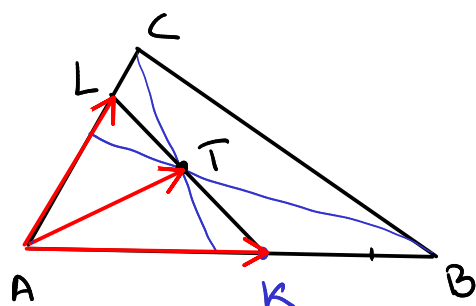


1.16. На страницама AB и AC троугла ABC дате су редом тачке K и L , такве да важи $\frac{KB}{AK} + \frac{LC}{AL} = 1$. Доказати да тежиште троугла ABC припада дужи KL .



T је тежиште ΔABC

$$\Rightarrow \vec{OT} = \frac{1}{3} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$

$$O \equiv A \Rightarrow \vec{AT} = \frac{1}{3} \vec{AB} + \frac{1}{3} \vec{AC} \quad (*)$$

$$\frac{KB}{AK} + \frac{LC}{AL} = 1 \Rightarrow \alpha + \beta = 1$$

$$\alpha = \frac{KB}{AK} = \frac{\vec{KB}}{\vec{AK}} \Rightarrow \vec{KB} = \alpha \vec{AK} \Rightarrow \vec{AB} = \vec{AK} + \vec{KB} = \vec{AK} + \alpha \vec{AK} = (\alpha + 1) \vec{AK}$$

$$\beta = \frac{LC}{AL} = \frac{\vec{LC}}{\vec{AL}} \Rightarrow \vec{LC} = \beta \vec{AL} \Rightarrow \vec{AC} = \vec{AL} + \vec{LC} = \vec{AL} + \beta \vec{AL} = (\beta + 1) \vec{AL}$$

$$\vec{AT} = \frac{\alpha + 1}{3} \vec{AK} + \frac{\beta + 1}{3} \vec{AL}$$

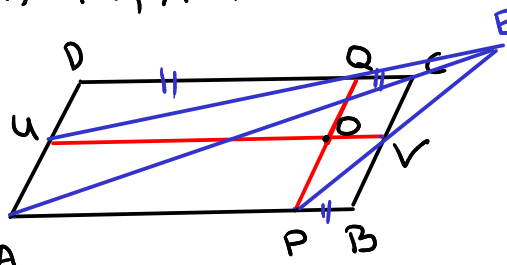
$$1.5 \quad T \in KL \Leftrightarrow \frac{\alpha + 1}{3} + \frac{\beta + 1}{3} = 1 \Rightarrow T \in KL$$

$$\frac{\alpha + 1 + \beta + 1}{3} = \frac{3}{3} = 1 \quad \checkmark \quad \frac{\alpha + 1}{3} > 0 \quad \frac{\beta + 1}{3} > 0$$

$$\Rightarrow T \in \text{дужи } KL$$

1.17. Дат је паралелограм $ABCD$ и у његовој унутрашњости тачка O . Две праве које садрже тачку O и паралелне страницама паралелограма, секу странице паралелограма у тачкама $P \in AB, Q \in CD, U \in AD$ и $V \in BC$. Доказати да се праве PV, QU и AC секу у једној тачки или су паралелне.

1) PV, AC, QU конкурентне? претп. $AC \cap PV = \{E\}$



Доказујемо $E \in QU$:

ΔABC $P \in AB, V \in BC, E \in AC$ колич.

$$\frac{\vec{AP}}{\vec{PB}} \cdot \frac{\vec{BV}}{\vec{VC}} \cdot \frac{\vec{CE}}{\vec{EA}} = -1 \quad \checkmark$$

$$E \in QU \Leftrightarrow Q, U, E \text{ колич.} \quad \frac{\vec{CQ}}{\vec{QD}} \cdot \frac{\vec{DU}}{\vec{UA}} \cdot \frac{\vec{AE}}{\vec{EC}} = -1 \quad ?$$

$$\vec{CQ} = \vec{BP}, \vec{QD} = \vec{PA} \\ \vec{DU} = \vec{CV}, \vec{UA} = \vec{VB}$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{BP}}{\vec{PA}} \cdot \frac{\vec{CV}}{\vec{VB}} \cdot \frac{\vec{AE}}{\vec{EC}} = \frac{1}{-1} = -1$$

$\Rightarrow Q, U, E$ колич $\Rightarrow AC, PV, QU$ конк. $\checkmark$

2) AC, PV, QU паралелне

претп. $AC \parallel PV$. Доказ. $AC \parallel QU$

$$\text{Талес} \Rightarrow \frac{\vec{BV}}{\vec{VC}} = \frac{\vec{BP}}{\vec{PA}}$$

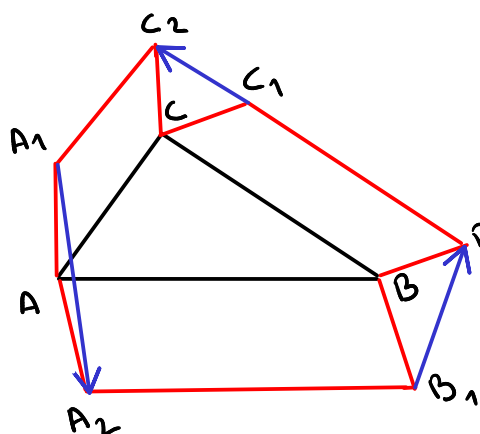
$$\Rightarrow \frac{\vec{AU}}{\vec{UD}} = \frac{\vec{CQ}}{\vec{QD}} \Rightarrow \frac{\vec{DU}}{\vec{UA}} = \frac{\vec{DQ}}{\vec{QC}}$$

Талес $\Rightarrow$

$$\boxed{AC \parallel QU}$$

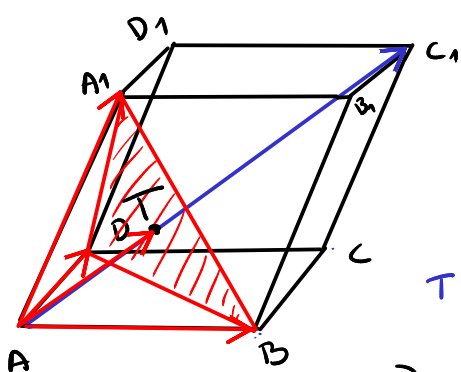
$\Rightarrow AC, PV, QU$ паралелне

1.18. Над страницами треугола ABC конструисани су паралелограми ABB_1A_2 , BCC_1B_2 , CAA_1C_2 . Доказати да је $\vec{A_1A_2} + \vec{B_1B_2} + \vec{C_1C_2} = \vec{0}$.



$$\begin{aligned} & \vec{A_1A_2} + \vec{B_1B_2} + \vec{C_1C_2} \\ &= \vec{A_1A} + \vec{AA_2} + \vec{B_1B} + \vec{BB_2} + \vec{C_1C} + \vec{CC_2} \\ &= \vec{A_1A} + \vec{AA_2} + \vec{A_2A} + \vec{BB_2} + \vec{B_2B} + \vec{AA_1} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

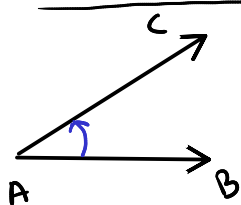
1.19. Дат је паралелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Доказати да је продор T дијагонале AC_1 кроз раван одређену тачкама B, D и A_1 тежиште троугла BDA_1 .



$$\begin{aligned} & \vec{AT} = \alpha \vec{AC_1} \quad (\vec{T} \in AC_1) \\ & \vec{AT} = \alpha \cdot (\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CC_1}) \\ & \vec{AT} = \alpha \vec{AB} + \alpha \vec{AD} + \alpha \vec{AA_1} \\ & \vec{T} \in BDA_1 \quad \boxed{1.6} \Rightarrow \alpha + \alpha + \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3} \\ & \Rightarrow \vec{AT} = \frac{1}{3} \vec{AB} + \frac{1}{3} \vec{AD} + \frac{1}{3} \vec{AA_1} \Rightarrow T \text{ је тежиште } \triangle BDA_1 \end{aligned}$$

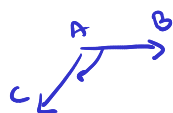
2 Скаларни, векторски и мешовити производ

* СКАЛАРНИ ПРОИЗВОД



$$\angle(\vec{AB}, \vec{AC}) = \angle(AB, AC) \quad \text{полуправе}$$

$$\Rightarrow \angle(\vec{AB}, \vec{AC}) \in [0, \pi]$$



$$\|\vec{AB}\| = \text{РАСТОЈАЊЕ ИЗМЕЂУ } A \text{ и } B$$

$$\vec{u}, \vec{v} \in V \Rightarrow \vec{u} \circ \vec{v} = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle := \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \angle(\vec{u}, \vec{v})$$

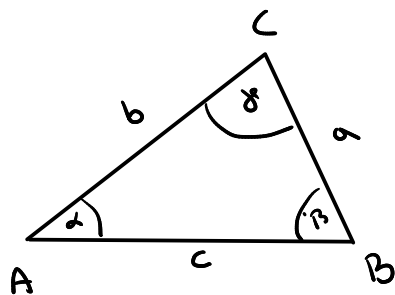
$$* \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{u} \circ \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \quad (\text{ОРТОГОНАЛНИ})$$

$$* \|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \circ \vec{u} \Rightarrow \|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \circ \vec{u}}$$

Особине

- 1) $\vec{u} \circ \vec{v} = \vec{v} \circ \vec{u}$
- 2) $\vec{u} \circ (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \circ \vec{v} + \vec{u} \circ \vec{w}$
- 3) $(\alpha \vec{u}) \circ \vec{v} = \alpha \cdot \vec{u} \circ \vec{v}$
- 4) $\vec{u} \circ \vec{u} \geq 0$
 $\vec{u} \circ \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

2.1. Доказати да је за троугао ABC испуњен услов $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ (косинусна теорема).



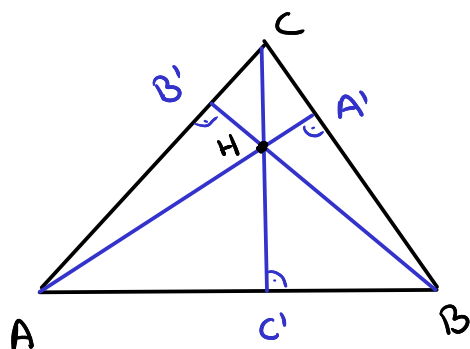
$$a = \|\vec{BC}\| \quad b = \|\vec{AC}\| \quad c = \|\vec{AB}\|$$

$$\begin{aligned} c^2 &= \|\vec{AB}\|^2 = \vec{AB} \circ \vec{AB} \\ &= (\vec{AC} + \vec{CB}) \circ (\vec{AC} + \vec{CB}) \\ &= \|\vec{AC}\|^2 + \vec{AC} \circ \vec{CB} + \vec{CB} \circ \vec{AC} + \|\vec{CB}\|^2 \\ &= b^2 + a^2 + 2 \vec{AC} \circ \vec{CB} \\ &= a^2 + b^2 - 2 \vec{CA} \circ \vec{CB} \end{aligned}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \|\vec{CA}\| \cdot \|\vec{CB}\| \cdot \cos \angle(\vec{CA}, \vec{CB})$$

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma}$$

2.2. Доказати да се висине троугла секу у једној тачки (ортоцентар).



$$AA' \perp BC, \quad BB' \perp AC, \quad CC' \perp AB$$

Претп. $AA' \cap BB' = \{H\}$. Доказујемо $H \in CC'$:

$$\Leftrightarrow \vec{CH} \perp \vec{AB}$$

$$\Leftrightarrow \vec{CH} \circ \vec{AB} = 0$$

$$H \in AA' \Rightarrow \vec{AH} \circ \vec{CB} = 0$$

$$H \in BB' \Rightarrow \vec{BH} \circ \vec{CA} = 0$$

$$\vec{CH} = \vec{CA} + \vec{AH} \quad / \circ \vec{CB}$$

$$\vec{CH} = \vec{CB} + \vec{BH} \quad / \circ \vec{CA}$$

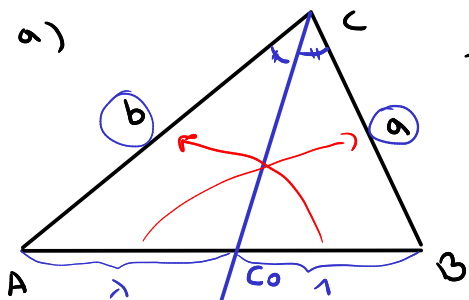
$$\Rightarrow \vec{CH} \circ \vec{CB} = \vec{CA} \circ \vec{CB} + 0$$

$$\vec{CH} \circ \vec{CA} = \vec{CB} \circ \vec{CA} + 0$$

$$\Rightarrow \vec{CH} \circ \vec{CB} - \vec{CH} \circ \vec{CA} = 0 \Rightarrow \vec{CH} \circ (\vec{CB} - \vec{CA}) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{CH} \circ \vec{AB} = 0 \Rightarrow H \in CC'$$

2.3. а) Доказати да симетрала унутрашњег угла у троуглу дели наспрамну страну у односу суседних страна. б) Доказати да се симетрале унутрашњих углова у троуглу секу у једној тачки (центар уписаног круга). Упутство: користити Чеваову теорему.



$$\text{Доказујемо } \|\vec{AD}\| : \|\vec{CD}\| = b : a$$

$$\text{Претп. } \vec{AD} = \lambda \vec{CD} \quad \text{Доказ. } \lambda = \frac{b}{a} = \frac{\|\vec{CA}\|}{\|\vec{CB}\|}$$

$$\boxed{1.4} \Rightarrow \vec{CD} = \frac{1}{\lambda + 1} \vec{CA} + \frac{\lambda}{\lambda + 1} \vec{CB} \quad (*)$$

$$\angle(\vec{CA}, \vec{CD}) = \angle(\vec{CB}, \vec{CD}) \Rightarrow \cos \angle(\vec{CA}, \vec{CD}) = \cos \angle(\vec{CB}, \vec{CD})$$

$$\frac{\vec{CA} \circ \vec{CD}}{\|\vec{CA}\| \cdot \|\vec{CD}\|} = \frac{\vec{CB} \circ \vec{CD}}{\|\vec{CB}\| \cdot \|\vec{CD}\|}$$

$$\Leftrightarrow a \cdot \vec{CA} \cdot \left(\frac{1}{\lambda+1} \vec{CA} + \frac{\lambda}{\lambda+1} \vec{CB} \right) = b \cdot \vec{CB} \cdot \left(\frac{1}{\lambda+1} \vec{CA} + \frac{\lambda}{\lambda+1} \vec{CB} \right) \quad /_{\lambda+1}$$

$$a \cdot b^2 + a\lambda \vec{CA} \cdot \vec{CB} = b \cdot \vec{CB} \cdot \vec{CA} + b\lambda \cdot a^2$$

$$\lambda (a \vec{CA} \cdot \vec{CB} - b a^2) = b \vec{CB} \cdot \vec{CA} - a b^2$$

$$\lambda a (\vec{CA} \cdot \vec{CB} - a b) = b (\vec{CB} \cdot \vec{CA} - a b) \quad /: \vec{CA} \cdot \vec{CB} - a b$$

$$\lambda a = b \Rightarrow \lambda = \frac{b}{a}$$

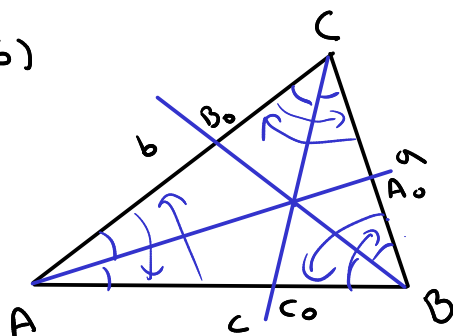
$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} \neq a b = \|\vec{CA}\| \cdot \|\vec{CB}\|$$

$$\|\vec{CA}\| \cdot \|\vec{CB}\| \cdot \cos \angle(\vec{CA}, \vec{CB}) \neq \|\vec{CA}\| \cdot \|\vec{CB}\|$$

$$\cos \angle(\vec{CA}, \vec{CB}) \neq 1 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{AC}_0}{\vec{C_0B}} = \lambda = \frac{b}{a}$$

б)



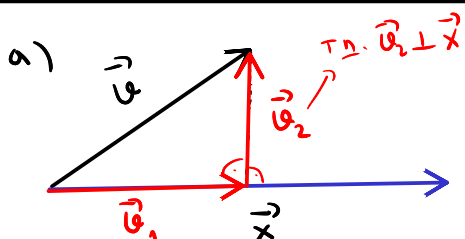
AA_0, BB_0, CC_0 конкyрентне

$$\Leftrightarrow \frac{\vec{AC}_0}{\vec{C_0B}} \cdot \frac{\vec{BA}_0}{\vec{A_0C}} \cdot \frac{\vec{CB}_0}{\vec{B_0A}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} = 1 \quad \checkmark$$

$\Rightarrow AA_0, BB_0, CC_0$ су конкyрентне

2.4. а) Доказати да се нормална пројекција вектора $\vec{v}$ на вектор $\vec{x}$ може записати у облику $\vec{v}_1 = \frac{\vec{v} \cdot \vec{x}}{\|\vec{x}\|^2} \vec{x}$. б) Ако су $\vec{v} = (1, 1, 1)$, $\vec{x} = (1, 2, 2)$ дати координатама у ортонормираној бази одредити једнозначно разлагање $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ вектора $\vec{v}$ на пројекцију и ортогоналну допуну ($\vec{v}_2 \perp \vec{x}$).



$$\vec{v}_1 = \lambda \vec{x}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \lambda \vec{x} + \vec{v}_2 \quad / \cdot \vec{x}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} \cdot \vec{x} + \underbrace{\vec{v}_2 \cdot \vec{x}}_{=0}$$

$$\lambda = \frac{\vec{v} \cdot \vec{x}}{\vec{x} \cdot \vec{x}} \Rightarrow \lambda = \frac{\vec{v} \cdot \vec{x}}{\|\vec{x}\|^2}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = \frac{\vec{v} \cdot \vec{x}}{\|\vec{x}\|^2} \cdot \vec{x}$$

б) СТАНДАРДНИ СКАЛАРНИ ПРОИЗВОД У $\mathbb{R}^3$

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3, \|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

$$\vec{u} = (1, 1, 1), \quad \vec{x} = (1, 2, 2)$$

$$\vec{u} \circ \vec{x} = (1, 1, 1) \circ (1, 2, 2) = 1 + 2 + 2 = 5$$

$$\|\vec{x}\|^2 = \vec{x} \circ \vec{x} = 1^2 + 2^2 + 2^2 = 9$$

$$\Rightarrow \vec{u}_1 = \frac{\vec{u} \circ \vec{x}}{\|\vec{x}\|^2} \vec{x} = \frac{5}{9} (1, 2, 2) = \left(\frac{5}{9}, \frac{10}{9}, \frac{10}{9}\right)$$

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \Rightarrow \vec{u}_2 = \vec{u} - \vec{u}_1 = (1, 1, 1) - \left(\frac{5}{9}, \frac{10}{9}, \frac{10}{9}\right)$$

$$\vec{u}_2 = \left(\frac{4}{9}, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{9}\right), \quad \vec{u}_1 = \left(\frac{5}{9}, \frac{10}{9}, \frac{10}{9}\right)$$

$$\vec{u}_1 \circ \vec{u}_2 = \frac{20}{81} - \frac{10}{81} - \frac{10}{81} = 0 \Rightarrow \vec{u}_1 \perp \vec{u}_2$$

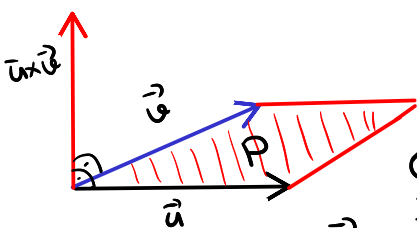
Def Векторски производ $\vec{u} \times \vec{v}$ вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$ је вектор т.д.

1) праваци $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}, \vec{v}$

2) смер т.д. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v})$ позитивно оријентисана

3) дужина

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \angle(\vec{u}, \vec{v}) = P_{\square}$$



Особине:

$$1) \vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$$

$$2) (\alpha \vec{u}) \times \vec{v} = \alpha (\vec{u} \times \vec{v})$$

$$3) (\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$$

$$4) \vec{u} \times \vec{w} = 0 \Rightarrow \vec{u} \text{ и } \vec{w} \text{ колинеарни}$$

Def Мешовити производ вектора $\vec{u}, \vec{v}$ и $\vec{w}$ је

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{w} \quad - \text{ број.}$$

Особине: 1) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]$

$$2) [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$$

$$3) [\alpha \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \alpha [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$$

$$4) [\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}]$$

$$5) V_{\text{паралелепипеда}} = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$$

$$V_{\text{тетраедра}} = \frac{1}{6} |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$$

$$6) [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ колинеарни}$$

Двоstrуки векторски производ

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \circ \vec{w}) \vec{v} - (\vec{v} \circ \vec{w}) \vec{u}$$

