} - \frac{1}{2n-1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} = \frac{2n-1}{(2n+1)(2n-1)} - \frac{2n-1}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{-2}{(2n)^2-1} = -\frac{2}{4n^2-1} < 0$, па је $b_{n+1} < b_n$, и пошто је $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1} = 0$, следи да ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ конвергира. Дакле, овај ред условно конвергира.

$$(б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

Овај ред апсолутно конвергира, јер ред $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(-1)^{n-1}|}{|n^2|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ конвергира.

$$(в) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$$

Испитајмо прво апсолутну конвергенцију овог реда. Добијамо ред $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n-1}| \frac{|2n+1|}{|n(n+1)|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)}$. У бројиоцу разломака $\frac{2n+1}{n(n+1)}$ имамо израз степена 1, а у имениоцу имамо израз степена 2. Ако скратимо и бројилац и именилац са n , добићемо израз коме је у бројиоцу највећи степен 0, а у имениоцу је 1, па очекујемо еквиконвергенцију тог реда и реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Како је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n+1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2n+1)}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2+\frac{1}{n})}{n(1+\frac{1}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 2$, следи да су редови $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ еквикон-

вергентни. Пошто ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ дивергира, следи да и ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)}$ дивергира, те ред $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$ не конвергира апсолутно.

Сад испитујемо да ли ред $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$ конвергира и ако конвергира, онда он условно конвергира, иначе дивергира. Нека је $b_n = \frac{2n+1}{n(n+1)}$. Овај низ је опадајући, јер је

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \frac{2(n+1)+1}{(n+1)(n+2)} - \frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{2n+2+1}{(n+1)(n+2)} - \frac{2n+1}{n(n+1)} \\ &= \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} - \frac{2n+1}{n(n+1)} \\ &= \frac{(2n+3)n}{n(n+1)(n+2)} - \frac{(2n+1)(n+2)}{n(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{2n^2+3n}{n(n+1)(n+2)} - \frac{2n^2+4n+n+2}{n(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{-2n-2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{-2(n+1)}{n(n+1)(n+2)} = -\frac{2}{n(n+2)} < 0. \end{aligned}$$

Такође, гранична вредност тог низа је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2+\frac{1}{n})}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{n+1} = 0$, према томе ред $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$ конвергира. Дакле, он условно конвергира.

(г) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} \frac{n}{2^n}$

Овај ред званично, по дефиницији, није алтернирајући, јер је потребно да буде $(-1)^n$ или $(-1)^{n-1}$ да би се ред сматрао алтернирајућим (суштина је у томе да су узастопни сабирци супротног знака). Међутим, сви исти критеријуми важе и у овом случају. Довољно је, заправо, да израз на који се степенује -1 бесконачно много пута узима парне и непарне вредности, јер ће се тада бесконачно пута јавити 1 и бесконачно пута ће се јавити и -1 . Израз $\frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ је паран за две узастопне вредности n , а затим је непаран за две узастопне вредности n и тако редом. Заиста, ако је $n = 4k$, онда је $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{4k(4k+1)}{2} = 2k(4k+1)$ паран. Ако је $n = 4k+1$, онда је $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(4k+1)(4k+2)}{2} = \frac{(4k+1)2(2k+1)}{2} = (4k+1)(2k+1)$ непаран. Ако је $n = 4k+2$, онда је $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(4k+2)(4k+3)}{2} = \frac{2(2k+1)(4k+3)}{2} = (2k+1)(4k+3)$ непаран. Коначно, ако је $n = 4k+3$, онда је $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(4k+3)(4k+4)}{2} = \frac{(4k+3)4(k+1)}{2} = 2(4k+3)(k+1)$ паран и циклус се понавља.

Испитајмо апсолутну конвергенцију. Како је

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} \frac{n}{2^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} \right| \frac{|n|}{|2^n|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n},$$

треба испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$. Означимо $b_n = \frac{n}{2^n}$. Како је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)2^n}{2^{n+1} \cdot n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1 + \frac{1}{n})}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2},$$

на основу Даламберовог критеријума ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ конвергира. Дакле, ред

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} \frac{n}{2^n}$ апсолутно конвергира.

$$(д) \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2n+1}{3n+1} \right)^n$$

Овај ред се може записати и у облику $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)^n$, што је алтернарајући ред, јер је $\left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)^n \geq 0$. Како је

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)^n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n| \left| \left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)^n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)^n,$$

за апсолутну конвергенцију треба испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)^n$.

Означимо $b_n = \left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)^n$. Како је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2 + \frac{1}{n})}{n(3 + \frac{1}{n})} = \frac{2}{3},$$

према Кошијевом критеријуму ред $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)^n$ конвергира. Према томе,

ред $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2n+1}{3n+1} \right)^n$ апсолутно конвергира.

4 Лимеси функција и непрекидност

Појам лимеса функције, односно граничне вредности функције, сличан је појму граничне вредности низа, али ипак има неких разлика. Посматрајмо функцију $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ и произвољну тачку $x_0 \in (a, b)$.

Дефиниција 4.1. Реалан број $y_0 \in \mathbb{R}$ је гранична вредност функције f када x тежи ка x_0 ако је за свако $\varepsilon > 0$ могуће пронаћи $\delta > 0$ такво да вредности функције f у тачкама x , различитим од x_0 , које су од тачке x_0 удаљене за мање од δ , припадају ε -околини тачке y_0 . Другим речима, δ треба да испуни својство да за све $x \in (a, b)$ такве да је $x \neq x_0$ и $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ важи $|f(x) - y_0| < \varepsilon$, односно $y_0 - \varepsilon < f(x) < y_0 + \varepsilon$. Тада пишемо да је $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$.

Примећујемо и сличности и разлике у односу на граничну вредност низа. Сличност је да колико год малу граничне вредности посматрали, у тој околини се морају наћи неке тачке $f(x)$ (као што се у околини граничне вредности низа морају наћи сви чланови низа почевши од неког). Разлика је у томе што код граничне вредности функције нема смисла говорити о свим члановима низа почевши од неког, али уместо тога захтевамо да у ту околину граничне вредности упадају све тачке $f(x)$ за x које у некој околини тачке x_0 , али се од ње разликују. Такође, нећемо говорити да функција конвергира, као што бисмо за низ рекли да конвергира.

Ова дефиниција покрива случај када је тачка x_0 којој x тежи коначна и када је гранична вредност коначна. Постоје, наравно, дефиниције и када су те тачке бесконачне. При томе, ако је тачка x_0 којој x тежи бесконачна, неопходно је да област дефинисаности буде облика $(a, +\infty)$, односно $(-\infty, b)$.

Дефиниција 4.2. (а) Бесконачна тачка $+\infty$ је гранична вредност функције f када x тежи ка x_0 ако је за свако $M > 0$ могуће пронаћи $\delta > 0$ такво да вредности функције f у тачкама x , различитим од x_0 , које су од тачке x_0 удаљене за мање од δ , припадају интервалу $(M, +\infty)$. Другим речима, δ треба да испуни својство да за све $x \in (a, b)$ такве да је $x \neq x_0$ и $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ важи $f(x) > M$. Тада пишемо да је $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.

(б) Бесконачна тачка $-\infty$ је гранична вредност функције f када x тежи ка x_0 ако је за свако $M > 0$ могуће пронаћи $\delta > 0$ такво да вредности функције f у тачкама x , различитим од x_0 , које су од тачке x_0 удаљене за мање од δ , припадају интервалу $(-\infty, -M)$. Другим речима, δ треба да испуни својство да за све $x \in (a, b)$ такве да је $x \neq x_0$ и $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ важи $f(x) < -M$. Тада пишемо да је $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

Дефиниција 4.3. (а) Реалан број $y_0 \in \mathbb{R}$ је гранична вредност функције $f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ када x тежи ка $+\infty$ ако је за свако $\varepsilon > 0$ могуће пронаћи b такво да вредности функције f у тачкама $x > b$ припадају ε -околини тачке y_0 . Другим речима, b треба да испуни својство да за све

$x \in (b, +\infty)$ важи $|f(x) - y_0| < \varepsilon$, односно $y_0 - \varepsilon < f(x) < y_0 + \varepsilon$. Тада пишемо да је $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$.

(б) Реалан број $y_0 \in \mathbb{R}$ је гранична вредност функције $f : (-\infty, b) \rightarrow \mathbb{R}$ када x тежи ка $-\infty$ ако је за свако $\varepsilon > 0$ могуће пронаћи a такво да вредности функције f у тачкама $x < a$ припадају ε -околини тачке y_0 . Другим речима, b треба да испуни својство да за све $x \in (-\infty, a)$ важи $|f(x) - y_0| < \varepsilon$, односно $y_0 - \varepsilon < f(x) < y_0 + \varepsilon$. Тада пишемо да је $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$.

Сасвим слично иде и дефиниција бесконачне граничне вредности када x тежи бесконачности. Све особине граничне вредности низова преносе се и на граничне вредности функција. Такође, важе иста својства као и код граничних вредности низова кад су у питању изрази с бесконачностима.

Такође, постоји појам леве и десне граничне вредности функције. Тај појам има смисла само када x тежи коначној тачки x_0 . Сличан појам не постоји код граничне вредности низа, јер ту увек n тежи (позитивној) бесконачности. Навешћемо дефиницију десне граничне вредности (коначне и једну од две бесконачне), док дефиниција леве граничне вредности иде слично. Наравно, ако функција има граничну вредност (коначну или бесконачну) у некој коначној тачки x_0 , онда је она уједно и лева и десна гранична вредност у тачки x_0 . Обратно, ако функција има леву и десну граничну вредност у некој коначној тачки x_0 , онда она има граничну вредност у тој тачки ако и само ако су лева и десна гранична вредност једнаке.

Дефиниција 4.4. (а) Реалан број $y_0 \in \mathbb{R}$ је десна гранична вредност функције f када x тежи ка x_0 , или гранична вредност функције f када x тежи ка x_0 здесна (с десне стране), ако је за свако $\varepsilon > 0$ могуће пронаћи $\delta > 0$ такво да вредности функције f у тачкама x , већим од x_0 , које су од тачке x_0 удаљене за мање од δ , припадају ε -околини тачке y_0 . Другим речима, δ треба да испуни својство да за све $x \in (a, b)$ такве да је $x_0 < x < x_0 + \delta$ важи $|f(x) - y_0| < \varepsilon$, односно $y_0 - \varepsilon < f(x) < y_0 + \varepsilon$. Тада пишемо да је $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = y_0$.

(б) Бесконачна тачка $+\infty$ је десна гранична вредност функције f када x тежи ка x_0 , или гранична вредност функције f када x тежи ка x_0 здесна (с десне стране), ако је за свако $M > 0$ могуће пронаћи $\delta > 0$ такво да вредности функције f у тачкама x , већим од x_0 , које су од тачке x_0 удаљене за мање од δ , припадају интервалу $(M, +\infty)$. Другим речима, δ треба да испуни својство да за све $x \in (a, b)$ такве да је $x_0 < x < x_0 + \delta$ важи $f(x) > M$. Тада пишемо да је $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = +\infty$.

4.1. (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+1}{3-x} = \frac{3}{2}$

Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Потребно је пронаћи $\delta > 0$ такво да за све $x \neq 1$ такве да је $1 - \delta < x < 1 + \delta$ важи $\left| \frac{2x+1}{3-x} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon$. Средимо последњи израз:

$$\begin{aligned} \left| \frac{2x+1}{3-x} - \frac{3}{2} \right| &< \varepsilon \\ \left| \frac{2(2x+1)}{2(3-x)} - \frac{3(3-x)}{2(3-x)} \right| &< \varepsilon \\ \left| \frac{4x+2}{2(3-x)} - \frac{9-3x}{2(3-x)} \right| &< \varepsilon \\ \left| \frac{4x+2-9+3x}{2(3-x)} \right| &< \varepsilon \\ \left| \frac{7x-7}{2(3-x)} \right| &< \varepsilon \\ \left| \frac{7(x-1)}{2(3-x)} \right| &< \varepsilon \\ \left| \frac{7}{2} \cdot \frac{x-1}{3-x} \right| &< \varepsilon \\ \frac{7}{2} \cdot \frac{|x-1|}{|3-x|} &< \varepsilon \\ |x-1| &< \frac{2\varepsilon}{7} \cdot |3-x| \end{aligned}$$

Можемо претпоставити да је $3-x > 0$, јер бирамо што је могуће мањи број $\delta > 0$, а x припада интервалу $(1-\delta, 1+\delta)$, те ће бити $x < 3$ ако је нпр. $\delta < 2$. Дакле,

$$\begin{aligned} |x-1| &< \frac{2\varepsilon}{7} \cdot (3-x) = \frac{6\varepsilon}{7} - \frac{2\varepsilon}{7} \cdot x \\ -\left(\frac{6\varepsilon}{7} - \frac{2\varepsilon}{7} \cdot x\right) &< x-1 < \frac{6\varepsilon}{7} - \frac{2\varepsilon}{7} \cdot x \\ -\frac{6\varepsilon}{7} + \frac{2\varepsilon}{7} \cdot x &< x-1 < \frac{6\varepsilon}{7} - \frac{2\varepsilon}{7} \cdot x \end{aligned}$$

Из прве неједначине добијамо $1 - \frac{6\varepsilon}{7} < \left(1 - \frac{2\varepsilon}{7}\right) x$, а из друге неједначине добијамо $\left(1 + \frac{2\varepsilon}{7}\right) x < 1 + \frac{6\varepsilon}{7}$. Углавном су нам од интереса мале вредности ε , па можемо претпоставити да је $\varepsilon < \frac{7}{2}$, тј. $1 - \frac{2\varepsilon}{7} > 0$. Одавде добијамо

да је $\frac{1-\frac{6\varepsilon}{7}}{1-\frac{2\varepsilon}{7}} < x < \frac{1+\frac{6\varepsilon}{7}}{1+\frac{2\varepsilon}{7}}$, односно да је

$$\frac{1 - \frac{2\varepsilon}{7} - \frac{4\varepsilon}{7}}{1 - \frac{2\varepsilon}{7}} < x < \frac{1 + \frac{2\varepsilon}{7} + \frac{4\varepsilon}{7}}{1 + \frac{2\varepsilon}{7}}$$

$$1 - \frac{\frac{4\varepsilon}{7}}{1 - \frac{2\varepsilon}{7}} < x < 1 + \frac{\frac{4\varepsilon}{7}}{1 + \frac{2\varepsilon}{7}},$$

што значи да за δ можемо одабрати било који позитиван број мањи од $\min \left\{ \frac{\frac{4\varepsilon}{7}}{1-\frac{2\varepsilon}{7}}, \frac{\frac{4\varepsilon}{7}}{1+\frac{2\varepsilon}{7}} \right\} = \frac{\frac{4\varepsilon}{7}}{1+\frac{2\varepsilon}{7}}$. Према томе, по дефиницији је $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+1}{3-x} = \frac{3}{2}$.

4.2. (а) $f(x) = \operatorname{sgn} x, x = 0$

Функција $f(x) = \operatorname{sgn} x$ дата је са $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } x > 0 \\ 0, & \text{ако је } x = 0. \\ -1, & \text{ако је } x < 0 \end{cases}$. Када

тражимо десну граничну вредност када x тежи 0, интересују нас само оне вредности x за које важи $0 < x < \delta$, па је $\lim_{x \rightarrow 0+} \operatorname{sgn} x = \lim_{x \rightarrow 0+} 1 = 1$, јер је $\operatorname{sgn} x = 1$ за све $x > 0$, а гранична вредност константне функције једнака је тој константи. С друге стране, када тражимо леву граничну вредност када x тежи 0, интересују нас само оне вредности x за које важи $-\delta < x < 0$, па је $\lim_{x \rightarrow 0-} \operatorname{sgn} x = \lim_{x \rightarrow 0-} -1 = -1$, јер је $\operatorname{sgn} x = -1$ за све $x < 0$, а гранична вредност константне функције једнака је тој константи. Из овога можемо закључити да функција $f(x) = \operatorname{sgn} x$ нема граничну вредност када x тежи 0, односно да не постоји $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn} x$.

4.4. (а) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

Приметимо да мора да буде $x \geq 0, a \geq 0, x-a \geq 0$ и $x^2 - a^2 > 0$. Дакле, мора бити $x \geq a \geq 0$ и $x^2 > a^2$, те је област дефинисаности $x > a$, при чему мора бити $a \geq 0$. Самим тим, гранична вредност која се тражи нема смисла, јер функција, чија се гранична вредност тражи, није дефинисана за $x < a$, а кад се не тражи лева, односно десна гранична вредност, очекује се да је $a - \delta < x < a + \delta$ и $x \neq a$. Уместо тога, претпоставићемо да се тражило да се израчуна гранична вредност $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$.

Раздвојмо тражену граничну вредност на збир граничних вредности $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} + \lim_{x \rightarrow a+} \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$. (надамо се да неће обе бити бесконачне, и то супротног знака). За прву граничну вредност применимо трик који је

виђен код граничних вредности низова:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow a+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \lim_{x \rightarrow a+} \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{(x-a)(x+a)}} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow a+} \frac{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{a})^2}{\sqrt{x-a}\sqrt{x+a} \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{a})} \\
&= \lim_{x \rightarrow a+} \frac{x-a}{\sqrt{x-a}\sqrt{x+a} \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{a})} \\
&= \lim_{x \rightarrow a+} \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a} \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{0}{\sqrt{2a} \cdot 2\sqrt{a}} = 0.
\end{aligned}$$

За другу граничну вредност добијамо

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow a+} \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} &= \lim_{x \rightarrow a+} \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{(x-a)(x+a)}} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-a}\sqrt{x+a}} \\
&= \lim_{x \rightarrow a+} \frac{1}{\sqrt{x+a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}.
\end{aligned}$$

Према томе, $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} = 0 + \frac{1}{\sqrt{2a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}$.

(б) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$

Применимо сличан трик као код низова и као у првој граничној вредности у претходном задатку.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2} &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt{9+2x}-5)(\sqrt{9+2x}+5)((\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} \cdot 2 + 2^2)}{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt{9+2x}+5)((\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} \cdot 2 + 2^2)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{((\sqrt{9+2x})^2 - 5^2)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{(\sqrt{9+2x}+5)((\sqrt[3]{x})^3 - 2^3)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(9+2x-25)((\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{(\sqrt{9+2x}+5)(x-8)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(2x-16)((\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{(\sqrt{9+2x}+5)(x-8)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{2(x-8)((\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{(\sqrt{9+2x}+5)(x-8)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{2((\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{\sqrt{9+2x}+5} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{2((\sqrt[3]{8})^2 + 2\sqrt[3]{8} + 4)}{\sqrt{9+2 \cdot 8}+5} \\
&= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{2((\sqrt[3]{8})^2 + 2\sqrt[3]{8} + 4)}{\sqrt{9+2 \cdot 8}+5} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{2(2^2 + 2 \cdot 2 + 4)}{\sqrt{9+16}+5} \\
&= \frac{2(4+4+4)}{\sqrt{25}+5} = \frac{2 \cdot 12}{5+5} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}
\end{aligned}$$

$$(в) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$$

Извлачењем x испред заграде у изразу под кореном у бројиоцу добијамо бројилац

$$\begin{aligned} \sqrt{x \left(1 + \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{x} \right)} &= \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x^2}}} = \sqrt{x} \sqrt{1 + \sqrt{\frac{x + \sqrt{x}}{x^2}}} \\ &= \sqrt{x} \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2}}} = \sqrt{x} \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}}} \end{aligned}$$

(Дозвољено је извући $\sqrt{x}$ јер x тежи ка $+\infty$, што значи посматрамо $x \in (b, +\infty)$, за неко b , те можемо слободно претпоставити да је $b > 0$, а самим тим и $x > 0$. Из истог разлога је $x = \sqrt{x^2}$.) Извлачењем x испред заграде у изразу под кореном у имениоцу добијамо именилац

$$\sqrt{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x}}.$$

Дакле, тражена гранична вредност је

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}}}}{\sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{0 + 0}}}{\sqrt{1 + 0}} = 1. \end{aligned}$$

$$(г) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$$

Користимо познату граничну вредност $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 0$. Добијамо да је

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin ax}{\sin bx} \cdot \frac{ax}{ax} \cdot \frac{bx}{bx} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin ax}{ax} \cdot \frac{bx}{\sin bx} \cdot \frac{ax}{bx} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin ax}{ax} \cdot \frac{1}{\frac{\sin bx}{bx}} \cdot \frac{ax}{bx} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin bx}{bx}} \cdot \frac{a}{b} = 1 \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \end{aligned}$$

$$(д) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$$

Користимо теорему о два полицајца (она важи и за граничне вредности функција). Како је $-1 \leq \sin x \leq 1$, следи да је $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$ за све $x > 0$ (сматрамо да је x позитивно, јер се тражи гранична вредност када $x \rightarrow +\infty$, што значи да се пострају x из неког интервала $(b, +\infty)$ и можемо сматрати да је $b > 0$). Пошто је $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, следи да је и

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

$$(ђ) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

Из тригонометрије је познато да важи $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$. Према томе,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{2 \cdot \frac{x^2}{4}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{2 \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$(е) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$$

Јако се добија да је

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

$$(ж) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{3}}{\operatorname{tg}^2 2x}$$

Користимо познату граничну вредност $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 0$, као и малопре израчунату граничну вредност $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} v}{v} = 0$. Добијамо да је

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{3}}{\operatorname{tg}^2 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2 \frac{x}{3}}{\operatorname{tg}^2 2x} \cdot \frac{\left(\frac{x}{3}\right)^2}{\left(\frac{x}{3}\right)^2} \cdot \frac{(2x)^2}{(2x)^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2 \frac{x}{3}}{\left(\frac{x}{3}\right)^2} \cdot \frac{(2x)^2}{\operatorname{tg}^2 2x} \cdot \frac{\left(\frac{x}{3}\right)^2}{(2x)^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{3}}{\frac{x}{3}} \right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x}{\operatorname{tg} 2x} \right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{x}{3}}{2x} \right)^2 \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{3}}{\frac{x}{3}} \right)^2 \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{tg} 2x} \right)^2 \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{6x} \right)^2 \\ &= 1^2 \cdot 1^2 \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6} \right)^2 = \left(\frac{1}{6} \right)^2 = \frac{1}{36}. \end{aligned}$$

4.5. (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x})$

Проблем на који наилазимо је тај што је у датом изразу умањеник трећи корен, а умањилац је квадратни корен. Самим тим, не можемо применити познати трик којим бисмо добили разломак у коме би бројилац био разлика квадрата, односно разлика трећих степена. Међутим, то не значи да не можемо решити задатак.

Изрази под коренима су позитивни када $x \rightarrow +\infty$, у смислу да када је $x > M$, односно $x \in (M, +\infty)$, за неко $M \in \mathbb{R}$, онда су изрази $x^3 + 3x^2$ и $x^2 - 2x$ позитивни. Најмањи заједнички садржалац (НЗС) степена 2 и 3 је 6. То значи да умањеник можемо видети као $\sqrt[6]{(x^3 + 3x^2)^2}$, јер је $\sqrt[6]{(x^3 + 3x^2)^2} = \sqrt[3]{\sqrt{(x^3 + 3x^2)^2}} = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2}$, а умањилац можемо видети као $\sqrt[6]{(x^2 - 2x)^3}$, јер је $\sqrt[6]{(x^2 - 2x)^3} = \sqrt{\sqrt[3]{(x^2 - 2x)^3}} = \sqrt{x^2 - 2x}$. Можемо извести, користећи познате једнакости, да је

$$\begin{aligned} a^6 - b^6 &= (a^2)^3 - (b^2)^3 = (a^2 - b^2)((a^2)^2 + a^2b^2 + (b^2)^2) \\ &= (a - b)(a + b)(a^4 + a^2b^2 + b^4). \end{aligned}$$

Означимо $a = \sqrt[6]{(x^3 + 3x^2)^2}$ и $b = \sqrt[6]{(x^2 - 2x)^3}$. Тада је

$$a - b = \frac{(a - b)(a + b)(a^4 + a^2b^2 + b^4)}{(a + b)(a^4 + a^2b^2 + b^4)} = \frac{a^6 - b^6}{(a + b)(a^4 + a^2b^2 + b^4)},$$

чиме постижемо да у бројиоцу добијамо изразе без корена, што је заправо трик који смо користили и раније, кад год се тражила гранична вредност разлике неких корена. Добијамо да је

$$\begin{aligned} a^6 - b^6 &= (\sqrt[6]{(x^3 + 3x^2)^2})^6 - (\sqrt[6]{(x^2 - 2x)^3})^6 = (x^3 + 3x^2)^2 - (x^2 - 2x)^3 \\ &= (x^3)^2 + 2 \cdot x^3 \cdot (3x^2) + (3x^2)^2 \\ &\quad - ((x^2)^3 - 3 \cdot (x^2)^2 \cdot (2x) + 3 \cdot x^2 \cdot (2x)^2 - (2x)^3) \\ &= x^6 + 6x^5 + 9x^4 - (x^6 - 6x^5 + 12x^4 - 8x^3) \\ &= 12x^5 - 3x^4 + 8x^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a + b &= \sqrt[6]{(x^3 + 3x^2)^2} + \sqrt[6]{(x^2 - 2x)^3} \\ &= \sqrt[6]{\left(x^3 \left(1 + \frac{3}{x}\right)\right)^2} + \sqrt[6]{\left(x^2 \left(1 - \frac{2}{x}\right)\right)^3} \\ &= \sqrt[6]{x^6 \left(1 + \frac{3}{x}\right)^2} + \sqrt[6]{x^6 \left(1 - \frac{2}{x}\right)^3} \\ &= x \sqrt[6]{\left(1 + \frac{3}{x}\right)^2} + x \sqrt[6]{\left(1 - \frac{2}{x}\right)^3} = x \sqrt[3]{1 + \frac{3}{x}} + x \sqrt[3]{1 - \frac{2}{x}}, \end{aligned}$$

па уз ознаке $c = \sqrt[3]{1 + \frac{3}{x}}$ и $d = \sqrt{1 - \frac{2}{x}}$, добијамо $a + b = x(c + d)$, као и

$$\begin{aligned} a^4 + a^2b^2 + b^4 &= (xc)^4 + (xc)^2(xd)^2 + (xd)^4 = x^4c^4 + x^2c^2 \cdot x^2d^2 + x^4d^4 \\ &= x^4(c^4 + c^2d^2 + d^4). \end{aligned}$$

Можемо приметити да у бројиоцу $(a^6 - b^6)$ можемо извући x^5 испред заграде, а да у имениоцу $((a + b)(a^4 + a^2b^2 + b^4))$ можемо испред заграде извући (из $a + b$) и x^4 (из $a^4 + a^2b^2 + b^4$), односно такође можемо извући x^5 . Дакле, можемо скратити и бројилац и именилац са x^5 . У бројиоцу ће онда остати $12 - \frac{3}{x} + \frac{8}{x^2}$, чија је гранична вредност када $x \rightarrow +\infty$ једнака 12, а у имениоцу ће остати $(c + d)(c^2 + cd + d^2)$, где је $c = \sqrt[3]{1 + \frac{3}{x}}$ и $d = \sqrt{1 - \frac{2}{x}}$. Како је $\lim_{x \rightarrow +\infty} c = \lim_{x \rightarrow +\infty} d = 1$, следи да је гранична вредност имениоца једнака $(1 + 1)(1^2 + 1 \cdot 1 + 1^2) = 2(1 + 1 + 1) = 2 \cdot 3 = 6$. Све заједно, следи да је $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x}) = \frac{12}{6} = 2$.

(б) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^x}{x - a}$

За решавање овог задатка користићемо познате граничне вредности $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{(1+u)^\alpha - 1}{u} = \alpha$ и $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{a^v - 1}{v} = \ln a$ из задатка 4.3. Добијамо да је

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^x}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^a + a^a - a^x}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^a \left(\frac{x^a}{a^a} - 1 \right) - a^a \left(-1 + \frac{a^x}{a^a} \right)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^a \left(\left(\frac{x}{a} \right)^a - 1 \right) - a^a (a^{x-a} - 1)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^a \left(\left(1 + \left(\frac{x}{a} - 1 \right) \right)^a - 1 \right)}{x - a} - \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^a (a^{x-a} - 1)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^a \left(\left(1 + \left(\frac{x}{a} - 1 \right) \right)^a - 1 \right)}{a \left(\frac{x}{a} - 1 \right)} - a^a \ln a \\ &= \frac{a^a \cdot a}{a} - a^a \ln a = a^a (1 - \ln a) \end{aligned}$$

(када $x \rightarrow a$, онда $u = \frac{x}{a} - 1 \rightarrow 0$ и $v = x - a \rightarrow 0$, што објашњава како се добијају последње 3 једнакости).

(в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{x}$

Користимо познату граничну вредност $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$ из задатка 4.3:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 + 1 - e^{-2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 - (e^{-2x} - 1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(e^{2x} - 1)}{2x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2(e^{-2x} - 1)}{-2x} \\ &= 2 \cdot 1 - (-2) \cdot 1 = 2 + 2 = 4. \end{aligned}$$

$$(г) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x(x+2)} - x \right)$$

Применимо познати трик. Добијамо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x(x+2)} - x \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(\sqrt{x(x+2)} - x \right) \cdot \frac{\sqrt{x(x+2)} + x}{\sqrt{x(x+2)} + x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{x(x+2)} \right)^2 - x^2}{\sqrt{x(x+2)} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x+2) - x^2}{\sqrt{x \cdot x \left(1 + \frac{2}{x} \right)} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} \right)} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x \sqrt{1 + \frac{2}{x}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1 \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1} = \frac{2}{1 + 1} = \frac{2}{2} = 1. \end{aligned}$$

$$(д) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2} \right)^{x^2}$$

Користимо познату граничну вредност $\lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{u} \right)^u = e$. Добијамо:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2} \right)^{x^2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2} - 1 \right)^{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2} - \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 3x + 2} \right)^{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x + 1}{x^2 - 3x + 2} \right)^{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}} \right)^{x^2 \cdot \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} \cdot \frac{x + 1}{x^2 - 3x + 2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}} \right)^{\frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}} \right)^{\frac{x^2(x+1)}{x^2 - 3x + 2}}. \end{aligned}$$

Гранична вредност у највећој загради је e , те добијамо да је полазна

гранична вредност једнака

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x^2(x+1)}{x^2(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2})}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x+1}{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}} = +\infty.$$

(ђ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$

Користимо познату граничну вредност $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ из задатка 4.3, као и граничну вредност $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ из задатка 4.4. Добијамо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos x} - \frac{\cos x}{\cos x}}{x^2} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 \cos x} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(е) $\lim_{x \rightarrow 1} \left((1-x) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} x \right) \right)$

Како је $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} x = +\infty$ и $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} x = -\infty$, следи да је тражена гранична вредност облика $0 \cdot \infty$, што значи да се мора одредити неким другим поступком.

Приметимо да је $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} x \right) = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} x \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{2} x \right)} = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} x \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} x \right)} = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} x \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} (1-x) \right)}$, при чему смо користили тригонометријску једнакост $\cos u = \sin \left(\frac{\pi}{2} - u \right)$. Сада ћемо искористити познату граничну вредност $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$. Добијамо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left((1-x) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} x \right) \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left((1-x) \cdot \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} x \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} (1-x) \right)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \sin \left(\frac{\pi}{2} x \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\sin \left(\frac{\pi}{2} (1-x) \right)} \\ &= 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} (1-x) \right)}{\frac{\pi}{2} (1-x)} \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1 \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

(ж) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

Ова гранична вредност је облика 1^∞ , што значи да је треба свести на познату граничну вредност $\lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = e$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + (\cos x - 1))^{\frac{1}{x^2} \cdot \frac{\cos x - 1}{\cos x - 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left((1 + (\cos x - 1))^{\frac{1}{\cos x - 1}} \right)^{\frac{\cos x - 1}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1 - \cos x}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

4.6. (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right)$

Из особина логаритма знамо да је $\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$.
Користимо познату граничну вредност $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$. Добијамо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2x} \ln \left(1 + \frac{1+x}{1-x} - 1 \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2x} \ln \left(1 + \frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1-x} \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2x} \ln \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right)}{\frac{2x}{1-x} \cdot (1-x)} \\ &= \frac{1}{1-0} = \frac{1}{1} = 1. \end{aligned}$$

(б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^{-x}}{\sin x}$

Користимо познате граничне вредности $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u-1}{u} = 1$ и $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\sin v}{v} = 1$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^{-x}}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{e^{-x}-1}{\sin x} \cdot \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{e^{-x}-1}{x} \cdot \frac{x}{\sin x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x}-1}{-x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

(в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1-\sqrt{x}}$

Користимо особину из тригонометрије да је $\cos u = \sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)$, а затим и познате граничне вредности $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$ и $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+v}-1}{v} = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{(1+v)^{\frac{1}{2}}-1}{v} = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1-\sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}x\right)}{1-\sqrt{1+(x-1)}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)}{-\left(\sqrt{1+(x-1)}-1\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)}{\frac{\pi}{2}(1-x)} \cdot \frac{\frac{\pi}{2}(1-x)}{-\left(\sqrt{1+(x-1)}-1\right)} \right) \\ &= 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\sqrt{1+(x-1)}-1}{x-1}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{2}} = \pi. \end{aligned}$$

$$(\Gamma) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}$$

Једноставном заменом $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ добијамо да бројилац овог разломка тежи ка $2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - 1 = 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$ и да именилац тежи ка $2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 1 = -1 + 1 = 0$. Дакле, у питању је гранична вредност типа $\frac{0}{0}$, што значи да се мора решити неким другим поступком.

Приметимо да су и бројилац и именилац квадратне функције по $\sin x$. Означимо ли $\sin x = t$, добијамо да је бројилац једнак $2t^2 + t - 1$ и да је именилац једнак $2t^2 - 3t + 1$. Решења одговарајућих квадратних једначина $2t^2 + t - 1 = 0$ и $2t^2 - 3t + 1 = 0$ добијамо из формуле $t_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ за квадратну једначину $at^2 + bt + c = 0$. Дакле, решења прве квадратне једначине су $t_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$, односно $t_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ и $t_2 = \frac{-1-3}{4} = \frac{-4}{4} = -1$, а решења друге квадратне једначине су $t_{1/2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4}$, односно $t_1 = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1$ и $t_2 = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Такође, познато је да ако су t_1 и t_2 решења квадратне једначине $at^2 + bt + c = 0$, онда је $at^2 + bt + c = a(t - t_1)(t - t_2)$. Дакле, $2t^2 + t - 1 = 2(t - \frac{1}{2})(t - (-1))$ и $2t^2 - 3t + 1 = 2(t - 1)(t - \frac{1}{2})$. Ако вратимо $t = \sin x$, добијамо да је

$$\frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1} = \frac{2 \left(\sin x - \frac{1}{2}\right) (\sin x + 1)}{2(\sin x - 1) \left(\sin x - \frac{1}{2}\right)} = \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1},$$

што значи да је тражена гранична вредност

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} = -3.$$

$$(\Delta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{16+x^2}-4}$$

Користимо познату граничну вредност $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+u}-1}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(1+u)^{\frac{1}{2}}-1}{u} = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{16+x^2}-4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{16\left(1+\frac{x^2}{16}\right)}-4} \cdot \frac{x^2}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4\left(\sqrt{1+\frac{x^2}{16}}-1\right)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{16}} = \frac{1}{\frac{4}{16}} = \frac{16}{4} = 4. \end{aligned}$$

До сад смо разматрали појам граничне вредности функције. Примећивали смо да смо, ако немамо проблематичне изразе (типа $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 1^∞ и сл), или проблематичне функције (нпр. функцију $f(x) = \operatorname{sgn} x$), граничне вредности углавном добијали заменом вредности x_0 којој тежи x (у случају да је коначна) и добијали вредност $f(x_0)$. Дакле, то би заправо значило да је, у тим случајевима, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Појам граничне вредности и појам непрекидности функције у тачки x_0 су у тесној вези.

Дефиниција 4.5. Нека је $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ и нека је $x_0 \in (a, b)$. Кажемо да је f непрекидна у тачки x_0 уколико је за свако $\varepsilon > 0$ могуће пронаћи $\delta > 0$ такво да за све $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (укључујући и x_0) важи да је $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Разлика у односу на дефиницију граничне вредности види се у томе да се код граничне вредности инсистирало на томе да се $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ разликује од x_0 , а гранична вредност је била неки реалан број y_0 , а не $f(x_0)$ као у овој дефиницији. Међутим, веома једноставно можемо установити да, шта год било $\varepsilon > 0$, важи да је $|f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$, па се непрекидност функције f у тачки $x_0 \in (a, b)$ своди на то да треба да буде испуњен услов $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Графички, непрекидност функције f у тачку $x_0 \in (a, b)$ значи да у некој околини тачке $(x_0, f(x_0))$ на графику, график функције нема прекид, односно могуће га је нацртати без подизања оловке са папира.

Дефиниција 4.6. Нека је $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$. Ако је f непрекидна у свакој тачки $x \in (a, b)$, онда је f непрекидна на (a, b) .

Дакле, уколико је функција f непрекидна на (a, b) , онда је цео њен график могуће нацртати без подизања оловке са папира. Битно је напоменути да овакав интуитивни начин схватања појма непрекидности захтева да функција буде дефинисана на интервалу (a, b) , а не на, рецимо, $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Функција $f(x) = \frac{1}{x}$, која је дефинисана на таквом домену, нема график који је могуће нацртати без подизања оловке са папира, али разлог томе не лежи у прекидности функције, већ у томе што домен (скуп $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$) није повезан (има рупу у тачки $x = 0$). Међутим, функција $f(x) = \frac{1}{x}$ је непрекидна у свакој тачки $x_0 \neq 0$, па се сматра непрекидном на свом домену, тј. на скупу $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Функције које најчешће користимо у овом курсу јесу непрекидне. Такве су функције $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, за $x \neq 0$, $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, за $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, за $x > 0$, $f(x) = \sin x$, за $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$, за $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$ за $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$ за $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $f(x) = \arcsin x$, за $x \in [-1, 1]$, $f(x) = \arccos x$, за

$x \in [-1, 1]$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$, за $x \in \mathbb{R}$ и $f(x) = \operatorname{arccotg} x$, за $x \in \mathbb{R}$. Такође, ако су $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидне, онда су и $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ непрекидне (последња у тачкама у којима је дефинисана, а то су они $x \in (a, b)$ такви да је $g(x) \neq 0$). Такође, ако су $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$ и $g : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидне, онда је и $g \circ f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, дата са $g \circ f(x) = g(f(x))$ (композиција функција), непрекидна.

Дефиниција 4.7. Нека је $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ и $x_0 \in (a, b)$. Ако постоји коначна гранична вредност $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, која се разликује од $f(x_0)$, кажемо да је тачка $x = x_0$ отклоњив прекид функције f (отклоњив је, јер је довољно променити функцију f тако да вредност $f(x_0)$ буде једнака добијеној граничној вредности и добиће се функција која је непрекидна у тачки $x = x_0$). Ако постоје лева и десна гранична вредност $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ које су коначне, али различите (и онда не постоји гранична вредност $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$), онда кажемо да је тачка $x = x_0$ тачка прекида прве врсте. У свим осталим случајевима (не постоји нека од леве или десне граничне вредности или је бар једна од њих бесконачна) кажемо да је тачка $x = x_0$ тачка прекида друге врсте.

4.7. (a) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

Домен ове функције је $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Према томе, тачка $x = 0$ у којој је тражи испитивање непрекидности, не припада домену. Како се по дефиницији непрекидност проверава искључиво у тачкама домена (јер је неопходно проверити да ли је гранична вредност која се добија једнака вредности функције у датој тачки, а вредност $f(0)$ није дефинисана), следи да није могуће испитати тражену непрекидност.

(б) $f(x) = \operatorname{sgn} x$

Домен ове функције је $\mathbb{R}$, према томе, има смисла испитивати непрекидност функције у тачки $x = 0$. Како је у задатку 4.2. под (а) урађено да је $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1$ и $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -1$, следи да не постоји гранична вредност $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Самим тим, она није једнака $f(0) = 0$, те закључујемо да функција f има прекид у тачки $x = 0$.

(в) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Домен ове функције је $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Према томе, тачка $x = 0$ у којој је тражи испитивање непрекидности, не припада домену. Како се по дефиницији непрекидност проверава искључиво у тачкама домена (јер је неопходно проверити да ли је гранична вредност која се добија једнака вредности функције у датој тачки, а вредност $f(0)$ није дефинисана), следи да није могуће испитати тражену непрекидност.

(г) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

Домен ове функције је $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Према томе, тачка $x = 0$ у којој је тражи испитивање непрекидности, не припада домену. Како се по дефиницији непрекидност проверава искључиво у тачкама домена (јер је неопходно проверити да ли је гранична вредност која се добија једнака вредности функције у датој тачки, а вредност $f(0)$ није дефинисана), следи да није могуће испитати тражену непрекидност.

$$4.8. \text{ (a) } f(x) = \begin{cases} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}, & x \notin \{-1, 0, 1\} \\ 0, & x \in \{-1, 0, 1\} \end{cases}$$

Функција f је непрекидна у свакој тачки $x \in (-\infty, -1)$, јер се добија од непрекидних функција $(\frac{1}{x}, \frac{1}{x-1}, \frac{1}{x+1})$ комбинацијом операција одузимања и дељења. Слично важи и за све тачке $x \in (-1, 0)$, $x \in (0, 1)$ и $x \in (1, +\infty)$. Остаје да се испита непрекидност у тачкама $x = -1$, $x = 0$ и $x = 1$.

Израчунајмо граничну вредност $f(x)$ када x тежи -1 . Пошто је $f(x) = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}$ за све $x \in (-1 - \delta, -1 + \delta)$ различите од -1 ($\delta > 0$ можемо узети тако да је $0 < \delta < 1$), следи да је

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{x+1}{x(x+1)} - \frac{x}{x(x+1)}}{\frac{x}{x(x-1)} - \frac{x-1}{x(x-1)}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{1}{x(x+1)}}{\frac{1}{x(x-1)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{x+1}. \end{aligned}$$

Ова гранична вредност не постоји. Заиста, лева гранична вредност је $\lim_{x \rightarrow -1-} \frac{x-1}{x+1} = +\infty$ (бројилац тежи ка -2 , па је негативан околини тачке $x = -1$, а и именилац је негативан у левој околини тачке -1 , јер тежи ка 0 с леве стране), док је десна гранична вредност једнака $\lim_{x \rightarrow -1+} \frac{x-1}{x+1} = -\infty$ (бројилац је и даље негативан, али је именилац позитиван у десној околини тачке $x = -1$, јер тежи ка 0 с десне стране). Дакле, тачка $x = -1$ је тачка прекида, а пошто је бар једна од леве, односно десне граничне вредности, бесконачна, у питању је прекид друге врсте.

Израчунајмо сад граничну вредност $f(x)$ кад x тежи ка 0 . Поново имамо да је $f(x) = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}$ за све $x \in (-\delta, \delta)$ различите од 0 (узмемо нпр. да је $0 < \delta < 1$), па је

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x+1} = \frac{0-1}{0+1} = \frac{-1}{1} = -1.$$

Пошто је $f(0) = 0$, следи да функција f има прекид у тачки $x = 0$. С обзиром на то да гранична вредност постоји и да је коначна, у питању је отклоњив прекид.

Коначно, израчунајмо граничну вредност $f(x)$ када x тежи ка 1. Поново имамо да је $f(x) = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}$ за све $x \in (1 - \delta, 1 + \delta)$ различите од 1 (поново узмемо нпр. да је $0 < \delta < 1$), па је

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+1} = \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0.$$

Пошто је $f(1) = 0$, следи да је функција f непрекидна у тачки $x = 1$.

(б) домаћи

$$(в) f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2}, & x < 0 \\ \frac{x^2-4}{x-2}, & 0 \leq x < 2 \\ \sqrt{x^2+5}-3, & x \geq 2 \end{cases}$$

Функција $\frac{1-\cos x}{x^2}$ је непрекидна у свакој тачки свог домена, тј. на скупу $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, јер је добијена од непрекидних функција комбинацијом операција одузимања и дељења. Према томе, и функција f је непрекидна на интервалу $(-\infty, 0)$, јер се на том интервалу ове две функције поклапају. Исто тако је непрекидна и функција $\frac{x^2-4}{x-2}$ на свом домену $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$, па је непрекидна и функција f на интервалу $(0, 2)$ у коме се поклапа са том функцијом (обратити пажњу на то да иако се поклапају и у тачки $x = 0$, не можемо тврдити непрекидност у тој тачки, јер се f другачије понаша с леве стране те тачке у односу на функцију $\frac{x^2-4}{x-2}$). Коначно, функција $\sqrt{x^2+5}-3$ је непрекидна на $\mathbb{R}$, па следи да је и f непрекидна на $(2, +\infty)$ (обратити пажњу, као малопре, да иако се поклапају у тачки $x = 2$, не можемо одмах тврдити да је f непрекидна у тој тачки, јер је њено понашање с леве стране те тачке другачије од понашања функције $\sqrt{x^2+5}-3$). Остaje, дакле, да се испита непрекидност функције f у тачкама $x = 0$ и $x = 2$.

С обзиром на то да се f другачије понаша с леве и с десне стране тачке $x = 0$, потражимо одвојено леву и десну граничну вредност.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}; \\ \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{-4}{-2} = 2 \end{aligned}$$

Дакле, не постоји гранична вредност $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ јер се разликују лева и десна гранична вредност. Пошто су оне коначне, следи да је у питању прекид прве врсте.

Слично као малопре, потражимо одвојено леву и десну граничну

вредност у тачки $x = 2$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x + 2) = 4; \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (\sqrt{x^2 + 5} - 3) = \sqrt{2^2 + 5} - 3 = \sqrt{9} - 3 = 3 - 3 = 0\end{aligned}$$

Дакле, не постоји гранична вредност $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ јер се лева и десна гранична вредност разликују, а пошто су обе коначне, следи да је у питању прекид прве врсте.

$$(\Gamma) f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Функција $\frac{e^x - 1}{x}$ је непрекидна у свакој тачки свог домена, тј. на скупу $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, јер је добијена од непрекидних функција операцијама одузимања и дељења. Потребно је, дакле, испитати непрекидност функције у тачки $x = 0$. Како је $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ за све $x \neq 0$, следи да је

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

па пошто је $f(0) = 1$, следи да је f непрекидна у свим тачкама свог домена. Дакле, f је непрекидна на $\mathbb{R}$.

$$(\Delta) f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Функција $\frac{\ln(1+x)}{x}$ је дефинисана на скупу $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$ (због логаритма је $1 + x > 0$, тј. $x > -1$ и $x \neq 0$) и непрекидна је у свакој тачки свог домена, јер је добијена од непрекидних функција операцијом дељења. Потребно је, дакле, испитати непрекидност функције f у тачки $x = 0$. Како је $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ за све $x \in (-\delta, \delta)$ различите од 0 (ако је $0 < \delta < 1$, да би $\ln(1+x)$ било дефинисано), следи да је

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

па пошто је $f(0) = 0$, следи да f има прекид у тачки $x = 0$. Тај прекид је откљонив, јер постоји коначна гранична вредност $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

$$(\text{Ђ}) f(x) = \begin{cases} \cos x + \sqrt{2}, & x \leq 0 \\ \frac{(1+x)^{\sqrt{2}-1}}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

Функција $\cos x + \sqrt{2}$ је непрекидна на свом домену $\mathbb{R}$, па је непрекидна и на $(-\infty, 0)$. Такође, функција $\frac{(1+x)^{\sqrt{2}-1}}{x}$ је непрекидна на $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$ (за домен мора бити испуњен услов $1 + x \geq 0$, тј. $x \geq -1$, као

и $x \neq 0$), па је непрекидна и на $(0, +\infty)$. Остаје, дакле, испитати непрекидност функције f у тачки $x = 0$.

Пошто се f другачије понаша с леве и с десне стране тачке $x = 0$, израчунајмо посебно леву и десну граничну вредност:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} (\cos x + \sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2}, \\ \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(1+x)^{\sqrt{2}} - 1}{x} = \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Дакле, лева и десна гранична вредност су коначне и различите, па је тачка $x = 0$ тачка прекида прве врсте.

$$(e) \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0 \end{cases}$$

Константа функција 0 (свакој тачки x додељује вредност 0) јесте непрекидна на $\mathbb{R}$, па је непрекидна и на $(-\infty, 0)$. Такође, функција $e^{-\frac{1}{x^2}}$ је непрекидна на свом домену $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, као композиција непрекидне функције $-\frac{1}{x^2}$ и непрекидне експоненцијалне функције, па је непрекидна и на $(0, +\infty)$. Дакле, остаје да се испита непрекидност функције f у тачки $x = 0$.

Очигледно је $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} 0 = 0$, те остаје само израчунати десну граничну вредност. Како је

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0$$

(јер $\frac{1}{x^2}$ тежи ка $+\infty$, па онда и $e^{\frac{1}{x^2}}$ тежи ка $+\infty$), следи да је $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$, па је f непрекидна у тачки $x = 0$.

$$4.9. \quad (a) \quad g(x) = \begin{cases} \frac{(1+x)^3 - 1}{x}, & x \neq 0 \\ A, & x = 0 \end{cases}$$

Функција $\frac{(1+x)^3 - 1}{x}$ је непрекидна на свом домену $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, јер се добија компоновањем познатих функција, које су непрекидне, па је и g непрекидна на $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Да би g била непрекидна на свом домену, потребно одредити вредност непознате A тако да g буде непрекидна у тачки $x = 0$. Како је $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - 1}{x} = 3$, следи да мора бити $A = g(0) = 3$.

(б) $g(x) = \begin{cases} \frac{e^x - e^{-x}}{x}, & x \neq 0 \\ A, & x = 0 \end{cases}$ Функција $\frac{(1+x)^3 - 1}{x}$ је непрекидна на свом домену $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, јер се добија компоновањем познатих функција,

које су непрекидне, па је и g непрекидна на $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Да би g била непрекидна на свом домену, потребно одредити вредност непознате A тако да g буде непрекидна у тачки $x = 0$. Како је

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + 1 - e^{-x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - (e^{-x} - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x} \\ &= 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{-x} = 1 + 1 = 2,\end{aligned}$$

следи да мора бити $A = g(0) = 2$.

$$(в) \quad g(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x}, & x \neq 0 \\ A, & x = 0 \end{cases}$$

Домен функције $\frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x}$ је скуп оних $x \in \mathbb{R}$ таквих да је $1+x > 0$, $1-x > 0$ и $x \neq 0$. Дакле, $x > -1$, $x < 1$ и $x \neq 0$, односно домен је $(-1, 0) \cup (0, 1)$. Функција $\frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x}$ је непрекидна на $(-1, 0) \cup (0, 1)$, као композиција познатих непрекидних функција, па је и g непрекидна на $(-1, 0) \cup (0, 1)$. Остаје још да се пронађе непозната A тако да g буде непрекидна у тачки $x = 0$. Како је

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x} \\ &= 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{-x} = 1 + 1 = 2,\end{aligned}$$

следи да мора бити $A = g(0) = 2$.

5 Извод функције

Појам извода функције веома је важан, не само у математици, него и у физици, техници и сличним дисциплинама. Најједноставнији пример је брзина. Сви знамо да је просечна (средња) брзина кретања на неком путу дужине s које је трајало од тренутка t_1 до тренутка t_2 (тада је протекло време $t = t_2 - t_1$) једнака $v = \frac{s}{t} = \frac{s}{t_2 - t_1}$. Међутим, из свакодневног живота знамо да, поред просечне брзине, постоји и тренутна брзина. То би одговарало путу s који се пређе од тренутка t_1 до истог тренутка ($t_2 = t_1$), па је протекло време $t = t_2 - t_1 = t_1 - t_1 = 0$? Знамо да дељење нулом није могуће, а опет, схватамо да тренутна брзина као појам у потпуности има смисла. Како ћемо решити тај проблем? Замислићемо да је ипак прошло неко време, тј. да је $t_2 > t_1$, па ћемо посматрати

просечну брзину на том интервалу (означићемо га са $\Delta t = t_2 - t_1$). Тада је пређени пут неко Δs и просечна брзина је $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Да бисмо добили тренутну брзину, односно брзину у тренутку $t = t_1$, посматраћемо тренутке $t_2 > t_1$ који су све ближи тренутку t_1 , али су ипак и даље каснији од њега. Требало би да приметимо да је тај поступак заправо тражење десне граничне вредности, односно је то $\lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Наравно, нема разлога да се тражи само десна гранична вредност, већ је сасвим оправдано тражити да гледамо и пређени пут од тренутка $t_2 < t_1$ до тренутка $t = t_1$. Тиме разлика $\Delta t = t_2 - t_1$ може бити и негативна, па брзина у тренутку t постаје гранична вредност $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Наравно, можемо рећи да је пређени пут s заправо функција која зависи од t , и онда је, заправо, $\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$. Ако означимо $t = t_1$ и $\Delta t = t_2 - t_1$, онда је $t_2 = t + \Delta t$, па добијамо да је брзина у тренутку t једнака $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$. Добијени израз представља извод функције пређеног пута s у тренутку t . Ово се уопштава на било коју функцију $f(x)$, и то следећом дефиницијом.

Дефиниција 5.1. Нека је $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ и нека је $x_0 \in (a, b)$ произвољна. Извод функције f у тачки x_0 , у ознаци $f'(x_0)$, јесте гранична вредност $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Уколико ова гранична вредност постоји и коначна је, кажемо да је f диференцијабилна у тачки x_0 . Ако је f диференцијабилна у свакој тачки свог домена, кажемо да је f диференцијабилна.

Пример 5.1. Код равномерно-праволинијског кретања брзином v , функција пређеног пута је $s(t) = vt$. Извод ове функције у тачки t једнак је $s'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(t+h) - vt}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{vt + vh - vt}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{vh}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} v = v$. То значи да је тренутна брзина у сваком тренутку једнака v , што је, заправо, очекиван резултат.

Како не бисмо стално изводили вредности извода за функције које често користимо, постоји таблица извода која се учи напамет. Таблица је дата у табели 1. Поред тога, важи следећа својства извода.

- (1) $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
- (2) $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$
- (3) $(cf(x))' = cf'(x)$
- (4) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- (5) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
- (6) $(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Значење овог последњег је следеће: ако се тражи извод функције облика $e^{f(x)}$ или $\sin f(x)$, (тада је $g(x) = e^x$, односно $g(x) = \sin x$), прво

се уради извод функције g у тачки $f(x)$, а затим се добијена функција множи изводом функције f .

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
a^x	$a^x \ln a$
e^x	e^x
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Табела 1: Таблични изводи.

5.1. (а) $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$

$$f'(x) = 5x^4 - 4 \cdot 3x^2 + 2 = 5x^4 - 12x^2 + 2$$

(б) $f(x) = \frac{\pi}{x} + \ln 2 = \pi \cdot x^{-1} + \ln 2$

$$f'(x) = \pi \cdot ((-1)x^{-2}) + 0 = \pi \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{\pi}{x^2}$$

(в) $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{5}{2}} + x^{-3}$

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} - 2 \cdot \frac{5}{2} x^{\frac{5}{2}-1} + (-3)x^{-4} = 2x^{-\frac{1}{3}} - 5x^{\frac{3}{2}} - 3x^{-4}$$

(г) $f(x) = x^2 \sqrt[3]{x^7} = x^2 \cdot x^{\frac{7}{3}} = x^{2+\frac{7}{3}} = x^{\frac{6}{3}+\frac{7}{3}} = x^{\frac{13}{3}}$

$$f'(x) = \frac{13}{3} x^{\frac{13}{3}-1} = \frac{13}{3} x^{\frac{13}{3}-\frac{3}{3}} = \frac{13}{3} x^{\frac{10}{3}}$$

(д) $f(x) = 5 \sin x + 3 \cos x$

$$f'(x) = 5 \cos x + 3(-\sin x) = 5 \cos x - 3 \sin x$$

$$(ђ) f(t) = \arcsin t + 2$$

$$f'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} + 0 = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$5.2. (a) f(x) = x \operatorname{ctg} x$$

$$f'(x) = (x)' \operatorname{ctg} x + x(\operatorname{ctg} x)' = 1 \cdot \operatorname{ctg} x + x \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x} \right) = \operatorname{ctg} x - \frac{x}{\sin^2 x}$$

$$(б) f(x) = e^x \cos x$$

$$f'(x) = (e^x)' \cos x + e^x (\cos x)' = e^x \cos x + e^x \cdot (-\sin x) = e^x (\cos x - \sin x)$$

$$(в) f(x) = \sin x \ln x 2^x$$

Ово је производ три функције, па ћемо груписати нека два чиниоца, нпр. други и трећи.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sin x)'(\ln x 2^x) + \sin x(\ln x 2^x)' \\ &= \cos x \ln x 2^x + \sin x((\ln x)' 2^x + \ln x(2^x)') \\ &= \cos x \ln x 2^x + \sin x \left(\frac{1}{x} \cdot 2^x + \ln x(2^x \ln 2) \right) \\ &= \cos x \ln x 2^x + \frac{\sin x 2^x}{x} + \sin x \ln x 2^x \ln 2 \end{aligned}$$

$$(г) f(x) = \frac{2x+3}{x^2-5x+5}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+3)'(x^2-5x+5) - (2x+3)(x^2-5x+5)'}{(x^2-5x+5)^2} \\ &= \frac{2(x^2-5x+5) - (2x+3)(2x-5)}{(x^2-5x+5)^2} \\ &= \frac{2x^2-10x+10 - (4x^2-10x+6x-15)}{(x^2-5x+5)^2} = \frac{-2x^2-6x+25}{(x^2-5x+5)^2} \end{aligned}$$

$$(д) f(t) = \frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}}$$

Пошто ће се често јављати у задацима, установимо шта је извод функције $g(t) = \sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$:

$$g'(t) = \frac{1}{2} t^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} t^{\frac{1}{2}-\frac{2}{2}} = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

Према томе, извод тражене функције је

$$\begin{aligned}
 f'(t) &= \frac{(1 + \sqrt{t})'(1 - \sqrt{t}) - (1 + \sqrt{t})(1 - \sqrt{t})'}{(1 - \sqrt{t})^2} \\
 &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{t}}(1 - \sqrt{t}) - (1 + \sqrt{t})\left(-\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)}{(1 - \sqrt{t})^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{t}} + \frac{1}{2}}{(1 - \sqrt{t})^2} \\
 &= \frac{\frac{2}{2\sqrt{t}}}{(1 - \sqrt{t})^2} = \frac{1}{\sqrt{t}(1 - \sqrt{t})^2}
 \end{aligned}$$

$$(h) f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{(\sin x + \cos x)'(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)'}{(\sin x - \cos x)^2} \\
 &= \frac{(\cos x + (-\sin x))(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)(\cos x - (-\sin x))}{(\sin x - \cos x)^2} \\
 &= \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} \\
 &= \frac{-(\sin x - \cos x)^2 - (\sin x + \cos x)^2}{(\sin x - \cos x)^2} \\
 &= \frac{-(\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x) - (\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x)}{(\sin x - \cos x)^2} \\
 &= \frac{-(1 - 2 \sin x \cos x) - (1 + 2 \sin x \cos x)}{(\sin x - \cos x)^2} \\
 &= \frac{-1 + 2 \sin x \cos x - 1 - 2 \sin x \cos x}{(\sin x - \cos x)^2} = \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}
 \end{aligned}$$

$$(e) f(t) = 2t \sin t - (t^2 - 2) \cos t$$

$$\begin{aligned}
 f'(t) &= (2t)' \sin t + (2t)(\sin t)' - ((t^2 - 2)' \cos t + (t^2 - 2)(\cos t)') \\
 &= 2 \sin t + 2t \cos t - (2t \cos t + (t^2 - 2)(-\sin t)) \\
 &= 2 \sin t + 2t \cos t - 2t \cos t + (t^2 - 2) \sin t \\
 &= (2 + t^2 - 2) \sin t = t^2 \sin t
 \end{aligned}$$

$$(ж) f(t) = \frac{t^2}{\ln t}$$

$$f'(t) = \frac{(t^2)' \ln t - t^2(\ln t)'}{(\ln t)^2} = \frac{2t \ln t - t^2 \cdot \frac{1}{t}}{(\ln t)^2} = \frac{2t \ln t - t}{(\ln t)^2} = \frac{t(2 \ln t - 1)}{(\ln t)^2}$$

$$(3) f(x) = x^{-1} + 2 \ln x - \frac{\ln x}{x}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-1)x^{-2} + 2 \cdot \frac{1}{x} - \frac{(\ln x)'x - \ln x(x)'}{x^2} \\ &= -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} \\ &= -\frac{1}{x^2} + \frac{2x}{x^2} - \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{-1 + 2x - 1 + \ln x}{x^2} = \frac{2x - 2 + \ln x}{x^2} \end{aligned}$$

$$(и) f(z) = z \operatorname{arctg} z$$

$$f'(z) = (z)' \operatorname{arctg} z + z(\operatorname{arctg} z)' = 1 \cdot \operatorname{arctg} z + z \cdot \frac{1}{1+z^2} = \operatorname{arctg} z + \frac{z}{1+z^2}$$

$$(j) f(t) = \frac{2}{3t+1} - \frac{2}{t}$$

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{(2)'(3t+1) - 2(3t+1)'}{(3t+1)^2} - 2(t^{-1})' \\ &= \frac{0 \cdot (3t+1) - 2 \cdot 3}{(3t+1)^2} - 2((-1)t^{-2}) = -\frac{6}{(3t+1)^2} + 2t^{-2} \\ &= -\frac{6}{(3t+1)^2} + \frac{2}{t^2} \end{aligned}$$

$$(к) f(x) = x^7 e^x$$

$$f'(x) = (x^7)'e^x + x^7(e^x)' = 7x^6 e^x + x^7 e^x = x^6 e^x (7+x)$$

$$5.3. (a) f(x) = \sqrt{x e^x + x}$$

Ово је сложена функција. Можемо написати да је $g(x) = x e^x + x$ и $h(x) = \sqrt{x}$, па је онда $f(x) = h(g(x))$. Правило за извод сложене функције нам говори да се прво ради извод функције h па се то множи с изводом функције g . Извод функције $h(x) = \sqrt{x}$ је $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, а извод функције $g(x) = x e^x + x$ је $g'(x) = (x)'e^x + x(e^x)' + 1 = 1 \cdot e^x + x e^x + 1 = e^x(1+x) + 1$. Дакле,

$$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x e^x + x}} \cdot (e^x(1+x) + 1).$$

Да не бисмо стално раздвајали шта је шта у композицији, радимо на следећи начин. Гледамо која је функција последња примењена и видимо да је то квадратни корен. Дакле, израчунавамо његов извод, што је 1 подељено са 2 пута корен из оног што се налазило под кореном на почетку. Након што смо израчунали тај извод, множимо све са изводом онога што је било под кореном. Дакле,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x e^x + x}} \cdot (x e^x + x)' = \dots = \frac{1}{2\sqrt{x e^x + x}} (e^x(1+x) + 1).$$

$$(б) f(x) = \sqrt[3]{2e^x - 2^x + 1} + (\ln x)^5$$

Овде се јавља израз који је под трећим кореном. Извод функције $g(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ је

$$g'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-\frac{3}{3}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},$$

па је

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3\sqrt[3]{(2e^x - 2^x + 1)^2}} \cdot (2e^x - 2^x + 1)' + 5(\ln x)^4 \cdot (\ln x)' \\ &= \frac{1}{3\sqrt[3]{(2e^x - 2^x + 1)^2}} \cdot (2e^x - 2^x \ln 2 + 0) + 5(\ln x)^4 \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{2e^x - 2^x \ln 2}{3\sqrt[3]{(2e^x - 2^x + 1)^2}} + \frac{5(\ln x)^4}{x}. \end{aligned}$$

$$(в) f(x) = \frac{1}{\operatorname{arctg} x}$$

Извод функције $g(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ је $g'(x) = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$, па је

$$f'(x) = -\frac{1}{(\operatorname{arctg} x)^2} \cdot (\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{(\operatorname{arctg} x)^2} \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

$$(г) f(x) = \ln^2 x - \ln \ln x = (\ln x)^2 - \ln(\ln x)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \ln x \cdot (\ln x)' - \frac{1}{\ln x} \cdot (\ln x)' = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{2 \ln x}{x} - \frac{1}{x \ln x} = \frac{2(\ln x)^2}{x \ln x} - \frac{1}{x \ln x} = \frac{2 \ln^2 x - 1}{x \ln x} \end{aligned}$$

$$(д) f(x) = \operatorname{tg} \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})' = \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(ђ) f(x) = e^{-x^2} + \sin 3x$$

$$f'(x) = e^{-x^2} \cdot (-x^2)' + \cos 3x \cdot (3x)' = e^{-x^2}(-2x) + \cos 3x \cdot 3 = -2xe^{-x^2} + 3 \cos 3x$$

$$(е) f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot (x + \sqrt{1+x^2})' \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot (1+x^2)'\right) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x\right) = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

$$(ж) f(x) = \operatorname{ctg} \arcsin x^2$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{\sin^2 \arcsin x^2} \cdot (\arcsin x^2)' \\ &= -\frac{1}{(\sin \arcsin x^2)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (x^2)^2}} \cdot (x^2)' \\ &= -\frac{1}{(x^2)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^4}} \cdot 2x = -\frac{1}{x^4} \cdot \frac{2x}{\sqrt{1 - x^4}} = -\frac{2}{x^3 \sqrt{1 - x^4}} \end{aligned}$$

$$(з) f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\cos^3 x}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\sqrt{x})' \cos^3 x - \sqrt{x} ((\cos x)^3)'}{(\cos^3 x)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cos^3 x - \sqrt{x} \cdot 3(\cos x)^2 \cdot (\cos x)'}{\cos^6 x} \\ &= \frac{\frac{\cos^3 x}{2\sqrt{x}} - 3\sqrt{x} \cos^2 x (-\sin x)}{\cos^6 x} = \frac{\frac{\cos^3 x}{2\sqrt{x}} + 3\sqrt{x} \cos^2 x \sin x}{\cos^6 x} \\ &= \frac{\frac{\cos^3 x}{2\sqrt{x}} + \frac{6x \cos^2 x \sin x}{2\sqrt{x}}}{\cos^6 x} = \frac{\frac{\cos^3 x + 6x \cos^2 x \sin x}{2\sqrt{x}}}{\cos^6 x} = \frac{\cos^2 x (\cos x + 6x \sin x)}{2\sqrt{x} \cos^6 x} \\ &= \frac{\cos x + 6x \sin x}{2\sqrt{x} \cos^4 x} \end{aligned}$$

$$(и) f(x) = x^{x^2}$$

Задата функција није ни степена функција x^a (јер степен није константан), нити је експоненцијална функција (основа није константна). Област дефинисаности ове функције је $x > 0$, односно $x \in (0, +\infty)$ (кад год имамо реални степен, као што је x^2 , основа мора бити позитивна). Према томе, и вредност функције је позитивна, па постоји њен логаритам, што значи да је могуће извршити следећу трансформацију:

$$f(x) = x^{x^2} = e^{\ln x^{x^2}} = e^{x^2 \ln x}.$$

Следи да је извод ове функције

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x^2 \ln x} \cdot (x^2 \ln x)' = x^{x^2} \cdot ((x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)') \\ &= x^{x^2} \left(2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} \right) = x^{x^2} \cdot (2x \ln x + x) = x^{x^2} \cdot x(2 \ln x + 1). \end{aligned}$$

$$(ј) f(x) = (\sin x)^{\cos x}$$

Као и у претходном примеру, функција није ни степена ни експоненцијална, те је неопходно извршити трансформацију. Област дефинисаности мора бити $\sin x > 0$, што значи да је и $(\sin x)^{\cos x} > 0$, те постоји

$\ln(\sin x)^{\cos x}$. Следи да је $f(x) = (\sin x)^{\cos x} = e^{\ln(\sin x)^{\cos x}} = e^{\cos x \ln \sin x}$, па следи да је њен извод једнак

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\cos x \ln \sin x} \cdot (\cos x \ln \sin x)' \\ &= (\sin x)^{\cos x} \cdot ((\cos x)' \ln \sin x + \cos x (\ln \sin x)') \\ &= (\sin x)^{\cos x} \left(-\sin x \ln \sin x + \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} (\sin x)' \right) \\ &= (\sin x)^{\cos x} \left(-\sin x \ln \sin x + \frac{\cos x}{\sin x} \cos x \right) \\ &= (\sin x)^{\cos x} \left(-\frac{\sin^2 x \ln \sin x}{\sin x} + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right) \\ &= (\sin x)^{\cos x} \cdot \frac{\cos^2 x - \sin^2 x \ln \sin x}{\sin x} \end{aligned}$$

(к) $f(x) = x^{x^x}$

Слично као у претходним примерима, извршимо трансформацију:

$$f(x) = x^{x^x} = e^{\ln x^{x^x}} = e^{x^x \ln x}.$$

Добијамо да је

$$f'(x) = e^{x^x \ln x} \cdot (x^x \ln x)' = x^{x^x} ((x^x)' \ln x + x^x (\ln x)').$$

Пошто се јавља извод функције x^x , морамо и ту функцију трансформисати у $x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$, па је

$$\begin{aligned} (x^x)' &= (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} (x \ln x)' = x^x ((x)' \ln x + x (\ln x)') \\ &= x^x \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) = x^x (\ln x + 1). \end{aligned}$$

Дакле,

$$f'(x) = x^{x^x} \left(x^x (\ln x + 1) \ln x + x^x \cdot \frac{1}{x} \right) = x^{x^x} \cdot x^x \left(\ln^2 x + \ln x + \frac{1}{x} \right).$$

Изводи се могу искористити да се пронађу граничне вредности облика $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$. Наиме, важи следеће тврђење. Ако су $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилне и за $x_0 \in (a, b)$ важи $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, онда ако постоји гранична вредност $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, онда постоји и гранична вредност $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ и важи

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Слично важи и ако је у питању једнострана гранична вредност $\lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x)}{g(x)}$ или $\lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x)}{g(x)}$. Такође, ако f и g нису дефинисане у тачки x_0 , али је $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ (није битан знак бесконачности, тачније, лева и десна гранична вредност могу бити бесконачности различитог знака), онда важи $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, уколико гранична вредност $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ постоји. Такође, све исто важи уколико је у питању бесконачна тачка x_0 , односно уколико се тражи $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ или $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Ово тврђење познато је под именом Лопиталово правило. Међутим, постоје неке ситуације у којима на први поглед делује да има смисла применити Лопиталово правило, а његова примена заправо нема смисла. На пример, посматрајмо граничну вредност $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$. Извод функције $\sin x$ у тачки $x = 0$ добија се, по дефиницији, помоћу граничне вредности $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(0+h) - \sin 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$. Лопиталово правило би заменило бројилац разломка $\frac{\sin x}{x}$ (што је $\sin x$) његовим изводом $\cos x$ у тачки $x = 0$, а та замена не може да се уради уколико се претходно не израчуна вредност извода функције $\sin x$ у тачки $x = 0$, односно полазна гранична вредност! Дакле, у овом примеру примена Лопиталовог правила нема смисла, јер се вртимо у круг (да бисмо искористили Лопиталово правило, морамо знати вредност извода, коју не знамо док не израчунамо полазну граничну вредност).

Наравно, постоје и ситуације у којима се применом Лопиталовог правила добија гранична вредност која не постоји, иако полазна гранична вредност постоји. Наиме, треба обратити пажњу на то да је услов за примену Лопиталовог правила тај да гранична вредност $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ постоји! Тек ако она постоји, онда важи да је $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

5.4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x}$

Једноставно се израчунава да је

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)}{x \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{1 - \frac{\sin x}{x}} = \frac{1 + 0}{1 - 0} = \frac{1}{1} = 1.$$

С друге стране, пошто је $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sin x) = +\infty$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sin x) = +\infty$, применом Лопиталовог правила добило би се

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x + \sin x)'}{(x - \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cos^2 \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2},$$

а та гранична вредност не постоји.

5.5. (а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$

Гранична вредност која се тражи не може да се израчуна. Наиме, пошто је $\ln x$ дефинисан за $x > 0$, није могуће посматрати граничну вредност када x тежи 0, јер за негативне x функција $\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$ није дефинисана. Уместо тога, израчунаћемо граничну вредност $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$. Како је $\lim_{x \rightarrow 0+} \ln x = -\infty$ и $\lim_{x \rightarrow 0+} \operatorname{ctg} x = +\infty$, могуће је применити Лопиталово правило, уколико се добије да гранична вредност $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(\ln x)'}{(\operatorname{ctg} x)'}$ постоји.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(\ln x)'}{(\operatorname{ctg} x)'} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} -\frac{\sin^2 x}{x} = -\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \sin x \right) \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0+} \sin x = -1 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Дакле, на основу Лопиталовог правила је $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = 0$.

(б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin \alpha x)}{\ln(\sin x)}$

Слично као малопре, ова гранична вредност не може да се израчуна, због проблема с дефинисаношћу. Наиме, ако је $-\delta < x < 0$ (за неки мали број $\delta > 0$), онда је $\sin x < 0$, па $\ln(\sin x)$ није дефинисано. Дакле, мора бити $0 < x < \delta$, а онда мора бити и $\alpha > 0$, да би било $\sin \alpha x > 0$. Дакле, тражићемо граничну вредност $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(\sin \alpha x)}{\ln(\sin x)}$, под претпоставком да је $\alpha > 0$.

Како је $\lim_{x \rightarrow 0+} \ln(\sin \alpha x) = -\infty$ и $\lim_{x \rightarrow 0+} \ln(\sin x) = -\infty$, могуће је применити Лопиталово правило, под условом да гранична вредност $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(\ln(\sin \alpha x))'}{(\ln(\sin x))'}$ постоји. Како је

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(\ln(\sin \alpha x))'}{(\ln(\sin x))'} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{\sin \alpha x} \cdot (\sin \alpha x)'}{\frac{1}{\sin x} (\sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{\sin \alpha x} \cdot \cos \alpha x \cdot (\alpha x)'}{\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{\cos \alpha x}{\sin \alpha x} \cdot \alpha}{\frac{\cos x}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\cos \alpha x \cdot \alpha \sin x}{\sin \alpha x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\cos \alpha x}{\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{\alpha \sin x}{\sin \alpha x} \cdot \frac{x}{x} \right) \\ &= \frac{1}{1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\alpha x}{\sin \alpha x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{\frac{\sin \alpha x}{\alpha x}} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1, \end{aligned}$$

следи да је $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(\sin \alpha x)}{\ln(\sin x)} = 1$.

(в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

Како је $\lim_{x \rightarrow 0} (x - \sin x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$, могуће је применити Лопиталово правило, под условом да гранична вредност $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ постоји. Како је

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6},$$

следи да је $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$.

(г) $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$

Слично као у претходним примерима, тражена гранична вредност не може да се израчуна, јер за $x < 0$ не постоји $\ln x$. Дакле, израчунаћемо граничну вредност $\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x$. Како овде не постоји количник, не можемо одмах применити Лопиталово правило. Међутим, коришћењем особина двојног разломка једноставно трансформишемо функцију $x \ln x$ у $\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$. Како је $\lim_{x \rightarrow 0+} \ln x = -\infty$ и $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} = +\infty$, следи да је могуће применити Лопиталово правило, под условом да постоји гранична вредност $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \left(-\frac{x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0+} (-x) = 0$$

Дакле, добијамо да је $\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x = 0$.

(д) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$

Овде такође немамо разломак, па не можемо одмах применити Лопиталово правило. Међутим, једноставно свођењем на заједнички именилац добијамо $\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^x - 1}{x(e^x - 1)} - \frac{x}{x(e^x - 1)} = \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)}$. Како је $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1 - x) = 1 - 1 - 0 = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 0} x(e^x - 1) = 0 \cdot (1 - 1) = 0$, могуће је применити Лопиталово правило уколико гранична вредност $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1 - x)'}{(x(e^x - 1))'}$ постоји.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1 - x)'}{(x(e^x - 1))'} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{(x)'(e^x - 1) + x(e^x - 1)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{e^x - 1 + xe^x}{e^x - 1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{xe^x}{e^x - 1}} \\ &= \frac{1}{1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x}{e^x - 1}} = \frac{1}{1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\frac{e^x - 1}{x}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Дакле, добијамо да је $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \frac{1}{2}$.

(ђ) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$

Поново немамо количник, па не можемо одмах применити Лопиталово правило, али можемо једноставно трансформисати израз у количник свођењем на заједнички именилац:

$$\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x \ln x}{(x-1) \ln x} - \frac{x-1}{(x-1) \ln x} = \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1) \ln x}.$$

Како је $\lim_{x \rightarrow 1} (x \ln x - x + 1) = 1 \cdot 0 - 1 + 1 = 0 + 0 = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \ln x = (1-1) \cdot 0 = 0$, могуће је применити Лопиталово правило уколико гранична вредност $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x \ln x - x + 1)'}{((x-1) \ln x)'}$ постоји.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x \ln x - x + 1)'}{((x-1) \ln x)'} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x)' \ln x + x(\ln x)' - 1}{(x-1)' \ln x + (x-1)(\ln x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1}{\ln x + (x-1) \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + 1 - 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\ln x + \frac{x-1}{x}} \end{aligned}$$

Гранична вредност коју смо добили испуњава услове за примену Лопиталовог правила, јер је $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\ln x + \frac{x-1}{x} \right) = 0 + \frac{1-1}{1} = 0$. Дакле, сада тражимо да ли постоји гранична вредност $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln x)'}{\left(\ln x + \frac{x-1}{x} \right)'}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln x)'}{\left(\ln x + \frac{x-1}{x} \right)'} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{(x-1)' \cdot x - (x-1)(x)'}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{x-(x-1)}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{x-x+1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x+1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Према томе, гранична вредност $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\ln x + \frac{x-1}{x}}$ постоји и једнака је $\frac{1}{2}$, што значи да је и $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \frac{1}{2}$.

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^6} - 1 + x^6}{\arctg x^{12}}$

Како је $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{-x^6} - 1 + x^6) = 1 - 1 + 0 = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \arctg x^{12} = 0$, следи да је могуће применити Лопиталово правило уколико постоји гранична

вредност $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{-x^6} - 1 + x^6)'}{(\operatorname{arctg} x^{12})'}$. Како је

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{-x^6} - 1 + x^6)'}{(\operatorname{arctg} x^{12})'} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^6} \cdot (-x^6)' + 6x^5}{\frac{1}{1+(x^{12})^2} \cdot (x^{12})'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^6} \cdot (-6x^5) + 6x^5}{\frac{1}{1+x^{24}} \cdot 12x^{11}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-6x^5(e^{-x^6} - 1)}{\frac{12x^{11}}{1+x^{24}}} = \frac{6}{12} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(e^{-x^6} - 1)}{\frac{x^6}{1+x^{24}}} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left((1+x^{24}) \cdot \frac{e^{-x^6} - 1}{-x^6} \right) = \frac{1}{2} \cdot (1+0) \cdot 1 = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

слиди да је и $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^6} - 1 + x^6}{\operatorname{arctg} x^{12}} = \frac{1}{2}$.

$$(ж) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

Поново наместимо на количник свођењем на заједнички именилац. Добијамо $\frac{x^2}{x^2 \sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}$. Како је $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - \sin^2 x) = 0 - 0 = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \sin^2 x) = 0 \cdot 0 = 0$, могуће је применити Лопиталово правило ако гранична вредност $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - \sin^2 x)'}{(x^2 \sin^2 x)'}$ постоји.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - \sin^2 x)'}{(x^2 \sin^2 x)'} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2 \sin x (\sin x)'}{(x^2)' \sin^2 x + x^2 (\sin^2 x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2 \sin x \cos x}{2x \sin^2 x + x^2 \cdot 2 \sin x (\sin x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2 \sin x \cos x}{2x \sin^2 x + 2x^2 \sin x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(x - \sin x \cos x)}{2x^3 \left(\frac{\sin^2 x}{x^2} + \frac{\sin x}{x} \cos x \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x \cos x}{x^3 \left(\frac{\sin^2 x}{x^2} + \frac{\sin x}{x} \cos x \right)} \end{aligned}$$

Како је $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2 x}{x^2} + \frac{\sin x}{x} \cos x \right) = 1 + 1 \cdot 1 = 2$, слиди да је потребно утврдити да ли постоји гранична вредност $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x \cos x}{x^3}$.

Како је $\lim_{x \rightarrow 0} (x - \sin x \cos x) = 0 - 0 \cdot 1 = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$, могуће је применити Лопиталово правило, уколико постоји гранична вредност

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x \cos x)'}{(x^3)'}.$ Како је

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x \cos x)'}{(x^3)'} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - ((\sin x)' \cos x + \sin x (\cos x)')}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x \cos x + \sin x (-\sin x))}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos^2 x - \sin^2 x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{3 \cdot \frac{4x^2}{4}} = \frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{(2x)^2} \\ &= \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

следи да је $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x \cos x}{x^3} = \frac{2}{3}$, па је

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - \sin^2 x)'}{(x^2 \sin^2 x)'} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

Коначно, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{3}.$

6 Испитивање тока функције

Испитивање тока функције је поступак помоћу којег се утврђује понашање функције. Утврђује се када функција расте, када опада, које тачке су такве да је вредност функције у њима једнака нули, када је позитивна, а кад негативна и тако даље. Састоји се од осам корака.

Први корак је утврђивање домена, односно области дефинисаности функције. Постављају се услови да изрази који су у имениоцима разломака буду различити од нуле, да изрази под парним коренима буду већи од нуле или једнаки нули, да основе логаритма буду позитивни бројеви различити од 1, да аргументи логаритма буду позитивни бројеви, да основе степена буду позитивне уколико је експонент (израз на који се степенује основа) реалан број, да аргументи функције tg буду различити од $\frac{\pi}{2} + k\pi$, где је $k \in \mathbb{Z}$, да аргументи функције ctg буду различити од $k\pi$, где је $k \in \mathbb{Z}$, да аргументи функција $\arcsin$ и $\arccos$ буду у интервалу $[-1, 1]$ и тако даље. Гледа се највећи подскуп скупа $\mathbb{R}$ који задовољава све постављене услове.

Други корак је испитивање неких специфичних особина као што су парност, непарност и периодичност. Наведимо њихове дефиниције.

Дефиниција 6.1. Нека је $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана на $U \subseteq \mathbb{R}$ који је симетричан у односу на тачку 0 (то значи да уколико $x \in U$, онда и $-x \in U$). Уколико за свако $x \in U$ важи да је $f(-x) = f(x)$, кажемо да је f парна. Уколико за свако $x \in U$ важи да је $f(-x) = -f(x)$, кажемо да је f непарна. Уколико не важи ниједна од те две једнакости или скуп U није симетричан у односу на тачку 0, функција f није ни парна ни непарна.

Дефиниција 6.2. Нека је $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана на $U \subseteq \mathbb{R}$. Ако постоји $T > 0$ такво да за свако $x \in U$ важи да је $x + T \in U$, $x - T \in U$ и $f(x - T) = f(x + T) = f(x)$, онда је функција f периодична с периодом T . Основни период периодичне функције је најмањи број $T > 0$ за који важи претходно.

Познато је да су тригонометријске функције $\sin$, $\cos$, tg и ctg периодичне. Основни период функција $\sin$ и $\cos$ је 2π , а основни период функција tg и ctg је π . Број 2π је период функција tg и ctg , али није њихов основни период. Такође, познато је (из средње школе) да је основни период функције $A \sin(kx + x_0) + B$ број $T = \frac{2\pi}{k}$. Слично важи ако уместо $\sin$ стоји $\cos$, а ако стоји tg или ctg , онда је $T = \frac{\pi}{k}$ основни период. Уколико је функција f збир периодичних функција, њихов основни период је НЗС основних периода њихових сабирака (наравно, не постоји НЗС за реалне бројеве, али ако су то бројеви облика $\frac{p}{q} \cdot \pi$, онда се сви периоди свODE на заједнички именилац и тражи се НЗС бројилаца).

Након тога се испитују нуле функције и знак, односно траже се тачке x које задовољавају $f(x) = 0$ (то су нуле функције f) и испитује се за које x је $f(x) > 0$, а за које је $f(x) < 0$.

Следећи корак су асимптоте. Постоје две врсте асимптота, а то су вектикалне и косе асимптоте. Обично се међу асимптотама издвајају хоризонталне као засебна врста, али су оне заправо специјални случај косих асимптота. Дефиниције су следеће.

Дефиниција 6.3. Права $x = x_0$, где је x_0 тачка за коју је бар једна од граничних вредности $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ бесконачна, назива се вертикалном асимптотом функције f .

Дефиниција 6.4. Права $y = kx + n$ је коса асимптота функције f када x тежи ка $+\infty$ уколико је $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ и $n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx)$. Слично важи и за косу асимптоту када x тежи ка $-\infty$. Уколико је $k = 0$, онда се каже да је $y = n$ хоризонтална асимптота.

Дакле, вертикалне асимптоте се испитују у тачкама у којима би се испитивали прекиди функције f . Најчешће су то тачке такве да је f

дефинисана на (a, x_0) или на (x_0, b) (може и на оба интервала), али f може бити и дефинисана у самој тачки x_0 . С друге стране, косе (и хоризонталне, као специјалан случај) испитују се у бесконачностима (наравно, уколико домен функције садржи интервал облика $(a, +\infty)$, односно $(-\infty, b)$).

Након тога се рачуна извод функције, а након тога и извод добијене функције (то се, иначе, зове други извод полазне функције, па се сам извод често зове и први извод). Изводи су потребни за испитивање монотоности и закривљености функције.

Испитују се нуле и знак (првог) извода. Заправо, ради се трећи корак, али се уместо над функцијом f тај корак ради над њеним изводом f' . Интервали (отворени) у којима је извод позитиван јесу интервали на којима је f растућа, док су интервали у којима је извод негативан интервали у којима је f опадајућа. Тачке у којима је функција дефинисана (ово је јако битно!) и извод мења знак зову се локални екстремуми функције f . Уколико функција расте, па затим опада, онда се екстремум зове максимум, а уколико функција опада, а затим расте, онда се екстремум зове минимум.

Након тога се испитују нуле и знак другог извода. Интервали у којима је други извод позитиван јесу интервали у којима је f закривљена на исти начин као квадратна функција $g(x) = x^2$ (има облик као срећна уста) и кажемо да је на тим интервалима f конвексна. Интервали у којима је други извод негативан јесу интервали у којима је f закривљена на исти начин као квадратна функција $h(x) = -x^2$ (има облик као тужна уста) и кажемо да је на тим интервалима f конкавна. Тачке у којима се прелази из конвексног у конкаван облик закривљености (или обрнуто) зову се превојне тачке.

Последњи корак је скицирање графика. Тај корак се ради слободном руком на папиру. Користе се информације добијене у свим претходним корацима.

6.1. (а) $f(x) = \arcsin \sqrt{x^2 + x + 1}$

Домен ове функције су сви $x \in \mathbb{R}$ такви да је $\sqrt{x^2 + x + 1} \in [-1, 1]$ (зато што аргумент функције $\arcsin$ мора бити у интервалу $[-1, 1]$) и $x^2 + x + 1 \geq 0$ (израз који се јавља под парним кореном мора бити позитиван или нула). Решимо прво квадратну једначину $x^2 + x + 1 = 0$. Њена решења су $x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2}$, што значи да ова квадратна једначина нема реалних решења. Како је коефицијент који стоји уз x^2 позитиван, следи да је $x^2 + x + 1 > 0$ за све $x \in \mathbb{R}$. Наравно, пошто је $\sqrt{x^2 + x + 1} > 0$, уместо два услова, $\sqrt{x^2 + x + 1} \geq -1$ и $\sqrt{x^2 + x + 1} \leq 1$, довољно је само поставити услов $\sqrt{x^2 + x + 1} \leq 1$. Квадрирањем добијамо $x^2 + x + 1 \leq 1$, па

сада решавамо квадратну неједначину $x^2 + x \leq 0$, односно $x(x+1) \leq 0$. Знамо да је производ два реална броја негативан ако је један од њих позитиван, а други негативан, па пошто је, очигледно, $x+1 > x$, следи да је једина могућност $x \leq 0$ и $x+1 \geq 0$, односно $x \leq 0$ и $x \geq -1$. Према томе, област дефинисаности (домен) функције $f(x)$ је $[-1, 0]$.

$$(б) f(x) = \ln \frac{5-x}{x^2-10x+24} - \sqrt[3]{x+5}$$

Домен ове функције су сви $x \in \mathbb{R}$ такви да је $\frac{5-x}{x^2-10x+24} > 0$ и $x^2 - 10x + 24 \neq 0$ (аргумент логаритма мора бити позитиван, израз у имениоцу тог разломка мора бити различит од нуле, док је $x+5$ аргумент непарног корена, те може бити и негативан). Дакле, решавамо неједначину $\frac{5-x}{x^2-10x+24} > 0$. Згодније је раставити квадратни полином у имениоцу на чиниоце. Да бисмо то урадили, прво решавамо одговарајућу квадратну једначину $x^2 - 10x + 24 = 0$. Њена решења су $x_{1/2} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 24}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{100-96}}{2} = \frac{10 \pm 2}{2}$, па је $x_1 = \frac{10+2}{2} = \frac{12}{2} = 6$ и $x_2 = \frac{10-2}{2} = \frac{8}{2} = 4$. Након тога, добијамо да је $x^2 - 10x + 24 = 1 \cdot (x-6) \cdot (x-4)$, где је 1 коефицијент који стоји уз x^2 , а 6 и 4 су добијена решења квадратне једначине. Следи да треба решити неједначину $\frac{5-x}{(x-6)(x-4)} > 0$ и $x^2 - 10x + 24 = (x-6)(x-4) \neq 0$. Из друге неједначине јасно је да мора бити $x \neq 6$ и $x \neq 4$ (пошто су 6 и 4 заправо решења једначине $(x-6)(x-4) = 0$). Израз $5-x$ једнак је нули за $x = 5$, позитиван је за $x < 5$ (јер из $5-x > 0$ следи $x < 5$ и обратно) и негативан је за $x > 5$. Израз $x-6$ је једнак нули за $x = 6$, позитиван је за $x > 6$ (јер из $x-6 > 0$ следи $x > 6$ и обратно), а негативан је за $x < 6$. Слично је и $x-4$ једнак нули за $x = 4$, позитиван за $x > 4$ и негативан за $x < 4$. Пошто решавамо неједначину $\frac{5-x}{(x-6)(x-4)} > 0$, тражимо интервале у којима су сва три израза позитивна или су 2 негативна и један је позитиван. Ниједан израз не сме бити једнак нули. Дакле, за $x < 4$ су изрази $x-4$ и $x-6$ негативни, а израз $5-x$ је позитиван, па је $(-\infty, 4)$ интервал који улази у област дефинисаности функције $f(x)$. За $4 < x < 5$ су изрази $x-4$ и $5-x$ позитивни, а израз $x-6$ је негативан, па је онда и $\frac{5-x}{(x-6)(x-4)}$ негативан, што нам не одговара. За $5 < x < 6$ су изрази $5-x$ и $x-6$ негативни, а израз $x-4$ је позитиван, па је и $\frac{5-x}{(x-6)(x-4)}$ позитиван, што значи да интервал $(5, 6)$ улази у област дефинисаности функције $f(x)$. Коначно, за $x > 6$ су изрази $x-4$ и $x-6$ позитивни, али је израз $5-x$ негативан, па је цео израз $\frac{5-x}{(x-6)(x-4)}$ негативан. Следи да је област дефинисаности (домен) функције $f(x)$ скуп $(-\infty, 4) \cup (5, 6)$.

$$(в) f(x) = \sqrt{3-x} + \arcsin \frac{3-2x}{5}$$

Домен ове функције су сви $x \in \mathbb{R}$ такви да је $3-x \geq 0$ и $\frac{3-2x}{5} \in [-1, 1]$ ($3-x$ је аргумент парног корена, па мора бити позитиван или нула, док је $\frac{3-2x}{5}$ аргумент функције $\arcsin$, па мора бити у интервалу $[-1, 1]$). Из

првог следи да је $x \leq 3$, а из другог добијамо две неједначине, $\frac{3-2x}{5} \geq -1$ и $\frac{3-2x}{5} < 1$. Множењем обеју неједначина (позитивним) бројем 5 (важно је да буде позитиван, да се не би променио знак неједнакости) добијамо неједначине $3 - 2x \geq -5$ и $3 - 2x \leq 5$. Из прве неједначине добијамо $2x \leq 3 + 5 = 8$, а из друге неједначине добијамо $2x \geq 3 - 5 = -2$. Дакле, $x \leq \frac{8}{2} = 4$ и $x \geq \frac{-2}{2} = -1$. Пошто је услов $x \leq 3$ јачи од услова $x \leq 4$, следи да је коначна област дефинисаности функције $f(x)$ интервал $[-1, 3]$.

6.2. (а) $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$

Да бисмо испитивали парност, односно непарност неке функције, најпре треба утврдити да ли је њен домен симетричан у односу на тачку 0, односно да ли за све x који припадају домену важи да и $-x$ припада домену.

Домен ове функције су сви $x \in \mathbb{R}$ такви да је $e^x - 1 \neq 0$. Дакле, $e^x \neq 1$, односно $x \neq \ln 1 = 0$. Према томе, домен функције $f(x)$ је $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, што је симетрично у односу на тачку 0, што значи да има смисла испитивати парност и непарност. Како је $f(-x) = \frac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1} = \frac{\frac{1}{e^x}+1}{\frac{1}{e^x}-1} = \frac{\frac{1+e^x}{e^x}}{\frac{1-e^x}{e^x}} = \frac{1+e^x}{1-e^x} = -\frac{1+e^x}{e^x-1} = -f(x)$, следи да је $f(x)$ непарна функција.

(б) $f(x) = \sin x - \cos x$

Домен ове функције је $\mathbb{R}$, што је симетрично у односу на тачку 0. Како је $f(-x) = \sin(-x) - \cos(-x) = -\sin x - \cos x$, што није једнако ни $-f(x)$ ни $f(x)$, следи да функција $f(x)$ није ни парна ни непарна.

(в) $f(x) = \frac{x^2-4x}{\sqrt{6-x-x^2}}$

Домен ове функције су сви $x \in \mathbb{R}$ такви да је $\sqrt{6-x-x^2} \neq 0$ и $6-x-x^2 \geq 0$ (израз $\sqrt{6-x-x^2}$ се јавља у имениоцу, па мора бити различит од нуле, а израз $6-x-x^2$ је аргумент парног корена, па мора бити позитиван или нула). Пошто је $\sqrt{6-x-x^2} = 0$ ако и само ако је $6-x-x^2 = 0$, следи да је за област дефинисаности довољно решити неједначину $6-x-x^2 > 0$. Прво решавамо једначину $6-x-x^2 = 0$. Њена решења су $x_{1/2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 6}}{2 \cdot (-1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{-2} = \frac{1 \pm 5}{-2}$, односно $x_1 = \frac{1+5}{-2} = \frac{6}{-2} = -3$ и $x_2 = \frac{1-5}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$. Како је коефицијент уз x^2 негативан, следи да је решење неједначине $x \in (-3, 2)$, па је то и област дефинисаности функције $f(x)$. Пошто област дефинисаности $(-3, 2)$ није симетрична у односу на тачку 0 (нпр. $x = -\frac{5}{2}$ припада области дефинисаности, док јој $-x = -(-\frac{5}{2}) = \frac{5}{2}$ не припада), следи да функција $f(x)$ није ни парна ни непарна.

6.3. (а) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1, x \in [-1, 5]$

За разлику од уобичајеног испитивања тока функције, где се траже само локални минимуми и максимуми (односно локални екстремуми), у овом задатку се тражи да се пронађу тачке у којима функција на датом интервалу достиже најмању и највећу вредност. Локални минимум и локални максимум то не морају бити, а разлог за то је веома једноставан. Нпр, нека је функција $f : [-5, 10] \rightarrow \mathbb{R}$ таква да опада на интервалу $(-5, 0)$, па расте на интервалу $(0, 1)$, а затим опада на интервалу $(1, 10)$. Тада је тачка $x = 0$ тачка локалног минимума, међутим, пошто функција опада и на интервалу $(1, 10)$, могуће је да је $f(10) < f(0)$, што неће учинити тачку $x = 0$ минимумом, већ тачку $x = 10$ (тражи се тачка у којој f достиже најмању вредност, а $f(10)$ је мање од $f(0)$). Слично, тачка $x = 1$ је тачка локалног максимума, али то не мора бити тачка у којој f достиже највећу вредност, јер је можда $f(-5) > f(1)$. Резиме је следећи: тачке локалног минимума су кандидати за тачку у којој функција достиже најмању вредност, али се морају узети у обзир и крајеви области дефинисаности (леви и десни). Слично, тачке локалног максимума су кандидати за тачку у којој функција достиже највећу вредност, али се и ту морају узети у обзир крајеви области дефинисаности.

Да бисмо тражили локалне екстремуме, потребан нам је извод функције. Извод функције $f(x)$ је $f'(x) = 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 2x - 12 = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2)$. Испитујемо знак извода, па зато решавамо једначину $f'(x) > 0$, односно $6(x^2 + x - 2) > 0$. Прво решавамо квадратну једначину $x^2 + x - 2 = 0$. Њена решења су $x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$, односно $x_1 = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$ и $x_2 = \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$. Пошто је коефицијент уз x^2 позитиван, следи да је $f'(x) > 0$ за $x < -2$ и за $x > 1$. Такође, $f'(x) < 0$ за $-2 < x < 1$.

Нас занима шта се дешава на интервалу $[-1, 5]$. Пошто је $f'(x) < 0$ за $x \in (-2, 1)$, следи да је $f'(x) < 0$ за $x \in (-1, 1)$, па је функција f опадајућа на том интервалу. Пошто је $f'(x) > 0$ за $x > 1$, следи да је функција f растућа на интервалу $(1, 5)$. Дакле, имамо тачку $x = 1$ као локални минимум и немамо ниједан локални максимум. Пошто функција прво опада (на $(-1, 1)$), а затим расте (на $(1, 5)$), није потребно проверавати да ли је $f(-1) < f(1)$ или је $f(5) < f(1)$, те можемо одмах закључити да је $x = 1$ минимум функције $f(x)$ на интервалу $[-1, 5]$. Вредност коју f достиже у тачки минимума је $f(1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 1 = 2 + 3 - 12 + 1 = 6 - 12 = -6$.

Пошто $f(x)$ прво опада (на $(-1, 1)$), па затим расте (на $(1, 5)$), следи да је тачка максимума $x = -1$ или $x = 5$. Како је $f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 12 \cdot (-1) + 1 = -2 + 3 + 12 + 1 = -2 + 16 = 14$, а $f(5) = 2 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 - 12 \cdot 5 + 1 = 2 \cdot 125 + 3 \cdot 25 - 60 + 1 = 250 + 75 - 60 + 1 > 14 = f(-1)$, следи да је $x = 5$ максимум функције $f(x)$ на интервалу $[-1, 5]$.

(б) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1, x \in [-10, 12]$

У питању је иста функција као у претходном делу, па знамо да је $f'(x) > 0$ за $x < -2$ и $x > 1$, односно да је $f'(x) < 0$ за $-2 < x < 1$. То значи да је $f(x)$ растућа на интервалу $(-10, -2)$, па је опадајућа на интервалу $(-2, 1)$, па је растућа на интервалу $(1, 12)$. Следи да је $x = -2$ тачка локалног максимума и $x = 1$ је тачка локалног минимума. Већ знамо да је $f(1) = -6$, па то нећемо поново рачунати. Пошто је f прво растућа (на $(-10, -2)$), па је опадајућа (на $(-2, 1)$), па је поново растућа (на $(1, 12)$), следи да је тачка $x = -10$ кандидат за минимум (поред локалног минимума $x = 1$), а тачка $x = 12$ кандидат за максимум (поред локалног максимума $x = -2$). Пошто је $f(-10) = 2 \cdot (-10)^3 + 3 \cdot (-10)^2 - 12 \cdot (-10) + 1 = 2 \cdot (-1000) + 3 \cdot 100 + 12 \cdot 10 + 1 = -2000 + 300 + 120 + 1 < -6 = f(1)$, следи да је $x = -10$ минимум функције $f(x)$ на интервалу $[-10, 12]$. Такође, пошто је $f(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - 12 \cdot (-2) + 1 = 2 \cdot (-8) + 3 \cdot 4 + 12 \cdot 2 + 1 = -16 + 12 + 24 + 1 = -16 + 37 = 21$ и $f(12) = 2 \cdot 12^3 + 3 \cdot 12^2 - 12 \cdot 12 + 1 = 2 \cdot 144 \cdot 12 + 3 \cdot 144 - 144 + 1 > 21 = f(-2)$, следи да је $x = 12$ максимум функције $f(x)$ на интервалу $[-10, 12]$.

(в) $f(x) = x^3, x \in [-1, 3]$

Прво рачунамо извод функције $f(x)$, што је функција $f'(x) = 3x^2$, која је увек позитивна, осим у тачки $x = 0$. Пошто је $f'(x) > 0$ и за $x < 0$ и за $x > 0$ и пошто тачка $x = 0$ припада области дефинисаности (а и области на којој тражимо минимум и максимум функције $f(x)$), следи да је f растућа на целој својој области дефинисаности, па специјално и на датом интервалу. Према томе, немамо локалне екстремуме и пошто f стално расте, следи да је минимум тачка $x = -1$, а да је максимум тачка $x = 3$.

(г) $f(x) = x^4 + 2, x \in [-5, 5]$

Прво рачунамо извод функције $f(x)$, а то је функција $f'(x) = 4x^3$. Како је $f'(x) > 0$ ако је $x > 0$ и $f'(x) < 0$ ако је $x < 0$, следи да је $f(x)$ опадајућа на интервалу $(-5, 0)$, а растућа на интервалу $(0, 5)$. То значи да је тачка $x = 0$ локални минимум, а пошто функција прво опада (на $(-5, 0)$), а затим расте (на $(0, 5)$), следи да је $x = 0$ уједно и минимум функције $f(x)$ на интервалу $[-5, 5]$. Такође, пошто $f(x)$ прво опада (на $(-5, 0)$), па расте (на $(0, 5)$), следи да су тачке $x = -5$ и $x = 5$ кандидати за максимум. Но, пошто је $f(-x) = (-x)^4 + 2 = x^4 + 2 = f(x)$, следи да је $f(-5) = f(5)$, па су обе тачке максимуми функције $f(x)$ на интервалу $[-5, 5]$.

6.4. (а) $f(x) = x \ln x$

Да бисмо тражили било шта, треба да знамо домен функције $f(x)$. Домен су сви $x \in \mathbb{R}$ за које је $x > 0$ (јер је x аргумент логаритма), односно

домен је $(0, +\infty)$. За локалне екстремуме потребно је прво израчунати извод. Добијамо да је $f'(x) = (x)' \ln x + x(\ln x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$. Сада испитујемо знак функције $f'(x)$. Како је $f'(x) > 0$ ако је $\ln x + 1 > 0$, односно $\ln x > -1$, односно $x > e^{-1} = \frac{1}{e}$ и како је, слично, $f'(x) < 0$ ако је $0 < x < \frac{1}{e}$, следи да је $f(x)$ опадајућа на интервалу $(0, \frac{1}{e})$, а растућа на интервалу $(\frac{1}{e}, +\infty)$. Према томе, једини локални екстремум функције $f(x)$ је локални минимум $x = \frac{1}{e}$.

(б) $f(x) = x - \arctg x$

Поново, морамо прво знати домен функције $f(x)$, а то је скуп $\mathbb{R}$. Затим нам треба извод, а он је $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$. Израз x^2 је увек позитиван, осим у тачки $x = 0$, док је $1 + x^2 \geq 1 > 0$. Дакле, $f'(x) > 0$ за $x < 0$ и за $x > 0$, па како тачка $x = 0$ припада области дефинисаности, следи да је f растућа на $\mathbb{R}$. Дакле, функција f нема локалних екстремума.

(в) $f(x) = \frac{(x-2)(8-x)}{x^2}$

Домен ове функције су сви $x \in \mathbb{R}$ за које је $x^2 \neq 0$, односно $x \neq 0$. Дакле, домен је $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Извод функције $f(x)$ је

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{((x-2)(8-x))'x^2 - (x-2)(8-x)(x^2)'}{(x^2)^2} \\ &= \frac{((x-2)'(8-x) + (x-2)(8-x)')x^2 - (x-2)(8-x) \cdot 2x}{x^4} \\ &= \frac{(1 \cdot (8-x) + (x-2) \cdot (-1))x^2 - (8x - x^2 - 16 + 2x) \cdot 2x}{x^4} \\ &= \frac{(8-x-x+2) \cdot x - 2(-x^2 + 10x - 16)}{x^3} \\ &= \frac{(10-2x) \cdot x + 2x^2 - 20x + 32}{x^3} \\ &= \frac{10x - 2x^2 + 2x^2 - 20x + 32}{x^3} = \frac{-10x + 32}{x^3} = -2 \cdot \frac{5x - 16}{x^3}. \end{aligned}$$

Важи да је $x^3 > 0$ ако је $x > 0$ и $x^3 < 0$ ако је $x < 0$, а да је $5x - 16 > 0$ ако је $x > \frac{16}{5}$, односно $5x - 16 < 0$ ако је $x < \frac{16}{5}$. Према томе, ако је $x < 0$, онда је $5x - 16 < 0$ и $x^3 < 0$, па је $f'(x) = -2 \cdot \frac{5x-16}{x^3} < 0$, што значи да f опада на $(-\infty, 0)$. Ако је $0 < x < \frac{16}{5}$, онда је $5x - 16 < 0$ и $x^3 > 0$, па је $f'(x) = -2 \cdot \frac{5x-16}{x^3} > 0$, што значи да f расте на $(0, \frac{16}{5})$. Коначно, ако је $x > \frac{16}{5}$, онда је $5x - 16 > 0$ и $x^3 > 0$, па је $-2 \cdot \frac{5x-16}{x^3} < 0$, што значи да f опада на $(\frac{16}{5}, +\infty)$. У тачки $x = 0$ функција f није дефинисана, те то не може бити тачка локалног екстремума. У тачки $x = \frac{16}{5}$ имамо локални максимум, јер је f растућа на $(0, \frac{16}{5})$ и опадајућа на $(\frac{16}{5}, +\infty)$.

(г) $f(x) = 2 \sin 2x + \sin 4x$

Домен ове функције је $\mathbb{R}$, а извод је

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot \cos 2x \cdot (2x)' + \cos 4x \cdot (4x)' = 2 \cos 2x \cdot 2 + \cos 4x \cdot 4 \\ &= 4 \cos 2x + 4 \cos 4x = 4 \cos 2x + 4(\cos^2 2x - \sin^2 2x) \\ &= 4 \cos 2x + 4(\cos^2 2x - (1 - \cos^2 2x)) \\ &= 4 \cos 2x + 4(\cos^2 2x - 1 + \cos^2 2x) = 4 \cos 2x + 4(2 \cos^2 2x - 1) \\ &= 4 \cos 2x + 8 \cos^2 2x - 4 = 4(2 \cos^2 2x + \cos 2x - 1). \end{aligned}$$

Да бисмо добили када је $f'(x) > 0$, морамо решити неједначину $2 \cos^2 2x + \cos 2x - 1 > 0$. Прво уводимо смену $\cos 2x = t$ и сводимо неједначину на квадратну неједначину $2t^2 + t - 1 > 0$. Решења одговарајуће квадратне једначине $2t^2 + t - 1 = 0$ су $t_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$, односно $t_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ и $t_2 = \frac{-1-3}{4} = \frac{-4}{4} = -1$. Пошто је коефицијент уз t^2 позитиван, следи да је $2t^2 + t - 1 > 0$ ако је $t < -1$ или $t > \frac{1}{2}$. Како не може бити $\cos 2x < -1$, следи да мора бити $\cos 2x > \frac{1}{2}$. Решење ове тригонометријске неједначине је $-\arccos \frac{1}{2} + 2k\pi < 2x < \arccos \frac{1}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, односно $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < 2x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Дакле, $f'(x) > 0$ ако је $-\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Дакле, нпр. на интервалу $(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$ функција f је растућа, а на интервалу $(\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6} + \pi)$ функција f је опадајућа, и то се тако понавља. Следи да су тачке $-\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ тачке локалних минимума, а тачке $\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ су тачке локалних максимума.

6.5. (а) $f(x) = (x+1)^4$

Као и за интервале монотоности и локалне екстремуме, за интервале закривљености и превојне тачке потребно је пре свега знати домен функције. Домен функције f је $\mathbb{R}$. За интервале закривљености потребан је други извод функције f , што је извод њеног (првог) извода. Дакле, $f'(x) = 4(x+1)^3 \cdot (x+1)' = 4(x+1)^3 \cdot 1 = 4(x+1)^3$ и $f''(x) = (f'(x))' = 4 \cdot 3(x+1)^2 \cdot (x+1)' = 12(x+1)^2 \cdot 1 = 12(x+1)^2$. Очигледно је f'' позитивна за све x осим за $x = -1$, међутим, пошто је тачка $x = -1$ у домену и $f''(x) > 0$ за $x < -1$ и $x > -1$, следи да је f конвексна (има облик као срећна уста) на $\mathbb{R}$ и да нема превојних тачака.

(б) $f(x) = x^2 \ln x$

Домен ове функције су сви $x \in \mathbb{R}$ за које је $x > 0$ (x је аргумент логаритма), тј. интервал $(0, +\infty)$. Извод (први) је

$$f'(x) = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)' = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x,$$

а други извод је

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f'(x))' = 2 \cdot ((x)' \ln x + x(\ln x)') + 1 = 2 \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) + 1 \\ &= 2(\ln x + 1) + 1 = 2 \ln x + 2 + 1 = 2 \ln x + 3. \end{aligned}$$

Важи да је $f''(x) > 0$ ако је $\ln x > -\frac{3}{2}$, односно $x > e^{-\frac{3}{2}}$, па је $f''(x) < 0$ ако је $0 < x < e^{-\frac{3}{2}}$. То значи да је f конкавна (има облик као тужна уста) на $(0, e^{-\frac{3}{2}})$, а конвексна (има облик као срећна уста) на $(e^{-\frac{3}{2}}, +\infty)$. Тачка $x = e^{-\frac{3}{2}}$ је превојна тачка.

(в) $f(x) = x - \arctg x$

Домен ове функције је $\mathbb{R}$. Извод је $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2}$, а други извод је $f''(x) = (f'(x))' = -\frac{(1)'(1+x^2) - 1 \cdot (1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = -\frac{0 \cdot (1+x^2) - 2x}{(1+x^2)^2} = -\frac{0-2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$. Следи да је $f''(x) < 0$ ако је $x < 0$ и $f''(x) > 0$ ако је $x > 0$, па је f конкавна (као тужна уста) на $(-\infty, 0)$ и конвексна (као срећна уста) на $(0, +\infty)$, а тачка $x = 0$ је превојна тачка.

(г) $f(x) = (1+x^2)e^x$

Домен ове функције је $\mathbb{R}$. Извод је $f'(x) = (1+x^2)'e^x + (1+x^2)(e^x)' = 2xe^x + (1+x^2)e^x = (2x+1+x^2)e^x$, а други извод је $f''(x) = (f'(x))' = (x^2+2x+1)'e^x + (x^2+2x+1)(e^x)' = (2x+2)e^x + (x^2+2x+1)e^x = (x^2+4x+3)e^x$. Како је $e^x > 0$ за све $x \in \mathbb{R}$, следи да знак другог извода зависи само од знака квадратног полинома $x^2 + 4x + 3$. Дакле, да бисмо добили када је $f''(x) > 0$, решавамо квадратну неједначину $x^2 + 4x + 3 > 0$. Решења квадратне једначине $x^2 + 4x + 3 = 0$ су $x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2}$, односно $x_1 = \frac{-4+2}{2} = \frac{-2}{2} = -1$ и $x_2 = \frac{-4-2}{2} = \frac{-6}{2} = -3$. Пошто је коефицијент уз x^2 позитиван, следи да је $x^2 + 4x + 3 > 0$ ако је $x < -3$ или $x > -1$, па је $f''(x) > 0$ ако је $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$, а $f''(x) < 0$ ако је $x \in (-3, -1)$. Према томе, функција f је конвексна (срећна уста) на интервалу $(-\infty, -3)$, па је конкавна (тужна уста) на интервалу $(-3, -1)$, па је поново конвексна на $(-1, +\infty)$. То значи да су тачке $x = -3$ и $x = -1$ превојне тачке.

(д) $f(x) = \frac{1}{x+3}$

Домен ове функције су сви $x \in \mathbb{R}$ за које је $x+3 \neq 0$ (именилац разломка), тј. $x \neq -3$. Дакле, домен је $(-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$. Извод је $f'(x) = -\frac{1}{(x+3)^2} \cdot (x+3)' = -\frac{1}{(x+3)^2} \cdot 1 = -\frac{1}{(x+3)^2} = -(x+3)^{-2}$, а други извод је $f''(x) = (f'(x))' = -(-2)(x+3)^{-3} \cdot (x+3)' = 2(x+3)^{-3} \cdot 1 = \frac{2}{(x+3)^3}$. Дакле, $f''(x) > 0$ ако је $x+3 > 0$, односно $x > -3$, а $f''(x) < 0$ ако је $x < -3$. Према томе, f је конкавна (тужна уста) на $(-\infty, -3)$ и конвексна (срећна уста) на $(-3, +\infty)$. Међутим, тачка $x = -3$ не припада домену, те ова функција нема превојних тачака.

6.6. (а) $f(x) = x + \ln x$

За испитивање асимптота прво испитујемо домен, зато што нас занимају тачке на крајевима интервала које сачињавају домен (то су тачке у којима су могући прекиди функције f). Домен ове функције су сви

$x \in \mathbb{R}$ такви да је $x > 0$ (због логаритма). Према томе, проверићемо да ли је $x = 0$ хоризонтална асимптота и проверићемо да ли постоји коса асимптота када $x \rightarrow +\infty$ (нема смисла тражити косу асимптоту када $x \rightarrow -\infty$, јер функција није дефинисана за негативне x). Како је $\lim_{x \rightarrow 0+} (x + \ln x) = -\infty$, следи да је $x = 0$ вертикална асимптота. За косу асимптоту потражимо прво $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right) = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$. Како је $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, има смисла применити Лопиталово правило, под условом да гранична вредност $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$, следи да је $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, па је $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 + 0 = 1$. Међутим, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \ln x - 1 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, те функција $f(x)$ нема косу асимптоту (а ни хоризонталну) када $x \rightarrow +\infty$.

(б) $f(x) = e^{-x^2} + 2$

Домен ове функције је $\mathbb{R}$, те ћемо испитивати само косе асимптоте када $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$. Како је $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x^2} + 2}{x} = 0$ ($-x^2$ тежи ка $-\infty$, након експоненцијалне функције, то тежи нули, па бројилац тежи ка 2; с друге стране, именилац тежи ка бесконачно) и $n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x^2} + 2 - 0) = 0 + 2 = 2$, следи да је права $y = 0 \cdot x + 2 = 2$ коса асимптота (односно, хоризонтална асимптота, јер је њен коефицијент правца једнак нули) када $x \rightarrow +\infty$. Сасвим слично, $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x^2} + 2}{x} = 0$ и $n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x^2} + 2 - 0) = 0 + 2 = 2$, следи да је права $y = 0 \cdot x + 2 = 2$ коса асимптота (односно, хоризонтална асимптота, јер је њен коефицијент правца једнак нули) када $x \rightarrow -\infty$.

(в) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 9}$

Домен ове функције су сви $x \in \mathbb{R}$ такви да је $x^2 + 9 \neq 0$. Пошто је $x^2 + 9$ увек различито од нуле, следи да је домен $\mathbb{R}$. Према томе, функција $f(x)$ нема вертикалне асимптоте, те ћемо испитивати само косе асимптоте када $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$. Како је $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2 + 9}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x(x^2 + 9)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 9} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2(1 + \frac{9}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{9}{x^2}} = \frac{1}{1 + 0} = 1$ и $n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 9} - 1 \cdot x\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 9} - \frac{x(x^2 + 9)}{x^2 + 9}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 9} - \frac{x^3 + 9x}{x^2 + 9}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^3 - 9x}{x^2 + 9} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-9x}{x^2 + 9} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-9x}{x^2(1 + \frac{9}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-9}{x(1 + \frac{9}{x^2})} = 0$. Дакле, $y = kx + n = 1 \cdot x + 0 = x$ је коса асимп-

тота када $x \rightarrow +\infty$. Сасвим слично се добија да је $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = 0$, па је $y = 1 \cdot x + 0 = x$ коса асимптота када $x \rightarrow -\infty$.

(г) $f(x) = \frac{1}{1-e^x}$

Домен ове функције су сви $x \in \mathbb{R}$, такви да је $1 - e^x \neq 0$, односно $e^x \neq 1$, тј. $x \neq \ln 1 = 0$. Према томе, домен је $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, па је права $x = 0$ кандидат за вертикалну асимптоту. Како је $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{1-e^x} = +\infty$ (израз $1 - e^x$ тежи нули, па $\frac{1}{1-e^x}$ тежи бесконачно, а пошто $x \rightarrow 0-$, онда је увек $x < 0$, па је $e^x < 1$, па је $1 - e^x > 0$, што значи да је $\frac{1}{1-e^x}$ увек позитивно, па тежи ка $+\infty$). Пошто се у овом задатку тражи само да се нађу асимптоте, није потребно проверавати десну граничну вредност $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$ (коју има смисла испитивати, јер је f дефинисана на $(0, +\infty)$).

Међутим, када се тражи да се скицира график функције, рачунаћемо и другу граничну вредност, како бисмо имали што више информација о понашању функције. Дакле, права $x = 0$ је вертикална асимптота. Остаје још да се провери да ли постоје косе асимптоте када $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$. Како је $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1-e^x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(1-e^x)} = 0$ (e^x тежи ка $+\infty$, па $1 - e^x$ тежи ка $-\infty$, па $x(1 - e^x)$ тежи ка $-\infty$, те $\frac{1}{x(1-e^x)}$ тежи нули) и $n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1-e^x} - 0 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-e^x} = 0$ (слично као малопре, $1 - e^x$ тежи ка $-\infty$, те $\frac{1}{1-e^x}$ тежи нули), следи да је права $y = kx + n = 0 \cdot x + 0 = 0$ коса асимптота (пошто је $k = 0$, она није накошена у односу на координатни систем, па кажемо да је то хоризонтална асимптота). С друге стране, како је $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} =$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{1-e^x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x(1-e^x)} = 0$ (e^x тежи нули, па $1 - e^x$ тежи јединици, а $x(1 - e^x)$ тежи ка $-\infty$, те $\frac{1}{x(1-e^x)}$ тежи нули) и $n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{1-e^x} - 0 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1-e^x} = \frac{1}{1-0} = 1$, следи да је права $y = kx + n = 0 \cdot x + 1 = 1$ коса асимптота када $x \rightarrow -\infty$ (опет ћемо рећи да је хоризонтална, јер је $k = 0$).

(д) $f(x) = \frac{x}{x^2-4x+3}$

Домен ове функције су сви $x \in \mathbb{R}$ такви да је $x^2 - 4x + 3 \neq 0$. Решимо једначину $x^2 - 4x + 3 = 0$. Њена решења су $x_{1/2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1$, односно $x_1 = 2 + 1 = 3$ и $x_2 = 2 - 1 = 1$. Дакле, домен функције су сви $x \in \mathbb{R}$ такви да је $x \neq 1$ и $x \neq 3$, односно домен је $(-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty)$. Испитујемо да ли су $x = 1$ и $x = 3$ вертикалне асимптоте. Како је $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x}{x^2-4x+3} = +\infty$ ($x^2 - 4x + 3$ има позитиван коефицијент уз x^2 , што значи да је позитивно када је $x < 1$; пошто

тежи нули када x тежи јединици (с леве стране) и пошто бројилац (x) тежи јединици, следи да $\frac{x}{x^2-4x+3}$ тежи ка $+\infty$), следи да је $x = 1$ вертикална асимптота. У овом задатку се не тражи да се скицира график, те није потребно тражити десну граничну вредност $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)$. Такође, како је $\lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} \frac{x}{x^2-4x+3} = -\infty$ ($x^2 - 4x + 3$ има позитиван коефицијент уз x^2 , што значи да је негативно када је $1 < x < 3$; пошто тежи нули када x тежи тројци (с леве стране) и пошто бројилац (x) тежи тројци, следи да $\frac{x}{x^2-4x+3}$ тежи ка $-\infty$), следи да је $x = 3$ вертикална асимптота. Остаје још да се пронађу косе асимптоте када $x \rightarrow +\infty$ и када $x \rightarrow -\infty$. Како је $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{x^2-4x+3}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x(x^2-4x+3)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2-4x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2})} = 0$ и $n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{x}{x^2-4x+3} - 0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2})} = 0$, следи да је права $y = kx + n = 0 \cdot x + 0 = 0$ коса асимптота када $x \rightarrow +\infty$ (односно хоризонтална асимптота). Слично, како је $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x}{x^2-4x+3}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x(x^2-4x+3)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2-4x+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2})} = 0$ и како је $n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\frac{x}{x^2-4x+3} - 0) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2})} = 0$, следи да је права $y = kx + n = 0 \cdot x + 0 = 0$ коса асимптота када $x \rightarrow -\infty$ (односно хоризонтална асимптота).

6.7. (a) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8$

1. домен

Домен ове функције је $\mathbb{R}$. Не постоји ниједан ограничавајући фактор који би смањивао домен.

2. парност, непарност, периодичност

Домен је симетричан у односу на тачку 0, па има смисла испитивати парност и непарност. Како је $f(-x) = (-x)^4 - 6(-x)^2 + 8 = x^4 - 6x^2 + 8 = f(x)$, следи да је f парна функција и да није непарна. Функција није периодична, јер се не појављују тригонометријске функције.

3. нуле и знак

Испитујемо када је $f(x) = 0$, односно када је $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$. Уводимо смену $x^2 = t$, да бисмо добили квадратну једначину и добијамо $t^2 - 6t + 8 = 0$. Њена решења су $t_{1/2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2}$, односно $t_1 = \frac{6+2}{2} = \frac{8}{2} = 4$ и $t_2 = \frac{6-2}{2} = \frac{4}{2} = 2$. Како је $t = x^2$, добијамо да је $x^2 = 4$ или $x^2 = 2$, па следи да су нуле функције f дате са $x = \sqrt{4} = 2$, $x = -\sqrt{4} = -2$, $x = \sqrt{2}$ и $x = -\sqrt{2}$. Пошто је квадратна функција $t^2 - 6t + 8$ с позитивним коефицијентом уз t^2 , следи да је $t^2 - 6t + 8 > 0$ за $t < 2$ и за $t > 4$, а да је $t^2 - 6t + 8 < 0$ за $2 < t < 4$. Дакле, $f(x) > 0$ за $x^2 < 2$, односно

за $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$, односно на интервалу $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, и за $x^2 > 4$, односно за $x < -2$ и за $x > 2$, односно на скупу $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$. Такође, $f(x) < 0$ за $2 < x^2 < 4$, односно за $-2 < x < -\sqrt{2}$ и за $\sqrt{2} < x < 2$, односно на скупу $(-2, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 2)$.

4. асимптоте

Функција је непрекидна на $\mathbb{R}$, што значи да нема тачака у којима би се испитивао прекид функције f . Следи да f нема ветикалних асимптота. Једино има смисла тражити косе асимптоте. Како је $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 6x^2 + 8}{x} = +\infty$, следи да не постоји коса (а ни хоризонтална) асимптота када $x \rightarrow +\infty$. Лако се види да је и $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 6x^2 + 8}{x} = -\infty$, па не постоји коса (а ни хоризонтална) асимптота када $x \rightarrow -\infty$.

5. први и други извод

$$f'(x) = 4x^3 - 6 \cdot 2x + 0 = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3)$$

$$f''(x) = (f'(x))' = (4x^3 - 12x)' = 4 \cdot 3x^2 - 12 = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1)$$

6. монотоност и локални екстремуми

Испитујемо знак (првог) извода f' . Како је $f'(x) = 4x(x^2 - 3)$, следи да је $f'(x) > 0$ ако је $x > 0$ и $x^2 - 3 > 0$ или ако је $x < 0$ и $x^2 - 3 < 0$. Решавањем ових неједначина добијамо да је $f'(x) > 0$ ако је $x \in (-\sqrt{3}, 0)$ или ако је $x \in (\sqrt{3}, +\infty)$. Такође, онда је $f'(x) < 0$ ако је $x \in (-\infty, -\sqrt{3})$ или је $x \in (0, \sqrt{3})$. То значи да функција f опада на $(-\infty, -\sqrt{3})$, затим расте на $(-\sqrt{3}, 0)$, па опада на $(0, \sqrt{3})$, и на крају расте на $(\sqrt{3}, +\infty)$. Тачке $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ и $x = \sqrt{3}$ су тачке у којима се мења знак извода, па су то локални екстремуми. Тачније, пошто f опада на $(-\infty, -\sqrt{3})$, а затим расте на $(-\sqrt{3}, 0)$, следи да је тачка $x = -\sqrt{3}$ тачка локалног минимума. Слично се види да је тачка $x = 0$ тачка локалног максимума, и да је тачка $x = \sqrt{3}$ тачка локалног минимума.

7. закривљеност и превојне тачке

Испитујемо знак другог извода f'' . Како је $f''(x) = 12(x^2 - 1)$, следи да је $f''(x) > 0$ ако је $x^2 - 1 > 0$, односно ако је $x > 1$ или $x < -1$. Дакле, функција f је конвексна (закривљена је као срећна уста) на интервалу $(-\infty, -1)$ и на интервалу $(1, +\infty)$. Такође, $f''(x) < 0$ ако је $-1 < x < 1$, па је f конкавна (има облик као тужна уста) на интервалу $(-1, 1)$. Тачке $x = -1$ и тачке $x = 1$, у којима се мења закривљеност, јесу превојне тачке ове функције.

$$(б) f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}$$

1. домен

Домен ове функције су сви x такви да је $x^2 + 2 \geq 0$ (због квадратног корена) и за које је $\sqrt{x^2 + 2} \neq 0$ (јер се тај израз јавља у имениоцу

разломка). Дакле, $x^2 + 2 \geq 0$ и $x^2 + 2 \neq 0$, односно $x^2 + 2 > 0$. Како за свако x важи $x^2 \geq 0$, следи да је $x^2 + 2 \geq 0 + 2 = 2 > 0$, па су услови испуњени за све $x \in \mathbb{R}$. Онда је домен функције $\mathbb{R}$.

2. парност, непарност, периодичност

Домен функције је симетричан у односу на тачку 0, па има смисла испитивати парност и непарност. Како је $f(-x) = \frac{-x+2}{\sqrt{(-x)^2+2}} = \frac{-x+2}{\sqrt{x^2+2}}$ и не важи ни $f(-x) = f(x)$, нити $f(-x) = -f(x)$, следи да f није ни парна ни непарна. Пошто се не појављују тригонометријске функције, следи да није периодична.

3. нуле и знак

Решавамо једначину $f(x) = 0$, односно $\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}} = 0$. Следи да је $x + 2 = 0$, односно да је $x = -2$. Дакле, тачка $x = -2$ је нула функције f . За испитивање знака функције f решавамо неједначину $f(x) > 0$, па онда $f(x) < 0$. Како је увек $\sqrt{x^2+2} > 0$ (пошто је у имениоцу, мора бити различито од нуле, а квадратни корен је увек већи од нуле или једнак нули), следи да је $\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}} > 0$ ако је $x + 2 > 0$, односно $x > -2$. Слично је $f(x) < 0$ за $x < -2$.

4. асимптоте

Функција је непрекидна на $\mathbb{R}$, што значи да нема тачака у којима би се испитивао прекид, а самим тим нема ни вертикалних асимптота. Што се косих асимптота тиче, важи $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x\sqrt{x^2+2}} = 0$ и

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}} - 0 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1+\frac{2}{x})}{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x^2})}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1+\frac{2}{x})}{x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} = 1. \text{ Дакле, права } y = 0 \cdot x + 1, \text{ тј. права } y = 1$$

је коса асимптота када $x \rightarrow +\infty$. Пошто је коефицијент уз x једнак нули, ипак се каже да је то хоризонтална асимптота, јер је права $y = 1$ паралелна x -оси, односно хоризонтална је. Слично се добија да је $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} =$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{x\sqrt{x^2+2}} = 0 \text{ и } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}} - 0 \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(1+\frac{2}{x})}{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x^2})}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(1+\frac{2}{x})}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} \right) = -1.$$

Дакле, права $y = 0 \cdot x - 1$, тј. права $y = -1$ је коса (односно, хоризонтална) асимптота када $x \rightarrow -\infty$.

5. први и други извод

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{(x+2)' \sqrt{x^2+2} - (x+2) (\sqrt{x^2+2})'}{(\sqrt{x^2+2})^2} \\
 &= \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+2} - (x+2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+2}} \cdot (x^2+2)'}{x^2+2} \\
 &= \frac{\sqrt{x^2+2} - \frac{x+2}{2\sqrt{x^2+2}} \cdot 2x}{x^2+2} = \frac{\sqrt{x^2+2} - \frac{x(x+2)}{\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2} \\
 &= \frac{\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}} - \frac{x^2+2x}{\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2} = \frac{2-2x}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}} = 2 \cdot \frac{1-x}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= (f'(x))' = \left(2 \frac{1-x}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}} \right)' \\
 &= 2 \cdot \frac{(1-x)'(x^2+2)^{\frac{3}{2}} - (1-x) \left((x^2+2)^{\frac{3}{2}} \right)'}{(x^2+2)^3} \\
 &= 2 \cdot \frac{(-1) \cdot (x^2+2)^{\frac{3}{2}} - (1-x) \cdot \frac{3}{2} (x^2+2)^{\frac{3}{2}-1} \cdot (x^2+2)'}{(x^2+2)^3} \\
 &= 2 \cdot \frac{-(x^2+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} (1-x) (x^2+2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x}{(x^2+2)^3} \\
 &= 2(x^2+2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{-(x^2+2) - 3(1-x)x}{(x^2+2)^3} = 2 \cdot \frac{-x^2-2-(3x-3x^2)}{(x^2+2)^3 \cdot (x^2+2)^{-\frac{1}{2}}} \\
 &= 2 \cdot \frac{-x^2-2-3x+3x^2}{(x^2+2)^{3-\frac{1}{2}}} = 2 \cdot \frac{2x^2-3x-2}{(x^2+2)^{\frac{5}{2}}}
 \end{aligned}$$

6. монотоност и локални екстремуми

Испитујемо знак функције f' . Како је $2 \cdot \frac{1-x}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}} > 0$ ако је $1-x > 0$ (јер је $(x^2+2)^{\frac{3}{2}} > 0$ за све x), односно $x < 1$, следи да је f растућа на интервалу $(-\infty, 1)$. Такође, $f'(x) < 0$ ако је $x > 1$, па је f опадајућа на интервалу $(1, +\infty)$. Дакле, тачка $x = 1$ је локални екстремум (пошто у тој тачки извод мења знак) и то је локални максимум.

7. закривљеност функције и превојне тачке

Испитујемо знак функције f'' . Како је $2 \cdot \frac{2x^2-3x-2}{(x^2+2)^{\frac{5}{2}}} > 0$ ако је $2x^2-3x-2 > 0$ ((јер је $(x^2+2)^{\frac{5}{2}} > 0$ за све x), следи та треба решити квадратну неједначину $2x^2-3x-2 > 0$. Решења одговарајуће квадратне једначине

су $x_{1/2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}$, односно $x_1 = \frac{3+5}{4} = \frac{8}{4} = 2$ и $x_2 = \frac{3-5}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$, па пошто је коефицијент уз x^2 позитиван, следи да је $f''(x) > 0$ ако је $x < -\frac{1}{2}$ или је $x > 2$. Дакле, f је конвексна на интервалу $(-\infty, -\frac{1}{2})$ и на интервалу $(2, +\infty)$. Такође, $f''(x) < 0$ ако је $-\frac{1}{2} < x < 2$, односно f је конкавна на интервалу $(-\frac{1}{2}, 2)$. Како се у тачкама $x = -\frac{1}{2}$ и $x = 2$ мења закривљеност функције, следи да су то превојне тачке.

(в) $f(x) = \frac{e^{-x}}{x-2}$

1. домен

Домен ове функције су сви $x \in \mathbb{R}$ такви да је $x - 2 \neq 0$, односно $x \neq 2$. Дакле, домен је $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

2. парност, непарност, периодичност

Домен функције је $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$, што значи да домен није симетричан у односу на тачку $x = 0$ (заиста, тачка $x = -2$ припада домену, а тачка $-x = -(-2) = 2$ не припада домену). Према томе, функција није ни парна ни непарна. Није ни периодична, јер се не појављују тригонометријске функције.

3. нуле и знак

Решавамо једначину $f(x) = 0$, односно $\frac{e^{-x}}{x-2} = 0$. Дакле, мора бити $e^{-x} = 0$, што је немогуће, јер је $e^{-x} > 0$ за све x . Следи да $f(x)$ нема ниједну нулу. За знак решавамо нпр. неједначину $f(x) > 0$, односно $\frac{e^{-x}}{x-2} > 0$. Како је $e^{-x} > 0$, онда мора бити и $x - 2 > 0$, односно $x > 2$. Следи да је f позитивна на $(2, +\infty)$ и негативна на $(-\infty, 2)$.

4. асимптоте

Проверавамо да ли је $x = 2$ вертикална асимптота. Како је $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{e^{-x}}{x-2} = -\infty$ (мало пре смо установили да је f негативна за све $x < 2$, а како $x - 2$ тежи нули бројилац тежи ка e^{-2} , следи да f тежи ка $-\infty$), следи да је $x = 2$ вертикална асимптота. Због скицирања графика, занима нас и какво је понашање када $x \rightarrow 2+$, па добијамо да је $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{e^{-x}}{x-2} = +\infty$ (f је позитивна за све $x > 2$, именилац $x - 2$ тежи нули, а бројилац e^{-x} тежи ка e^{-2}). Остаје још да испитамо косе асимптоте када $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$. Како је $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^{-x}}{x-2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x(x-2)} = 0$ (e^{-x} тежи нули када $x \rightarrow +\infty$, а именилац $x(x-2)$ тежи ка $+\infty$, те све заједно $\frac{e^{-x}}{x(x-2)}$ тежи нули) и $n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-x}}{x-2} - 0 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x-2} = 0$, следи да је права $y = 0 \cdot x + 0 = 0$ коса асимптота када $x \rightarrow +\infty$ (заправо, кажемо да је то хоризонтална асимптота, јер је коефицијент правца $k = 0$, па права није коса у односу на координатни

систем). С друге стране, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{e^{-x}}{x-2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x(x-2)} = +\infty$ (јер је бројилац експоненцијална функција, која је јача него степена функција x^2 која је најјачи фактор у имениоцу), па закључујемо да не постоји коса асимптота када $x \rightarrow -\infty$.

5. први и други извод

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{(e^{-x})'(x-2) - e^{-x}(x-2)'}{(x-2)^2} = \frac{e^{-x} \cdot (-x)'(x-2) - e^{-x} \cdot 1}{(x-2)^2} \\
 &= \frac{e^{-x} \cdot (-1) \cdot (x-2) - e^{-x}}{(x-2)^2} = \frac{-e^{-x}(x-2) - e^{-x}}{(x-2)^2} \\
 &= \frac{-e^{-x}(x-2+1)}{(x-2)^2} = -\frac{e^{-x}(x-1)}{(x-2)^2} \\
 f''(x) &= (f'(x))' = -\frac{(e^{-x}(x-1))'(x-2)^2 - (e^{-x}(x-1))((x-2)^2)'}{((x-2)^2)^2} \\
 &= -\frac{((e^{-x})'(x-1) + e^{-x}(x-1)')(x-2)^2 - e^{-x}(x-1)(2(x-2) \cdot (x-2)')}{(x-2)^4} \\
 &= -\frac{(e^{-x} \cdot (-x)'(x-1) + e^{-x} \cdot 1)(x-2)^2 - 2e^{-x}(x-1)(x-2) \cdot 1}{(x-2)^4} \\
 &= -\frac{(e^{-x} \cdot (-1) \cdot (x-1) + e^{-x})(x-2)^2 - 2e^{-x}(x-1)(x-2)}{(x-2)^3} \\
 &= -\frac{-e^{-x}(x-1-1)(x-2) - 2e^{-x}(x-1)}{(x-2)^3} \\
 &= -\frac{-e^{-x}((x-2)^2 + 2(x-1))}{(x-2)^3} = \frac{e^{-x}(x^2 - 4x + 4 + 2x - 2)}{(x-2)^3} \\
 &= \frac{e^{-x}(x^2 - 2x + 2)}{(x-2)^3}
 \end{aligned}$$

6. монотоност и локални екстремуми

Испитујемо знак првог извода. Како је $e^{-x} > 0$ и $(x-2)^2 > 0$ (јер је $x \neq 2$), следи да знак првог извода зависи само од знака $x-1$. Како је $x-1 > 0$ ако је $x > 1$, следи да је $f'(x) < 0$ на интервалима $(1, 2)$ и $(2, +\infty)$, а $f'(x) > 0$ на интервалу $(-\infty, 1)$ (у $f'(x)$ јавља се минус, па је знак извода супротан од знака $x-1$). Дакле, f је растућа на $(-\infty, 1)$ и опадајућа на $(1, 2)$ и на $(2, +\infty)$. Једини локални екстремум функције f је локални максимум $x = 1$.

7. закривљеност и превојне тачке

Испитујемо знак другог извода. Како је $e^{-x} > 0$ и $x^2 - 2x + 2 = x^2 - 2x + 1 + 1 = (x-1)^2 + 1 \geq 1 > 0$, следи да знак другог извода зависи

само од знака $(x - 2)^3$, који је исти као знак од $x - 2$. Дакле, $f''(x) > 0$ ако је $x - 2 > 0$, односно $x > 2$ и $f''(x) < 0$ ако је $x < 2$. Према томе, f је конкавна на $(-\infty, 2)$ и конвексна на $(2, +\infty)$.

$$(Г) f(x) = \frac{x+2}{1-\ln(x+2)}$$

1. домен

Домен ове функције су сви $x \in \mathbb{R}$ такви да је $x + 2 > 0$ (аргумент логаритма), односно $x > -2$ и $1 - \ln(x + 2) \neq 0$ (именилац разломка), односно $\ln(x + 2) \neq 1$, односно $x + 2 \neq e^1 = e$, тј. $x \neq e - 2$. Према томе, домен функције је $(-2, e - 2) \cup (e - 2, +\infty)$.

2. парност, непарност, периодичност

Домен није симетричан у односу на тачку $x = 0$, те функција није ни парна ни непарна. Није ни периодична, јер се не појављују тригонометријске функције.

3. нуле и знак

Решавамо једначину $f(x) = 0$, тј. $\frac{x+2}{1-\ln(x+2)} = 0$. Дакле, мора бити $x + 2 = 0$, односно $x = -2$, међутим, та тачка није у домену функције f , па функција f нема нула. За знак решавамо нпр. неједначину $f(x) > 0$, односно $\frac{x+2}{1-\ln(x+2)} > 0$. Како је $x + 2 > 0$, мора бити $1 - \ln(x + 2) > 0$, односно $\ln(x + 2) < 1$, односно $x + 2 < e^1 = e$, тј. $x < e - 2$. Дакле, f је позитивна на $(-2, e - 2)$, а негативна је на $(e - 2, +\infty)$.

4. асимптоте

Проверавамо да ли су $x = -2$ и $x = e - 2$ вертикалне асимптоте. Како је $\lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{x+2}{1-\ln(x+2)} = 0$ (јер $x + 2$ тежи нули, а $\ln(x + 2)$ тежи ка $-\infty$, па $-\ln(x + 2)$ и $1 - \ln(x + 2)$ теже ка $+\infty$), следи да $x = -2$ није вертикална асимптота. Како је $\lim_{x \rightarrow e-2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow e-2-} \frac{x+2}{1-\ln(x+2)} = +\infty$ (f је позитивна за $x < e - 2$, а $1 - \ln(x + 2)$ тежи нули, па $\frac{x+2}{1-\ln(x+2)}$ тежи ка $+\infty$), следи да је $x = e - 2$ вертикална асимптота. Због скицирања графика, потражимо и десну граничну вредност. Добија се $\lim_{x \rightarrow e-2+} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow e-2+} \frac{x+2}{1-\ln(x+2)} = -\infty$. Нема смисла испитивати косу асимптоту када $x \rightarrow -\infty$, јер f није дефинисана за $x < -2$, те ћемо испитати да ли постоји коса асимптота када $x \rightarrow +\infty$. Како је $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x+2}{1-\ln(x+2)}}{x} =$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x(1-\ln(x+2))} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1+\frac{2}{x})}{x(1-\ln(x+2))} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{1-\ln(x+2)} = 0$ (јер $\ln(x + 2)$ тежи ка $+\infty$, па $1 - \ln(x + 2)$ тежи ка $-\infty$, а $1 + \frac{2}{x}$ тежи јединици), али

је $n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{1-\ln(x+2)} - 0 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{1-\ln(x+2)} = -\infty$ (израз у бројиоцу је степена 1, а у имениоцу је логаритам, а познато је та било која степена функција брже тежи бесконачности од логаритма; може се применити и Лопиталово правило (пробајте за домаћи) и добиће

се да је гранична вредност $-\infty$), следи да f нема косу асимптоту када $x \rightarrow +\infty$.

5. први и други извод

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{(x+2)'(1-\ln(x+2)) - (x+2)(1-\ln(x+2))'}{(1-\ln(x+2))^2} \\
 &= \frac{1 \cdot (1-\ln(x+2)) - (x+2) \left(-\frac{1}{x+2} \cdot (x+2)'\right)}{(1-\ln(x+2))^2} \\
 &= \frac{1-\ln(x+2) - (x+2) \left(-\frac{1}{x+2} \cdot 1\right)}{(1-\ln(x+2))^2} = \frac{1-\ln(x+2) + 1}{(1-\ln(x+2))^2} \\
 &= \frac{2-\ln(x+2)}{(1-\ln(x+2))^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= (f'(x))' \\
 &= \frac{(2-\ln(x+2))'(1-\ln(x+2))^2 - (2-\ln(x+2))((1-\ln(x+2))^2)'}{((1-\ln(x+2))^2)^2} \\
 &= \frac{-\frac{1}{x+2} \cdot (x+2)' \cdot (1-\ln(x+2))^2 - (2-\ln(x+2)) \cdot 2(1-\ln(x+2)) \cdot (1-\ln(x+2))'}{(1-\ln(x+2))^4} \\
 &= \frac{-\frac{1}{x+2} \cdot (1-\ln(x+2)) - 2(2-\ln(x+2)) \left(-\frac{1}{x+2} \cdot (x+2)'\right)}{(1-\ln(x+2))^3} \\
 &= \frac{-\frac{1-\ln(x+2)}{x+2} - (4-2\ln(x+2)) \cdot \left(-\frac{1}{x+2} \cdot 1\right)}{(1-\ln(x+2))^3} \\
 &= \frac{-\frac{1-\ln(x+2)}{x+2} + \frac{4-2\ln(x+2)}{x+2}}{(1-\ln(x+2))^3} = \frac{\frac{3-\ln(x+2)}{x+2}}{(1-\ln(x+2))^3} \\
 &= \frac{3-\ln(x+2)}{(x+2)(1-\ln(x+2))^3}
 \end{aligned}$$

6. монотоност и локални екстремуми

Испитујемо знак првог извода. Како је $(1-\ln(x+2))^2 > 0$, важи да је $f'(x) > 0$ ако и само ако је $2-\ln(x+2) > 0$, односно $\ln(x+2) < 2$, односно $x+2 < e^2$, тј. $x < e^2 - 2$. Према томе, $f'(x) > 0$ на интервалима $(-2, e-2)$ и $(e-2, e^2-2)$, а $f'(x) < 0$ на $(e^2-2, +\infty)$, односно f расте на $(-2, e-2)$ и на $(e-2, e^2-2)$, а опада на $(e^2-2, +\infty)$. Тачка $x = e^2 - 2$ је тачка локалног максимума.

7. закривљеност и превојне тачке

Испитујемо знак другог извода. Како је $x+2 > 0$, знак другог извода зависи од знака $3-\ln(x+2)$ и $(1-\ln(x+2))^3$, тј. од $1-\ln(x+2)$. Важи да је $f''(x) > 0$ ако су $3-\ln(x+2)$ и $1-\ln(x+2)$ оба негативна или оба

позитивна, а пошто је, очигледно, $3 - \ln(x+2) > 1 - \ln(x+2)$, следи да су оба негативна ако је већи од њих негативан, а да су оба позитивна ако је мањи од њих позитиван. Према томе, $f''(x) > 0$ ако је $3 - \ln(x+2) < 0$ или је $1 - \ln(x+2) > 0$, односно ако је $\ln(x+2) > 3$ или је $\ln(x+2) < 1$. Коначно, закључујемо да је $f''(x) > 0$ ако је $x + 2 > e^3$, односно $x > e^3 - 2$, или је $x + 1 < e^1 = e$, односно $x < e - 2$. Следи да је f конвексна на интервалима $(-2, e - 2)$ и $(e^3 - 2, +\infty)$, а да је конкавна на интервалу $(e - 2, e^3 - 2)$. Тачка $x = e - 2$ није у домену функције f , па не може бити превојна тачка, а тачка $x = e^3 - 2$ јесте превојна тачка функције f .

7 Неодређени интеграл

7.1. (а) $\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx$

Једноставним ослобађањем заграде се добија

$$\int (x\sqrt{x} - x + \sqrt{x} + x - \sqrt{x} + 1) dx = \int (x\sqrt{x} + 1) dx = \int (x \cdot x^{\frac{1}{2}} + 1) dx.$$

Користимо особину да је $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$, па је тражени интеграл

$$\int x^{1+\frac{1}{2}} dx + \int 1 \cdot dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx + \int x^0 dx.$$

Из таблице интеграла видимо да је решење

$$\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + \frac{x^{0+1}}{0+1} + c = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^1}{1} + c = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + x + c.$$

(б) $\int (6x^2 + 8x + 3) dx$

Користимо особине интеграла да је $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$ и да је $\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx$ па је решење

$$\begin{aligned} & \int 6x^2 dx + \int 8x dx + \int 3 dx = 6 \int x^2 dx + 8 \int x dx + 3 \int dx \\ &= 6 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} + 8 \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} + 3 \int x^0 dx = \frac{6}{3}x^3 + \frac{8}{2}x^2 + 3 \cdot \frac{x^{0+1}}{0+1} + c \\ &= 2x^3 + 4x^2 + 3x + c. \end{aligned}$$

(в)

$$\int \left(\sin x - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \int \sin x dx - \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cos x - (-\operatorname{ctg} x) + c$$

(г)

$$\int (5^x + x^5) dx = \int 5^x dx + \int x^5 dx = \frac{5^x}{\ln 5} + \frac{x^{5+1}}{5+1} + c = \frac{5^x}{\ln 5} + \frac{1}{6}x^6 + c$$

(д)

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x^2} \right) dx &= \int \frac{1}{x} dx + \int x^{-2} dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \ln |x| + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + \arctg x + c = \ln |x| + \frac{x^{-1}}{-1} + \arctg x + c \\ &= \ln |x| - \frac{1}{x} + \arctg x + c \end{aligned}$$

(ђ)

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + e^x \right) dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int e^x dx = \arcsin x + e^x + c$$

За решавање интеграла често се користи смена променљиве. Смена се обично уводи тако што се каже да је $x = \varphi(t)$ и свако појављивање x мења се новим изразом по t , а dx мења се са $\varphi'(t)dt$. Није необично ни да се неки израз по x прогласи новом променљивом t ($t = \psi(x)$), а онда се уводи $dt = \psi'(x)dx$.

7.2. (а) $\int \frac{dx}{x-a}$ Уводимо смену $x - a = t$, односно $x = t + a$. Тада је $dx = (t + a)'dt = 1 \cdot dt = dt$, па добијамо

$$\int \frac{dt}{t} = \ln |t| + c.$$

Враћањем смене добијамо да је решење $\ln |x - a| + c$.

(б) $\int \frac{dx}{x-a}$ Уводимо исту смену, $x - a = t$, односно $x = t + a$. Тада је $dx = (t + a)'dt = 1 \cdot dt = dt$, па добијамо

$$\int \frac{dt}{t^n} = \int t^{-n} dt = \frac{t^{-n+1}}{-n+1} + c = -\frac{1}{n-1} t^{-(n-1)} + c = -\frac{1}{(n-1)t^{n-1}} + c.$$

Враћањем смене добијамо да је решење $\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + c$.

(в) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

Претпоставићемо да је $a > 0$, јер ако је $a < 0$, можемо увести $b = -a$ и добићемо $a^2 = b^2$, па се подинтегрална функција своди на исти израз, где је a замењено са b . Извршимо следећу трансформацију:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{dx}{a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}.$$

Уведимо смену $\frac{x}{a} = t$. Тада је $dt = \left(\frac{x}{a}\right)' dx = \frac{1}{a}(x)'dx = \frac{1}{a}dx = \frac{dx}{a}$ (исто бисмо добили да смо изразили $x = at$ и $dx = (at)'dt = a(t)'dt = a dt$). Након смене добијамо:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + c = \arcsin \frac{x}{a} + c.$$

(г) (д) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$

Као и малопре, претпоставићемо да је $a > 0$. Извршимо следећу трансформацију:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 \left(\frac{x^2}{a^2} \pm 1\right)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2} \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm 1}} = \int \frac{dx}{a \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm 1}}.$$

Уведимо смену $\frac{x}{a} = t$. Као и малопре, добијамо $\frac{dx}{a} = dt$. Након смене добијамо:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm 1}} = \ln \left| t + \sqrt{t^2 \pm 1} \right| + c = \ln \left| \frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm 1} \right| + c.$$

(ђ) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$

Као и у претходним примерима, претпоставимо да је $a > 0$. Извршимо сличну трансформацију:

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \int \frac{dx}{a^2 \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)} = \int \frac{dx}{a^2 \left(1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)}$$

Уведимо смену $t = \frac{x}{a}$. Добијамо $dt = \frac{dx}{a}$, односно $dx = a dt$, па је

$$\int \frac{a dt}{a^2(1+t^2)} = \int \frac{dt}{a(1+t^2)} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c.$$

(е) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$

Овај задатак се не решава на сличан начин као претходна три. Наиме, постоји правило код интеграције функција облика $\frac{1}{ax^2+bx+c}$. Ако квадратна једначина $ax^2 + bx + c$ нема реалних решења ($b^2 - 4ac < 0$), онда квадратну функцију $ax^2 + bx + c$ није могуће раставити на чиниоце, али је могуће извршити трансформацију $ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + d\right)$, где је $d = \frac{4ac-b^2}{4a^2} > 0$. Након увођења смене $x + \frac{b}{2a} = t$, проблем се своди на тражење интеграла функције $k \cdot \frac{1}{t^2 + (\sqrt{d})^2}$, што смо видели како се ради у претходном примеру. Ако, пак, квадратна једначина $ax^2 + bx + c = 0$ има реалних решења,

онда је могуће растављање на чиниоце $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Након тога се врше трансформације које ће бити описане у решењу овог задатка.

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \int \frac{dx}{(x - a)(x + a)} = \int \left(\frac{A}{x - a} + \frac{B}{x + a} \right) dx$$

Сада је потребно пронаћи A и B такве да је $\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x + a}$. Једноставним свођењем израза с десне стране једнакости на заједнички именилац добија се

$$\frac{A(x + a)}{(x - a)(x + a)} + \frac{B(x - a)}{(x - a)(x + a)} = \frac{Ax + Aa}{x^2 - a^2} + \frac{Bx - Ba}{x^2 - a^2} = \frac{(A + B)x + (A - B)a}{x^2 - a^2},$$

па мора бити $A + B = 0$ и $(A - B)a = 1$, јер је израз с леве стране једнакости била функција $\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{0 \cdot x + 1}{x^2 - a^2}$. Из прве једначине следи $-B = A$, што заменом у другу даје $(A + A)a = 1$, односно $2Aa = 1$, па је $A = \frac{1}{2a}$. Дакле, $B = -A = -\frac{1}{2a}$, те добијамо да је

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \int \left(\frac{\frac{1}{2a}}{x - a} + \frac{-\frac{1}{2a}}{x + a} \right) dx = \frac{1}{2a} \left(\int \frac{dx}{x - a} - \int \frac{dx}{x + a} \right).$$

Увођењем смене $t = x - a$ у први и $u = x + a$ у други интеграл ($dt = (x - a)'dx = dx$ и $du = (x + a)'dx = dx$) добијамо

$$\frac{1}{2a} \left(\int \frac{dt}{t} - \int \frac{du}{u} \right) = \frac{1}{2a} \cdot (\ln |t| - \ln |u| + c) = \frac{1}{2a} \left(\ln \left| \frac{t}{u} \right| + c \right),$$

што је, након враћања смене, $\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + \frac{c}{2a}$. Како је $\frac{c}{2a}$ нека константа, а сама константа c се нигде више не појављује, обично се у том случају прогласи да је $\frac{c}{2a}$ нова константа која се додаје на крају интеграла и да јој се име c . Према томе, решење овог задатка је

$$\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + c.$$

(ж) $\int \frac{x}{a^2 + x^2} dx$

Приликом решавања интеграла, некад је веома корисно учавати подизразе $\varphi(x)dx$ за које се одмах види функција $\Phi(x)$ таква да је $\Phi'(x) = \varphi(x)$, те је $d\Phi(x) = \varphi(x)dx$. Нпр, за израз $2xdx$ одмах се види да је $2x = (x^2)'$, па је $d(x^2) = 2xdx$. Наравно, додавање константе не мења вредност извода, па је $d(a^2 + x^2) = 2xdx$. Израз $a^2 + x^2$ се јавља у имениоцу, а израз xdx се јавља у бројиоцу, што нас мотивише да уведемо смену $a^2 + x^2 = t$. Тада је $dt = (a^2 + x^2)'dx = 2xdx$, па добијамо

$$\int \frac{\frac{1}{2}dt}{t} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \cdot \ln |a^2 + x^2| + c.$$

$$(3) \int \frac{x^3}{x^8-2} dx$$

Слично као малопре, уочимо да је $x^3 dx$ израз за који се лако види да нам треба функција x^4 , јер је $d(x^4) = (x^4)' dx = 4x^3 dx$. Такође, у имениоцу се јавља $x^8 = (x^4)^2$, па је веома добро увести смену $t = x^4$. Тада је $dt = 4x^3 dx$ и добијамо

$$\int \frac{\frac{1}{4} dt}{t^2 - 2} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{(t - \sqrt{2})(t + \sqrt{2})} = \frac{1}{4} \left(\int \frac{A}{t - \sqrt{2}} dt + \int \frac{B}{t + \sqrt{2}} dt \right).$$

Тражимо A и B такве да је

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^2 - 2} &= \frac{A}{t - \sqrt{2}} + \frac{B}{t + \sqrt{2}} = \frac{A(t + \sqrt{2})}{(t - \sqrt{2})(t + \sqrt{2})} + \frac{B(t - \sqrt{2})}{(t - \sqrt{2})(t + \sqrt{2})} \\ &= \frac{At + A\sqrt{2}}{t^2 - 2} + \frac{Bt - B\sqrt{2}}{t^2 - 2} = \frac{(A + B)t + (A - B)\sqrt{2}}{t^2 - 2}. \end{aligned}$$

Дакле, $A + B = 0$ и $(A - B)\sqrt{2} = 1$, па је $-B = A$ и $(A + A)\sqrt{2} = 1$, односно $2A\sqrt{2} = 1$. Следи да је $A = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ и $B = -A = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Према томе, решење је

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4} \left(\int \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{t - \sqrt{2}} dt + \int \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}}{t + \sqrt{2}} dt \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\int \frac{dt}{t - \sqrt{2}} - \int \frac{dt}{t + \sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{1}{8\sqrt{2}} \left(\ln |t - \sqrt{2}| - \ln |t + \sqrt{2}| + c \right) = \frac{1}{8\sqrt{2}} \left(\ln \left| \frac{t - \sqrt{2}}{t + \sqrt{2}} \right| + c \right) \\ &= \frac{1}{8\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t - \sqrt{2}}{t + \sqrt{2}} \right| + c' = \frac{1}{8\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^4 - \sqrt{2}}{x^4 + \sqrt{2}} \right| + c'. \end{aligned}$$

Други метод који се користи за решавање неодређеног интеграла јесте парцијална интеграција. Ако је функција под знаком интеграла производ функција $f(x)$ и $g(x)$, при чему је лако наћи функцију $G(x)$ такву да је $G'(x) = g(x)$, односно $G(x) = \int g(x) dx$, онда је

$$\int f(x)g(x)dx = f(x)G(x) - \int G(x)f'(x)dx.$$

Заиста, из формуле за извод прозвода следи да је $(f(x)G(x))' = f'(x)G(x) + f(x)G'(x) = G(x)f'(x) + f(x)g(x)$. Обично се парцијална интеграција памти на следећи начин: $f(x) = u$, $g(x)dx = dv$, $f'(x)dx = du$, $G(x) = v$ и пише се

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

7.3. (a) $\int x \ln x dx$

Пошто се $\int x dx$ лако налази, урадимо парцијалну интеграцију, где је $u = \ln x$, $dv = x dx$. Тада је $du = \frac{1}{x} dx$ и $v = \frac{1}{2}x^2$, па је

$$\begin{aligned}\int x \ln x dx &= uv - \int v du = \ln x \cdot \left(\frac{1}{2}x^2\right) - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}x^2 + c \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + c.\end{aligned}$$

(б) $\int x^2 \ln x dx$

Слично као малопре, радимо парцијалну интеграцију, где је $u = \ln x$ и $dv = x^2 dx$. Тада је $du = \frac{1}{x} dx$ и $v = \frac{1}{3}x^3$, па је

$$\begin{aligned}\int x^2 \ln x dx &= uv - \int v du = \ln x \cdot \left(\frac{1}{3}x^3\right) - \int \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}x^3 + c \\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + c.\end{aligned}$$

(в) $\int \ln^2 x dx$

Код парцијалне интеграције друга функција не мора бити експлицитно написана, већ се увек може узети да је под знаком интеграла производ дате функције и функције $g(x) = 1$. Зато је лакше користити метод са u и v , јер кад се јединица споји са dx , видимо да можемо одабрати $dv = 1 \cdot dx = dx$. Зато узмимо $u = \ln^2 x$ и $dv = dx$ за парцијалну интеграцију. Тада је $du = 2 \ln x \cdot (\ln x)' dx = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx$ и $v = x$, па је

$$\begin{aligned}\int \ln^2 x dx &= uv - \int v du = \ln^2 x \cdot x - \int x \cdot 2 \ln x \frac{1}{x} dx \\ &= x \ln^2 x - 2 \int \ln x dx.\end{aligned}$$

Остао је још интеграл $\int \ln x dx$. На њега ћемо такође применити парцијалну интеграцију, где је $u = \ln x$ и $dv = dx$. Тада је $du = \frac{1}{x} dx$ и $v = x$, па је

$$\begin{aligned}\int \ln^2 x dx &= x \ln^2 x - 2 \int \ln x dx = x \ln^2 x - 2 \left(uv - \int v du \right) \\ &= x \ln^2 x - 2 \left(\ln x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \right) \\ &= x \ln^2 x - 2x \ln x + 2 \int dx = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + c.\end{aligned}$$

$$(\Gamma) \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$$

Поново урадимо парцијалну интеграцију, где је $u = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ и $dv = dx$. Тада је

$$\begin{aligned} du &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot (x + \sqrt{1+x^2})' dx \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot (1+x^2)'\right) dx \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot (2x)\right) dx \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) dx \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) dx \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \end{aligned}$$

(при чему смо ово могли видети и из таблице интеграла, јер је познато да је $\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$) и $v = x$, па је

$$\begin{aligned} \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx &= uv - \int v du \\ &= \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx. \end{aligned}$$

Уведимо смену $t = 1 + x^2$. Тада је $dt = 2x dx$, па је

$$\begin{aligned} \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx &= \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ &= x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \int \frac{\frac{1}{2} dt}{\sqrt{t}} \\ &= x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c \\ &= x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c \\ &= x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{t} + c \\ &= x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + c. \end{aligned}$$

$$(д) \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$$

Нека је $u = \ln x$ и $dv = \frac{dx}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}} dx$. Тада је $du = \frac{1}{x} dx$ и $v = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}$, па је

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx &= uv - \int v du = \ln x \cdot (2\sqrt{x}) - \int 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= 2\sqrt{x} \ln x - 2 \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \ln x - 2 \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= 2\sqrt{x} \ln x - 2 \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2\sqrt{x} \ln x - 2 \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c \\ &= 2\sqrt{x} \ln x - 2 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x} + c. \end{aligned}$$

$$(ђ) \int x \sin x dx$$

Код овог интеграла морамо пажљиво бирати шта ће бити u , а шта dv . Ако икако можемо, бирамо да u буде степена функција (у овом случају, $u = x$), јер ће се након примене парцијалне интеграције појавити интеграл где имамо du , а познато је да извод смањује степен степене функције за 1. Циљ је да тај степен смањујемо док не дође до нуле, јер је тада заправо елиминисана та степена функција из интеграла. Зато, нека је $u = x$ и $dv = \sin x dx$. Тада је $du = dx$ и $v = -\cos x$, па је

$$\begin{aligned} \int x \sin x dx &= uv - \int v du = x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + c. \end{aligned}$$

$$(е) \int x \cos 3x dx$$

Ради лакшег баратања с парцијалном интеграцијом, уведемо смену $3x = t$. Тада је $3dx = dt$, па добијамо $\int \frac{t}{3} \cdot \cos t \cdot \frac{dt}{3} = \frac{1}{9} \int t \cos t dt$. Слично као малопре, урадимо парцијалну интеграцију где је $u = t$ и $dv = \cos t dt$. Тада је $du = dt$ и $v = \sin t$, па је

$$\begin{aligned} \frac{1}{9} \int t \cos t dt &= uv - \int v du = \frac{1}{9} \left(t \cdot \sin t - \int \sin t dt \right) \\ &= \frac{1}{9} (t \sin t - (-\cos t) + c) = \frac{1}{9} (3x \sin 3x + \cos 3x + c) \\ &= \frac{1}{3} x \sin 3x + \frac{1}{9} \cos 3x + c_1 \end{aligned}$$

($\frac{1}{9}c$ је и даље константа, па се може означити са c_1).

(ж) $\int e^x \cos x dx$

Пошто је извод e^x једнак e^x и пошто је извод $\cos x$ једнак $-\sin x$, а његов извод је $-\cos x$, значи да је свеједно коју ћемо функцију одабрати за u , а коју за dv , јер се након неколико примена добија иста функција као на почетку. Но, то не значи да је интеграл нерешив. Нека је $u = e^x$ и $dv = \cos x dx$. Тада је $du = e^x dx$ и $v = \sin x$, па је

$$\int e^x \cos x dx = uv - \int v du = e^x \sin x - \int \sin x e^x dx.$$

Сада морамо направити исти избор за u и v као малопре, иначе ће се поништити парцијална интеграција која је примењена. Зато нека је сада $u = e^x$ и $dv = \sin x dx$. Тада је $du = e^x dx$ и $v = -\cos x$, па је

$$\begin{aligned} \int e^x \cos x dx &= e^x \sin x - \left(uv - \int v du \right) \\ &= e^x \sin x - \left(e^x (-\cos x) - \int (-\cos x) e^x dx \right) \\ &= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx. \end{aligned}$$

Означимо полазни интеграл са I . Из претходног следи да смо добили једначину $I = e^x \sin x + e^x \cos x - I + c$ (неопходно је додати $+c$, јер је интеграл заправо функција чији је извод подинтегрална функција, а таква функција није јединствена, већ се додавањем константе такође добија функција чији је извод подинтегрална функција, па је могуће да функција $\int e^x \cos x dx$ на левој страни разликује од функције $\int e^x \cos x dx$ за неку константу). Према томе, следи да је $2I = e^x \sin x + e^x \cos x + c$, па је $I = \frac{1}{2}e^x \sin x + \frac{1}{2}e^x \cos x + c_1$ (поново, $\frac{1}{2}c$ је нека друга константа, која се може означити са c_1).

(з) $\int \arcsin x dx$

Нека је $u = \arcsin x$ и $dv = dx$. Тада је $du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ и $v = x$, па је

$$\int \arcsin x dx = uv - \int v du = \arcsin x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Уведимо смену $1 - x^2 = t$. Тада је $-2x dx = dt$, па је

$$\begin{aligned} \int \arcsin x dx &= x \arcsin x - \int \frac{-\frac{1}{2} dt}{\sqrt{t}} = x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} \\ &= x \arcsin x + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{t} + c = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c. \end{aligned}$$

(и) $\int x \operatorname{arctg} x dx$

Нека је $u = \operatorname{arctg} x$ и $dv = x dx$. Тада је $du = \frac{1}{1+x^2} dx$ и $v = \frac{1}{2}x^2$, па је

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{arctg} x dx &= uv - \int v du = \operatorname{arctg} x \cdot \left(\frac{1}{2}x^2\right) - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2} dx \\&= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx \\&= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx \\&= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \left(\frac{1+x^2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \\&= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \\&= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int 1 \cdot dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} dx \\&= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + c.\end{aligned}$$