

1.7. У простору је dato n тачака $A_1, \dots, A_n$ ($n \geq 2$) и тачка O . Тежиште тог скупа тачака је тачка T дефинисана са

$$\vec{OT} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \vec{OA}_i.$$

а) Доказати да дефиниција тачке T не зависи од избора тачке O .

Са $T_i, i = 1, \dots, n$ означимо тежиште скупа тачака који настаје из датог скупа изабацивањем тачке A_i .

б) Доказати да се све дужи $A_i T_i$ ($1 \leq i \leq n$) секу у тачки T и да је $\vec{A_i T} : \vec{T T_i} = (n-1) : 1$.

а) Узмимо неку произв. тачку O' :

$$\begin{aligned} \vec{O'T} &= \vec{O'O} + \vec{OT} = \frac{1}{n} \cdot n \vec{O'O} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \vec{OA_i} \\ &= \frac{1}{n} (\underbrace{\vec{O'O}} + \dots + \underbrace{\vec{O'O}} + \underbrace{\vec{OA_1}} + \dots + \underbrace{\vec{OA_n}}) \\ &= \frac{1}{n} (\vec{O'A_1} + \dots + \vec{O'A_n}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \vec{O'A_i} \quad \checkmark \end{aligned}$$

б) $\vec{OT_i} = \frac{1}{n-1} (\vec{OA_1} + \dots + \vec{OA_{i-1}} + \vec{OA_{i+1}} + \dots + \vec{OA_n})$, $i \in \{1, \dots, n\}$ произв.

$$\vec{OT} = \frac{1}{n} (\vec{OA_1} + \dots + \vec{OA_{i-1}} + \vec{OA_i} + \vec{OA_{i+1}} + \dots + \vec{OA_n})$$

а) не зависи од O па узмимо $O = A_i$:

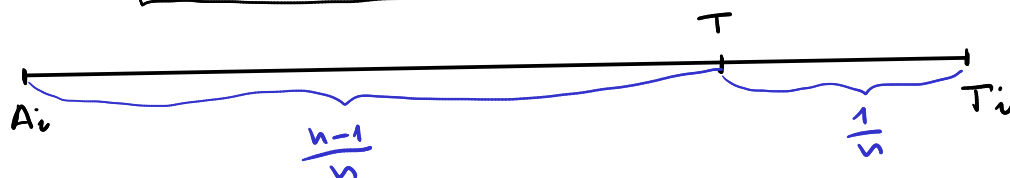
$$\begin{aligned} \vec{A_i T_i} &= \frac{1}{n-1} (\vec{A_i A_1} + \dots + \vec{A_i A_{i-1}} + \vec{A_i A_{i+1}} + \dots + \vec{A_i A_n}) \\ \vec{A_i T} &= \frac{1}{n} (\vec{A_i A_1} + \dots + \vec{A_i A_{i-1}} + \underbrace{\vec{A_i A_i}}_{\vec{0}} + \vec{A_i A_{i+1}} + \dots + \vec{A_i A_n}) \\ \Rightarrow \vec{A_i T_i} &= \frac{1}{n-1} \cdot n \vec{A_i T} \Rightarrow \boxed{\vec{A_i T_i} = \frac{n}{n-1} \cdot \vec{A_i T}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow A_i, T, T_i$ колинеарне $\Rightarrow T \in A_i T_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$

$$\vec{A_i T} = \frac{n-1}{n} \vec{A_i T_i}$$

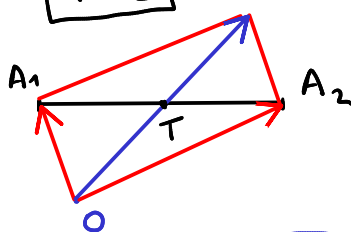
$$\vec{T T_i} = \vec{T A_i} + \vec{A_i T_i} = -\frac{n-1}{n} \vec{A_i T} + \vec{A_i T_i} = \frac{1}{n} \vec{A_i T_i}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{A_i T} : \vec{T T_i} = (n-1) : 1}$$



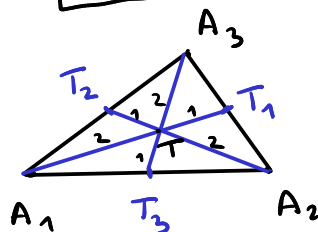
1.8. Скицирати и доказати Задатак 1.7 за $n = 2, 3$ у равни и $n = 4$ у простору.

$n = 2$

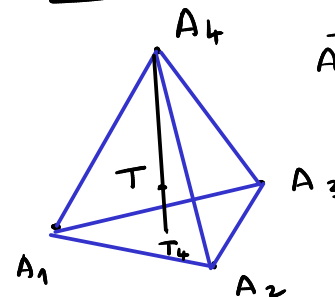


$$\vec{OT} = \frac{1}{2} (\vec{OA_1} + \vec{OA_2})$$

$n = 3$

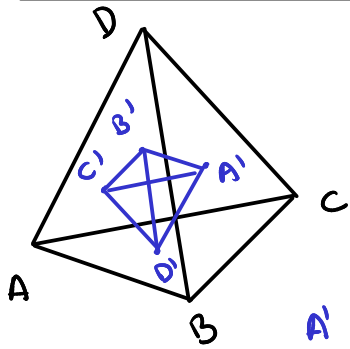


$n = 4$



$$\vec{A_4 T} : \vec{T T_4} = 3 : 1$$

1.9. Доказати да се тежиште тетраедра $ABCD$ поклапа са тежиштем тетраедра $A'B'C'D'$ коме су темена A', B', C', D' редом тежишта троуглова BCD, ACD, ABD и ABC .



$$T \text{ тежиште } ABCD \Rightarrow \vec{OT} = \frac{1}{4} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$$

$$T' \text{ тежиште } A'B'C'D' \Rightarrow \vec{OT'} = \frac{1}{4} (\vec{OA'} + \vec{OB'} + \vec{OC'} + \vec{OD'})$$

$$\text{Показујемо } T \equiv T' : \Leftrightarrow \vec{OT'} = \vec{OT}$$

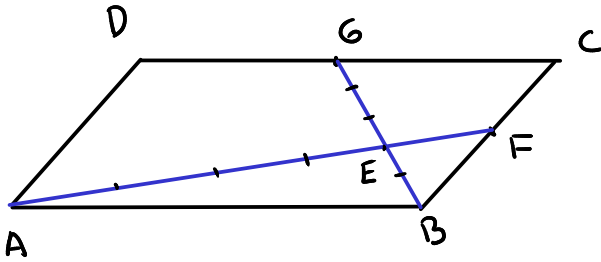
$$A' \text{ тежиште } BCD \Rightarrow \vec{OA'} = \frac{1}{3} (\vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$$

$$\Rightarrow \vec{OB'} = \frac{1}{3} (\vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OD}), \vec{OC'} = \frac{1}{3} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OD}), \vec{OD'} = \frac{1}{3} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$

$$\vec{OT'} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} (\vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}) + \frac{1}{3} (\vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OD}) + \frac{1}{3} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OD}) + \frac{1}{3} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) \right)$$

$$\vec{OT'} = \frac{1}{4} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}) = \vec{OT} \Rightarrow \boxed{T \equiv T'} \quad \checkmark$$

1.10. Дат је паралелограм $ABCD$. Ако је тачка F средиште странице BC , тачка G средиште странице CD , а тачка E пресек дужи AF и BG , одредити односе $\frac{AE}{EF}$ и $\frac{BE}{EG}$.



$$\frac{\vec{AE}}{\vec{EF}} = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\frac{AE}{EF} = \frac{\|\vec{AE}\|}{\|\vec{EF}\|} = |\lambda| = \frac{EA}{EF}$$

$$F = S(BC), G = S(CD)$$

$$A, E, F \text{ колинеарне} \Leftrightarrow \vec{AE} = \alpha \vec{AF}$$

$$B, E, G \text{ колинеарне} \Leftrightarrow \vec{BE} = \beta \vec{BG}$$

$$\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{BF} = \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{BC}, \vec{BG} = \vec{BC} + \vec{CG} = \vec{BC} - \frac{1}{2} \vec{AB}$$

$$\vec{AB} = \vec{AE} + \vec{EB} = \alpha \vec{AF} - \beta \vec{BG} = \alpha \vec{AB} + \frac{\alpha}{2} \vec{BC} - \beta \vec{BC} + \frac{\beta}{2} \vec{AB}$$

$$(1 - \alpha - \frac{\beta}{2}) \vec{AB} + (\frac{\alpha}{2} - \beta) \vec{BC} = \vec{0}$$

$$\vec{AB}, \vec{BC} \text{ л.н.в.} \Rightarrow \alpha + \frac{\beta}{2} = 1 \quad \beta = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{5}{4} \alpha = 1 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{4}{5}}$$

$$\boxed{\vec{AE} = \frac{4}{5} \vec{AF}, \vec{BE} = \frac{2}{5} \vec{BG}}$$

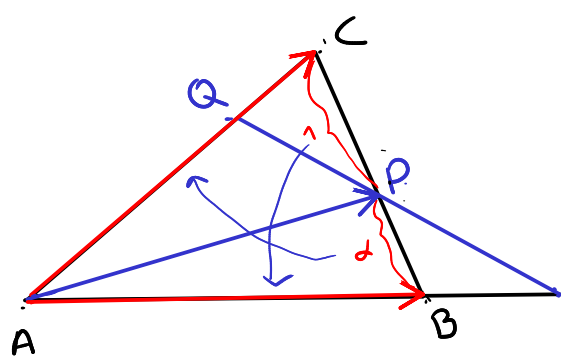
$$\vec{EF} = \vec{EA} + \vec{AF} = -\frac{4}{5} \vec{AF} + \vec{AF} = \frac{1}{5} \vec{AF} \Rightarrow \frac{AE}{EF} = \frac{\frac{4}{5} \|\vec{AF}\|}{\frac{1}{5} \|\vec{AF}\|} = \boxed{4}$$

$$\vec{EG} = \vec{EB} + \vec{BG} = -\frac{2}{5} \vec{BG} + \vec{BG} = \frac{3}{5} \vec{BG} \Rightarrow \frac{BE}{EG} = \frac{\frac{2}{5} \|\vec{BG}\|}{\frac{3}{5} \|\vec{BG}\|} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

$$\boxed{\frac{AE}{EF} = 4}$$

$$\boxed{\frac{BE}{EG} = \frac{2}{3}}$$

1.11. (Менелажева теорема, 1. век н. е.) Потребан и довољан услов да би тачке P, Q и R које леже редом на правама BC, CA и AB троугла ABC биле колинеарне, јесте да важи $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1$.



$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} = \alpha, \quad \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = \beta, \quad \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = \gamma$$

Доказујемо:

$$P, Q, R \text{ колин} \Leftrightarrow \alpha \beta \gamma = -1$$

$$\Rightarrow P \in QR \Leftrightarrow \alpha \beta \gamma = -1$$

$$\boxed{1.4} \Rightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{1}{\alpha+1} \overrightarrow{AB} + \frac{\alpha}{\alpha+1} \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{CQ} = \beta \overrightarrow{QA}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AR} + \overrightarrow{RB} = \overrightarrow{AR} + \frac{1}{\gamma} \overrightarrow{AR} = \frac{\gamma+1}{\gamma} \overrightarrow{AR}$$

$$\overrightarrow{AR} = \gamma \overrightarrow{RB}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QC} = \overrightarrow{AQ} + \beta \overrightarrow{AQ} = (1+\beta) \overrightarrow{AQ}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AP} = \left[\frac{1}{\alpha+1} \cdot \frac{\gamma+1}{\gamma} \right] \overrightarrow{AR} + \left[\frac{\alpha}{\alpha+1} \cdot (1+\beta) \right] \overrightarrow{AQ}$$

$$\boxed{1.5} \Rightarrow P \in RQ \Leftrightarrow \frac{\gamma+1}{\gamma(\alpha+1)} + \frac{\alpha(1+\beta)}{\alpha+1} = 1 \quad / \gamma(\alpha+1)$$

$$\Leftrightarrow \gamma+1 + \alpha(1+\beta)\gamma = \gamma(\alpha+1)$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\gamma} + 1 + \cancel{\alpha} \gamma + \alpha \beta \gamma = \cancel{\gamma^2} \alpha + \cancel{\gamma}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\alpha \beta \gamma = -1}$$

1.12. (Чеваова теорема) Нека су P, Q и R тачке редом на правама BC, AC и AB , троугла ABC . Доказати да је $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1$ ако и само ако се праве AP, BQ и CR секу у једној тачки или су паралелне.



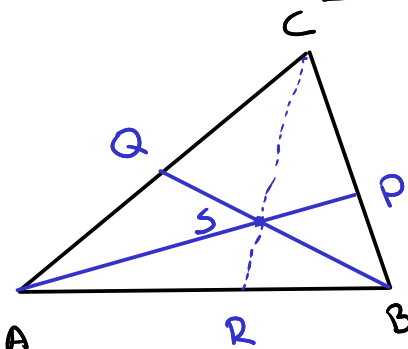
конкурентне

у истом правмену

$$AP, BQ, CR \text{ у истом правмену} \Leftrightarrow \alpha \beta \gamma = 1$$

$$\textcircled{1} AP \cap BQ = \{S\}$$

$$S \in CR \Leftrightarrow \alpha \beta \gamma = 1$$



Посматрамо $\triangle CPA$:

$$B \in CP, S \in PA, Q \in AC \text{ конкурентне} \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{BP}} \cdot \frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QC}} = -1$$

$$\overrightarrow{BP} = \alpha \overrightarrow{PC} \Rightarrow \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PB} = -\frac{1}{\alpha} \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BP} = \frac{-1-\alpha}{\alpha} \overrightarrow{BP}$$

$$\overrightarrow{CQ} = \beta \overrightarrow{QA} \Rightarrow \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{\beta} \overrightarrow{QC}$$

$$(*) \Rightarrow -\frac{\alpha+1}{\alpha} \cdot \frac{\vec{PS}}{\vec{SA}} \cdot \frac{1}{\beta} = -1 \Rightarrow \boxed{\frac{\vec{PS}}{\vec{SA}} = \frac{\alpha\beta}{\alpha+1}}$$

ПОСМАТРАМО $\triangle BPA$

$$C \in BP, S \in PA, R \in AB \text{ колинеарне} \xLeftrightarrow{\text{Менелаж}} \frac{\vec{BC}}{\vec{CP}} \cdot \frac{\vec{PS}}{\vec{SA}} \cdot \frac{\vec{AR}}{\vec{RB}} = -1$$

$$\vec{BP} = \alpha \vec{PC} \Rightarrow \vec{BC} = \vec{BP} + \vec{PC} = \alpha \vec{PC} + \vec{PC} = -(\alpha+1) \vec{CP}$$

$$S \in CR \Rightarrow \cancel{-(\alpha+1)} \cdot \frac{\alpha\beta}{\cancel{\alpha+1}} \cdot \gamma = \cancel{-1} \Rightarrow \alpha\beta\gamma = 1$$

$$② \quad \begin{array}{c} P \\ \diagup \quad \diagdown \\ A \quad R \quad B \\ \diagdown \quad \diagup \\ Q \end{array} \quad AP, BQ, CR \text{ паралелне} \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma = 1$$

Нека су $BQ \parallel CR$.

Показујемо:

$$AP \parallel CR \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma = 1$$

$$\vec{AQ} = \frac{1}{\beta} \vec{QC}$$

$$\vec{CQ} = \beta \vec{QA}$$

$$(*) \quad BQ \parallel CR \xLeftrightarrow{\text{Tanec}} \frac{\vec{AC}}{\vec{CQ}} = \frac{\vec{AR}}{\vec{RB}}$$

$$\frac{\vec{BP}}{\vec{PC}} \cdot \frac{\vec{CQ}}{\vec{QA}} \cdot \frac{\vec{AR}}{\vec{RB}} = 1$$

$$\vec{AC} = \vec{AQ} + \vec{QC} = \frac{1}{\beta} \vec{QC} + \vec{QC} = \frac{1+\beta}{\beta} \vec{QC} = -\frac{\beta+1}{\beta} \vec{CQ}$$

$$\Rightarrow -\frac{\beta+1}{\beta} = \gamma \Rightarrow \beta+1 = -\beta\gamma \Rightarrow \boxed{\beta(1+\gamma) = -1}$$

$$(*) \quad AP \parallel CR \xLeftrightarrow{\text{Tanec}} \frac{\vec{BC}}{\vec{CP}} = \frac{\vec{BR}}{\vec{RA}} \Rightarrow \gamma+1 = -\frac{1}{\beta}$$

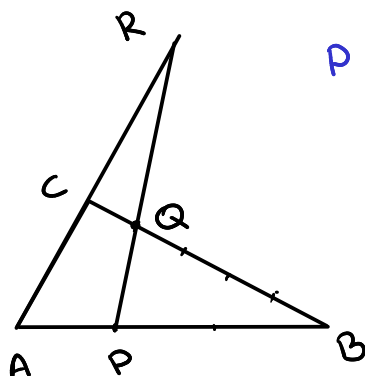
$$\vec{BP} = \alpha \vec{PC} \Rightarrow \vec{BC} = \vec{BP} + \vec{PC} = \alpha \vec{PC} + \vec{PC} = -(\alpha+1) \vec{CP}$$

$$AP \parallel CR \Leftrightarrow -(\alpha+1) = \frac{1}{\gamma} \Leftrightarrow -\alpha-1 = \frac{1}{\gamma}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{-\alpha = \frac{1}{\gamma} + 1 = \frac{\gamma+1}{\gamma} = -\frac{1}{\beta\gamma}}$$

$$AP \parallel CR \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma = 1$$

1.13. Нека је ABC троугао и тачке P и Q такве да је $\vec{AP} = \frac{1}{2}\vec{PB}$ и $\vec{BQ} = 4\vec{QC}$, а тачка R је пресек правих AC и PQ . Израчунати однос $\vec{CR} : \vec{RA}$.



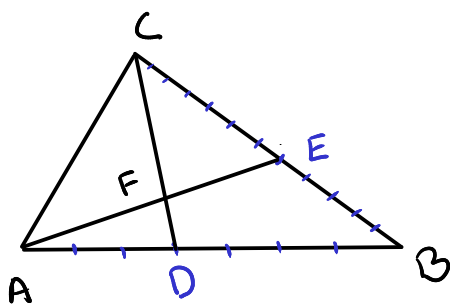
$P \in AB, Q \in BC, R \in CA$ колинеарне

$$\xLeftrightarrow{\text{Менелаж}} \frac{\vec{AP}}{\vec{PB}} \cdot \frac{\vec{BQ}}{\vec{QC}} \cdot \frac{\vec{CR}}{\vec{RA}} = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{\vec{CR}}{\vec{RA}} = -1$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\vec{CR}}{\vec{RA}} = -\frac{1}{2}}$$

1.14. У равни је дат троугао ABC . Нека тачка D припада страници AB , а тачка E страници BC , тако да је $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{4}$ и $\frac{BE}{EC} = \frac{5}{7}$. Ако се дужи AE и CD секу у тачки F одредити у ком односу тачка F дели дужи AE и CD .



$\triangle BDC$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{3}{4} = \frac{\vec{AD}}{\vec{DB}}, \quad \frac{BE}{EC} = \frac{5}{7} = \frac{\vec{BE}}{\vec{EC}}$$

$\triangle ABE$
Менелай
($\Rightarrow$)

$D \in AB, C \in BE, F \in EA$ колич.

$$\frac{\vec{AD}}{\vec{DB}} \cdot \frac{\vec{BC}}{\vec{CE}} \cdot \frac{\vec{EF}}{\vec{FA}} = -1$$

$$\frac{3}{4} \cdot -\frac{12}{7} \Rightarrow \frac{\vec{EF}}{\vec{FA}} = \frac{7}{9}$$

$$\frac{\vec{EF}}{\vec{FA}} = \frac{7}{9}$$

$A \in BD, F \in DC, E \in CB$ колинеарне

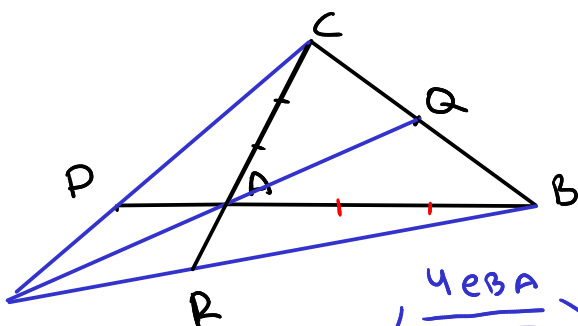
Менелай
($\Rightarrow$)

$$\frac{\vec{BA}}{\vec{AD}} \cdot \frac{\vec{DF}}{\vec{FC}} \cdot \frac{\vec{CE}}{\vec{EB}} = -1$$

$$-\frac{7}{3} \cdot \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{\vec{DF}}{\vec{FC}} = \frac{15}{49}$$

$$\frac{\vec{DF}}{\vec{FC}} = \frac{15}{49}$$

1.15. Нека је ABC троугао, P и Q тачке такве да је $3\vec{AP} = \vec{BA}$ и $2\vec{BQ} = \vec{BC}$. Ако је R тачка праве AC таква да се праве AQ, CP и BR секу у једној тачки, одредити однос $\vec{AC} : \vec{AR}$.



$$3\vec{AP} = \vec{BA}$$

$$2\vec{BQ} = \vec{BC}$$

$\triangle ABC$

AQ, CP, BR конкурентне

$$\frac{\vec{AP}}{\vec{PB}} \cdot \frac{\vec{BQ}}{\vec{QC}} \cdot \frac{\vec{CR}}{\vec{RA}} = 1$$

$$-\frac{1}{4} \cdot 1 \Rightarrow \frac{\vec{CR}}{\vec{RA}} = -4$$

$$\frac{\vec{CR}}{\vec{RA}} = -4$$

$$\vec{CR} = -4\vec{RA}$$

$$\vec{AC} = \vec{AR} + \vec{RC} = \vec{AR} - 4\vec{AR} = -3\vec{AR}$$

$$\Rightarrow \vec{AC} : \vec{AR} = -3 : 1$$