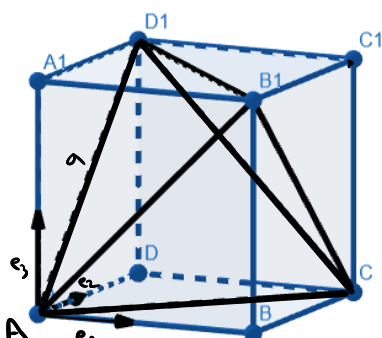


3.8. У погодно одабраном ортонормираном реперу одредити координате темена а) правилног тетраедра ивице a ; б) правилног октаедра ивице d .

а)  $A_e: \vec{e}_1 = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}, \vec{e}_2 = \frac{\vec{AD}}{\|\vec{AD}\|}, \vec{e}_3 = \frac{\vec{AA_1}}{\|\vec{AA_1}\|}$

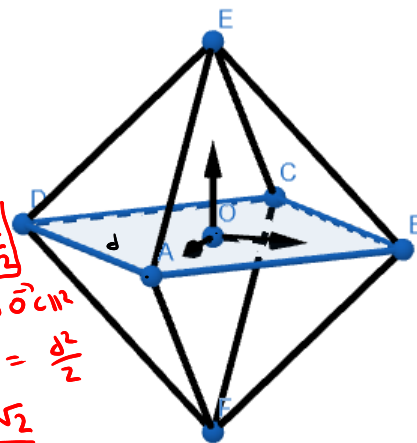
$\Rightarrow A(0,0,0), C(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}, 0)$
 $B_1(\frac{a}{\sqrt{2}}, 0, \frac{a}{\sqrt{2}}), D_1(0, \frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}})$

нормала тетраедра
 $\|\vec{AB}\| = \frac{\|\vec{AC}\|}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$
 $\|\vec{AD}\| = \|\vec{AA_1}\|$
нормале коске

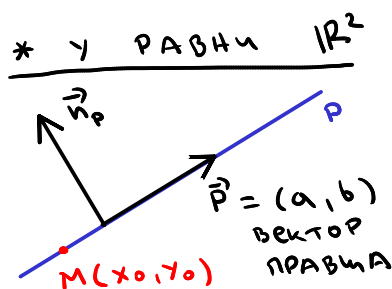
б) $O_e: \vec{e}_1 = \frac{\vec{OA}}{\|\vec{OA}\|}, \vec{e}_2 = \frac{\vec{OB}}{\|\vec{OB}\|}, \vec{e}_3 = \frac{\vec{OE}}{\|\vec{OE}\|}$

$\Rightarrow A(\frac{d}{\sqrt{2}}, 0, 0), B(0, \frac{d}{\sqrt{2}}, 0)$
 $C(-\frac{d}{\sqrt{2}}, 0, 0), D(0, -\frac{d}{\sqrt{2}}, 0)$
 $E(0, 0, \frac{d}{\sqrt{2}}), F(0, 0, -\frac{d}{\sqrt{2}})$

$\|\vec{OA}\| = \|\vec{OB}\|$
 $= \frac{\|\vec{AC}\|}{2} = \frac{d\sqrt{2}}{2} = \frac{d}{\sqrt{2}}$
 $\|\vec{OE}\|^2 = \|\vec{CE}\|^2 - \|\vec{OC}\|^2$
 $= d^2 - (\frac{d}{\sqrt{2}})^2 = \frac{d^2}{2}$
 $\Rightarrow \|\vec{OE}\| = \frac{d}{\sqrt{2}}$



4 Тачка, права и раван



$P: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}$

$x = at + x_0$
 $P: y = bt + y_0, t \in \mathbb{R}$

* $\vec{p} = (a, b), \vec{n}_p \perp \vec{p} \Rightarrow \vec{n}_p = (b, -a)$

* УГЛО ИЗМЕТЉУ ДВЕ ПРАВЕ p и q

$\cos \angle(p, q) = \left| \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{\|\vec{p}\| \cdot \|\vec{q}\|} \right|$

* РАСТОЈАЊЕ ТАЧКЕ $M(x_0, y_0)$ ОД ПРАВЕ $P: Ax + By + C = 0$

$d(M, P) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

$y = kx + n$
 $k = \tan \alpha$
 $x = x_0$

$p: b(x-x_0) = a(y-y_0)$

$p: bx - ay + ay_0 - bx_0 = 0$

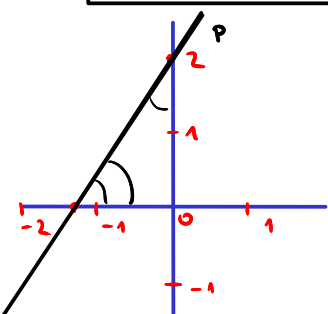
$P: Ax + By + C = 0$

$\Downarrow$
 ВЕКТОР НОРМАЛЕ $\vec{n}_p = (A, B)$

$\angle(\vec{p}, \vec{q}) \in [0, \pi]$

$\angle(p, q) \in [0, \pi/2]$

4.1. Одредити углове које права $p: 3x - 2y + 4 = 0$ гради са координатним осама.



$p: 3x - 2y + 4 = 0$

$\frac{x}{-4/3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{0}$

$\Rightarrow \vec{n}_p = (3, -2) \Rightarrow \vec{p} = (2, 3)$

$\cos \angle(p, O_x) = \frac{|\vec{p} \cdot \vec{O_x}|}{\|\vec{p}\| \cdot \|\vec{O_x}\|} = \frac{2}{\sqrt{13}}$

$\Rightarrow \angle(p, O_x) = \arccos \frac{2}{\sqrt{13}}$

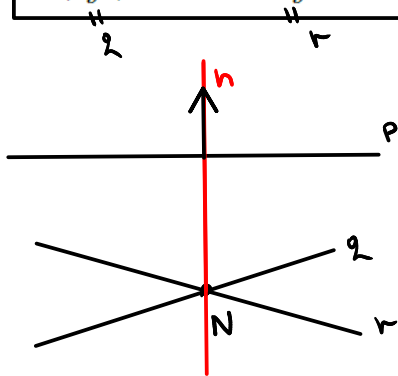
$O_x: y = 0 \Rightarrow \vec{n}_{O_x} = (0, 1)$

$O_y: x = 0 \Rightarrow \vec{n}_{O_y} = (1, 0)$

$\Rightarrow \vec{O_x} = (1, 0), \vec{O_y} = (0, 1)$

$$\cos \Delta(P, O_Y) = \frac{|\vec{p} \cdot \vec{O_Y}|}{\|\vec{p}\| \|\vec{O_Y}\|} = \frac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow \Delta(P, O_Y) = \arccos \frac{3}{\sqrt{13}}$$

4.2. Одредити једначину праве n која је нормална на праву $p: 2x + 3y - 4 = 0$ и која садржи пресек правих $x + y + 1 = 0$ и $x - y = 0$.



$$\begin{aligned} \ell: x + y + 1 &= 0 \\ r: x - y &= 0 \end{aligned}$$

$$2x + 1 = 0$$

$$x = -1/2$$

$$y = -1/2$$

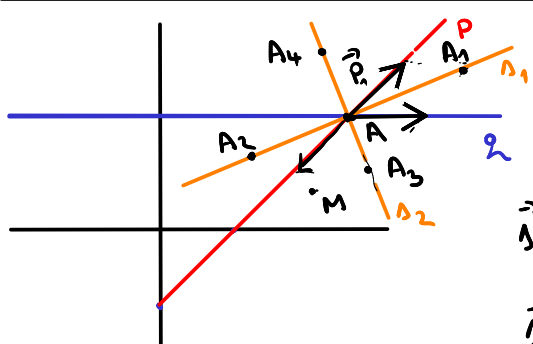
$$N(-1/2, -1/2)$$

$$n \perp p \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{p}$$

$$\vec{n}_p = (2, 3) = \vec{n}$$

$$n: \frac{x + 1/2}{2} = \frac{y + 1/2}{3}$$

4.3. Праве $p: y = x - 2$ и $q: y = 3$ разлажу раван на четири угла. а) Одредити једначине обе симетрале тих углова. б) Без цртања, у сваком од четири угла одредити по једну тачку A_1, A_2, A_3, A_4 . в) Одредити која од тачака A_i је у истом углу као тачка $M(1, 4)$. Проверити цртањем.



$$I \text{ НАЧИН} \quad p \cap q = A(5, 3)$$

$$p: x - y - 2 = 0 \Rightarrow \vec{n}_p = (1, -1) \Rightarrow \vec{p} = (1, 1)$$

$$q: y - 3 = 0 \Rightarrow \vec{n}_q = (0, 1) \Rightarrow \vec{q} = (1, 0)$$

$$\vec{A}_1 = \frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|} + \frac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|} = \frac{(1, 1)}{\sqrt{2}} + \frac{(1, 0)}{1} = (\frac{1}{\sqrt{2}} + 1, \frac{1}{\sqrt{2}}) \parallel (1 + \sqrt{2}, 1)$$

$$\vec{A}_2 = \frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|} - \frac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|} = (\frac{1}{\sqrt{2}} - 1, \frac{1}{\sqrt{2}}) \parallel (1 - \sqrt{2}, 1)$$

$$\Rightarrow \Delta_1: \frac{x - 5}{1 + \sqrt{2}} = \frac{y - 3}{1}, \quad \Delta_2: \frac{x - 5}{1 - \sqrt{2}} = \frac{y - 3}{1}$$

II НАЧИН

$$M(x_0, y_0) \in \Delta \text{ произв.} \quad d(M, p) = d(M, q)$$

$$\frac{|x_0 - y_0 - 2|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{|y_0 - 3|}{\sqrt{1}} \Rightarrow |x_0 - y_0 - 2| = \sqrt{2} |y_0 - 3|$$

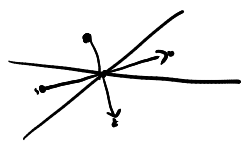
$$\neq |A| = |B|$$

$$\Rightarrow A = B \vee A = -B$$

$$\Delta_1: x - y - 2 = \sqrt{2}(y - 3)$$

$$\Delta_2: x - y - 2 = -\sqrt{2}(y - 3)$$

$$\begin{aligned} \text{б) } A_1 &= A + \vec{A}_1 \Rightarrow A_1(6 + \sqrt{2}, 4) & A_3 &= A + \vec{A}_2 \Rightarrow A_3(6 - \sqrt{2}, 4) \\ A_2 &= A - \vec{A}_1 \Rightarrow A_2(4 - \sqrt{2}, 2) & A_4 &= A - \vec{A}_2 \Rightarrow A_4(4 + \sqrt{2}, 2) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{в) } f_p > 0 & \quad f_r < 0 & f_r(x, y) &= Ax + By + C \\ f_p(x, y) &= x - y - 2 & f_q(x, y) &= y - 3 \\ f_r &= 0 & M(1, 4) &\Rightarrow f_p(M) = -5 < 0, f_q(M) = 1 > 0 \end{aligned}$$

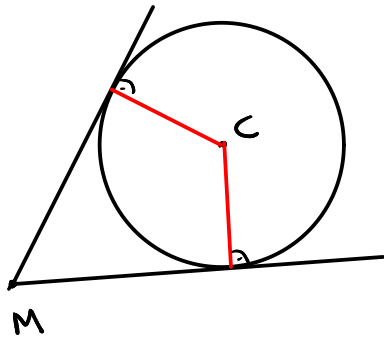
$$f_q(A_2) = f_q(A_4) = -1 < 0 \Rightarrow M \text{ и } A_2(A_4) \text{ са супротних страна } q$$

$$f_q(A_1) = f_q(A_3) = 1 > 0 \quad \checkmark$$

$$f_p(A_1) = \sqrt{2} > 0 \quad f_p(A_3) = -\sqrt{2} < 0 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow M \text{ и } A_3 \text{ су у истом углу}$$

4.4. Одредити једначине тангенти из тачке $M(1,2)$ на круг $k: (x-1)^2 + (y-7)^2 = 9$.



$$k: (x-1)^2 + (y-7)^2 = r^2 \Rightarrow C(1, 7), r \text{ полупречник}$$

$$\Rightarrow C(1, 7), r=3, t: ax+by+c=0$$

$$1) M(1, 2) \in t \Rightarrow a+2b+c=0 \Rightarrow \boxed{c=-a-2b}$$

$$2) d(C, t) = r \Leftrightarrow t \text{ ТАНГЕНТА НА } k$$

$$\frac{|a+7b-a-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 3 / 2$$

$$\Rightarrow 25b^2 = 9(a^2+b^2) \Rightarrow b^2 = \frac{9}{16}a^2 \Rightarrow \boxed{b = \pm \frac{3}{4}a}$$

$$\text{I} \quad b = \frac{3}{4}a \Rightarrow c = -\frac{5}{2}a$$

$$\text{II} \quad b = -\frac{3}{4}a \Rightarrow c = \frac{1}{2}a$$

$$t_1: ax + \frac{3}{4}ay - \frac{5}{2}a = 0$$

$$t_2: ax - \frac{3}{4}ay + \frac{1}{2}a = 0$$

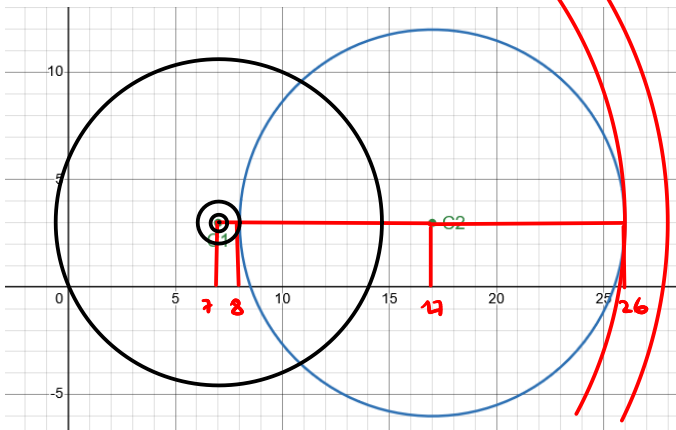
$$\boxed{a=4 \Rightarrow t_1: 4x + 3y - 10 = 0}$$

$$\boxed{t_2: 4x - 3y + 2 = 0}$$

4.5. Дати су кругови: $k_1: (x-7)^2 + (y-3)^2 = r_1^2$ и $k_2: (x-17)^2 + (y-3)^2 = 81$. а) У зависности од полупречника $r_1 > 0$ дискутовати број заједничких тангенти ових кругова. б) За $r_1 = 3$ одредити једначине заједничких тангенти ових кругова.

$$k_1: C_1(7, 3), r_1$$

$$k_2: C_2(17, 3), r_2 = 9$$



$$a) r_1 \in (0, 1) \Rightarrow \boxed{4 \text{ T}}$$

$$r_1 = 1 \Rightarrow \boxed{3 \text{ T}}$$

$$r_1 \in (1, 19) \Rightarrow \boxed{2 \text{ T}}$$

$$r_1 = 19 \Rightarrow \boxed{1 \text{ T}}$$

$$r_1 > 19 \Rightarrow \boxed{\text{НЕМА Т}}$$

$$b) t: ax+by+c=0$$

$$1) t \text{ ТАНГ. НА } k_1 \Leftrightarrow d(C_1, t) = 3 \Rightarrow \frac{|7a+3b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 3 \quad (*)$$

$$2) t \text{ ТАНГ. НА } k_2 \Leftrightarrow d(C_2, t) = 9 \Rightarrow \frac{|17a+3b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 9 \quad \#$$

$$\Rightarrow |17a+3b+c| = 3|7a+3b+c|$$

$$\text{I} \quad 17a+3b+c = 21a+9b+3c$$

$$4a+6b+2c=0$$

$$\boxed{c = -2a-3b}$$

$$\text{II} \quad 17a+3b+c = -21a-9b-3c$$

$$38a+12b+4c=0$$

$$c = -3b - \frac{19}{2}a$$

$$(*) \Rightarrow |5a| = 3\sqrt{a^2+b^2} / 2$$

$$25a^2 = 9a^2 + 9b^2$$

$$(*) \Rightarrow |-\frac{5}{2}a| = 3\sqrt{a^2+b^2} / 2$$

$$16a^2 = 9b^2$$

$$4a = 3b$$

$$c = -6a$$

$$4a = -3b$$

$$c = 2a$$

$$L: 3ax + 3by + 3c = 0$$

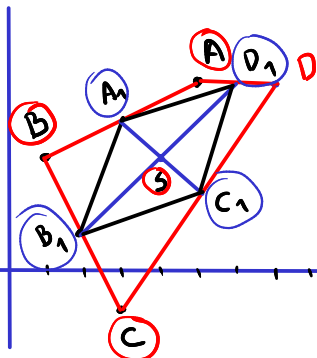
$$a=1 \quad L_1: 3x + 4y - 18 = 0$$

$$\frac{25}{4}a^2 = 9a^2 + 9b^2$$

$$-\frac{11}{4}a^2 = \frac{9b^2}{>0}$$

$$L_2: 3x - 4y + 6 = 0$$

4.6. Координате три темена четвороугла $ABCD$ су $A(5,5), B(1,3), C(3,-1)$. Темена четвороугла $A_1B_1C_1D_1$ су редом средишта страница AB, BC, CD, DA , а пресек дијагонала A_1C_1 и B_1D_1 је тачка $S_1(4,3)$. Одредити координате темена D и однос површина ова два четвороугла.



* $A_1B_1C_1D_1$ ПАРАЛЕЛОГРАМ ?

$$\begin{aligned} \vec{A_1B_1} &= \vec{A_1B} + \vec{BB_1} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC} = \frac{1}{2}\vec{AC} \\ \vec{D_1C_1} &= \vec{D_1D} + \vec{DC_1} = \frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{DC} = \frac{1}{2}\vec{AC} \end{aligned} \Rightarrow \text{ПАРАЛЕЛ.}$$

$$\Rightarrow S = S(A_1C_1), \quad S = S(B_1D_1)$$

$$\begin{aligned} A(5,5) & \quad B(1,3) & \quad C(3,-1) \\ A_1(3,4) & \quad B_1(2,1) & \\ D_1(6,5) & \quad C_1(5,2) & \\ & \quad S(4,3) & \\ & \quad D(7,5) & \end{aligned}$$

$$P_{A_1B_1C_1D_1} = \|\vec{A_1B_1} \times \vec{A_1D_1}\|$$

$$\Rightarrow \vec{A_1B_1} = (-1, -3, 0)$$

$$\vec{A_1D_1} = (3, 1, 0) \Rightarrow \vec{A_1B_1} \times \vec{A_1D_1} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 8)$$

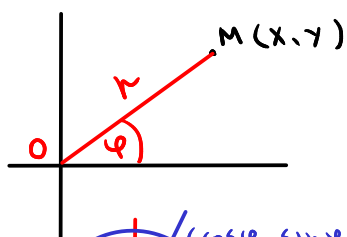
$$\Rightarrow P_{A_1B_1C_1D_1} = 8$$

$$P_{ABCD} = P_{ABC} + P_{ADC} = 10 + 6 = 16$$

$$\vec{AB} = (-4, -2, 0) \quad \vec{AC} = (-2, -6, 0) \quad \vec{AD} = (2, 0, 0)$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10, \quad P_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \|\vec{AC} \times \vec{AD}\| = 6$$

4.7. У поларним координатама одредити: а) једначину праве $p: \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$. б) Једначину праве q која са x -осом гради угао $\phi_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, а на растојању је $r_0 \geq 0$ од координатног почетка.



$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned}$$

а)

$$p: \frac{r \cos \varphi}{m} + \frac{r \sin \varphi}{n} = 1$$

б) $L: ax + by + c = 0$

$$1) \varphi_0 \Rightarrow \vec{r} = (\cos \varphi_0, \sin \varphi_0) \Rightarrow \vec{n}_r = (\sin \varphi_0, -\cos \varphi_0)$$

$$\Rightarrow L: x \sin \varphi_0 - y \cos \varphi_0 + c = 0$$

$$2) r_0 = d(O, L) = \frac{|c|}{\sqrt{\sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0}} = |c| \Rightarrow c = \pm r_0$$

$$L_{1/2}: r \cos \varphi \sin \varphi_0 - r \sin \varphi \cos \varphi_0 \pm r_0 = 0$$