

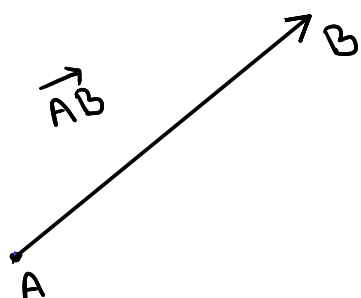
← Аналитичка геометрија (Геометрија 1) →

* 70 п писмени

* 30 п усмени

1 Линеарне операције са векторима

Деф Вектор је „усмерена дуж“ која је јединствено одређена правцем, смером и интензитетом (дужином).



* ПРВАЦ $\vec{AB}$ - ПРВАЦ ПРАВЕ АВ

* СМЕР $\vec{AB}$ - СМЕР ПОЛУПРАВЕ АВ

* ДУЖИНА $\vec{AB}$ је $\|\vec{AB}\|$ је РАСТОЈАЊЕ ИЗМЕЂУ ТАЧАКА А и В.

* НУЛА ВЕКТОР је ВЕКТОР $\vec{AA} = \vec{0} = \vec{BB}$

* СУПРОТАН ВЕКТОР ВЕКТОРА $\vec{AB}$ је $\vec{BA} = -\vec{AB}$

* ВЕКТОРИ ЧИЈИ СУ ПРАВЦИ ПАРАЛЕЛНИ ИСТОЈ ПРАВОЈ ЗОВУ СЕ КОЛИНЕАРНИ.

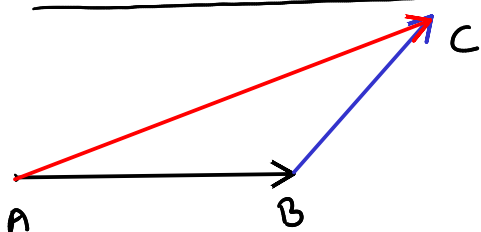
* ВЕКТОРИ ЧИЈИ СУ ПРАВЦИ ПАРАЛЕЛНИ ИСТОЈ РАВНИ ЗОВУ СЕ КОПЛАНАРНИ.

Линеарне операције са векторима

* САБИРАЊЕ ВЕКТОРА

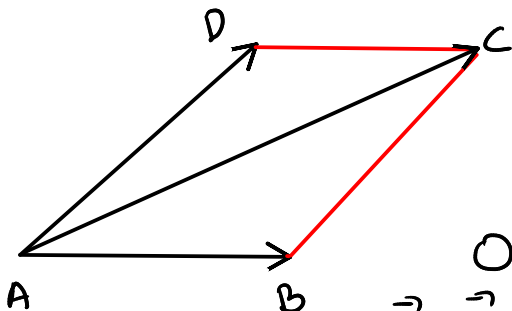
* ПРАВИЛО НАДОВЕЗИВАЊА

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$



* ПРАВИЛО ПАРАЛЕЛОГРАМА

$$\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$$



ОЗНАКА : V - СКУП ВЕКТОРА

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$

Особине :

$$1) (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

$$3) \vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$$

$$2) \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$$

$$4) \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

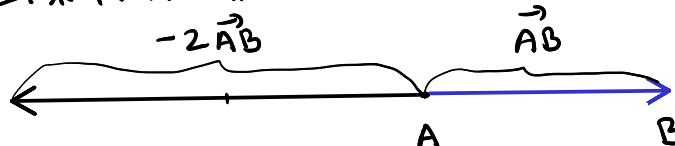
* МНОЖЕЊЕ СКАЛАРОМ

Производ $\vec{u} \in V$ и скалара $\lambda \in \mathbb{R}$ је вектор т.д.

1) ПРАВАЦ $\lambda \vec{u}$ је исти као ПРАВАЦ $\vec{u}$

2) СМЕР $\lambda \vec{u}$: $\lambda > 0$ исти СМЕР као $\vec{u}$
 $\lambda < 0$ СУПРОТАН СМЕР

3) ДУЖИНА $\|\lambda \vec{u}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{u}\|$



Особине : $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$5) \lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \vec{u} + \lambda \vec{v} \quad 7) \lambda (\mu \vec{v}) = (\lambda \mu) \vec{v}$$

$$6) (\lambda + \mu) \vec{u} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{u} \quad 8) 1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$$

Def $(V, +, \cdot)$ је векторски простор ако важе особине 1) - 8).

$$* \vec{u} - \vec{v} := \vec{u} + (-\vec{v})$$

Def Вектор $\vec{v}$ је линеарна комбинација вектора $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ ако постоје скалари $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ т.д. $\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k$.

Def Вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ линеарно независни ако $\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$.

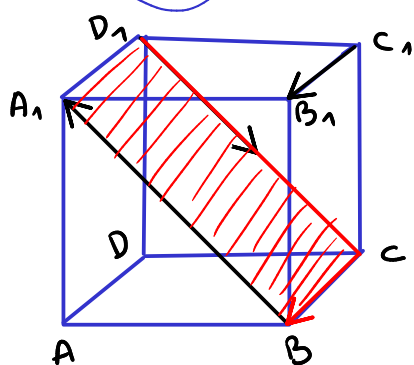
т.д. ниједан од $\vec{v}_i$ не може да се представи као линеарна комбинација осталих.

* 2 вектора су колинеарни $\Leftrightarrow$ лин. зависни

* 3 вектора су копланарни $\Leftrightarrow$ лин. зависни

1.1. Дана је коцка $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Да ли су вектори а) $\vec{BA}_1, \vec{C_1 B_1}, \frac{1}{2} \vec{D_1 C}$; б) $\vec{DD_1}, \vec{BC_1}, \vec{A_1 D}$; в) $\vec{C_1 B_1}, \vec{AB_1}, \vec{CD_1}$, компланарни.

а) $\vec{BA_1}, \vec{C_1 B_1}, \frac{1}{2} \vec{D_1 C}$



1) $\vec{C_1 B_1} = \vec{C B} \Rightarrow$ сва три вектора су паралелна равни $BC D_1 A_1$
 $\Rightarrow$ јесу копланарни

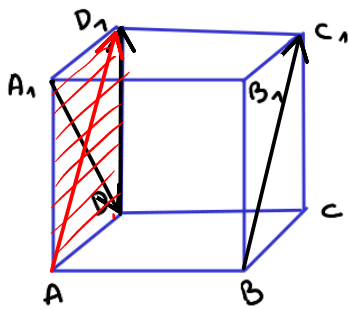
2) $\vec{BA_1} = \vec{CD_1} \cdot \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} \vec{BA_1} - \frac{1}{2} \vec{CD_1} = \vec{0}$

$\left(\frac{1}{2}\right) \vec{BA_1} + 0 \cdot \vec{C_1 B_1} + \left(-\frac{1}{2}\right) \vec{D_1 C} = \vec{0} \Rightarrow$ линеарно зависни

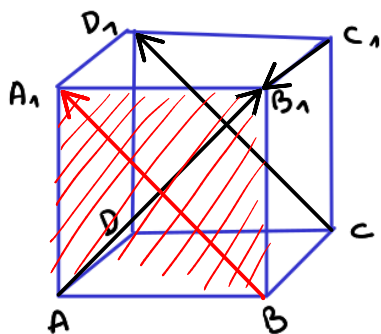
копланарни
 $\Uparrow$

б) $\vec{D_1A_1}$, $\vec{B_1C_1}$, $\vec{A_1D_1}$



$\vec{B_1C_1} = \vec{A_1D_1} \Rightarrow$ сва три вектора су паралелна равни ADA_1D_1
 $\Rightarrow$ **КОПЛАНАРНИ**

в) $\vec{C_1B_1}$, $\vec{AB_1}$, $\vec{CD_1}$



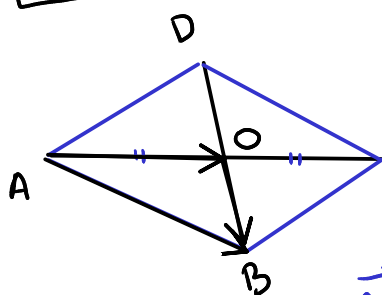
$$\vec{CD_1} = \vec{BA_1}$$

$\vec{AB_1}$ и $\vec{CD_1}$ су паралелна ABA_1B_1
 $\vec{C_1B_1}$ је ортогонална на ABA_1B_1

$\Rightarrow$ **НИСУ КОПЛАНАРНИ**

1.2. Доказати да се дијагонале четвороугла полове ако и само ако је тај четвороугао паралелограм.

$\Rightarrow$ Дијагонале се полове $\Rightarrow$ паралелограм



$$O = S(AC), O = S(BD)$$

$\nabla ABCD$ је паралелограм ако је

$$AB \parallel CD \text{ и } AB = CD \Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{DC} \quad \nabla$$

$$\vec{AO} = \vec{OC}, \vec{BO} = \vec{OD} \quad | - | \quad \vec{OB} = \vec{DO}$$

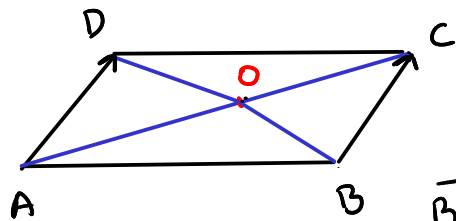
$$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = \vec{OC} + \vec{DO} \stackrel{4)}{=} \vec{DO} + \vec{OC} = \vec{DC} \Rightarrow ABCD \text{ паралелог.}$$

$\Leftarrow$ $ABCD$ паралелограм $\Rightarrow$ Дијагонале се полове

Нека је $O = S(AC)$.

Докажтемо да је $O = S(BD)$

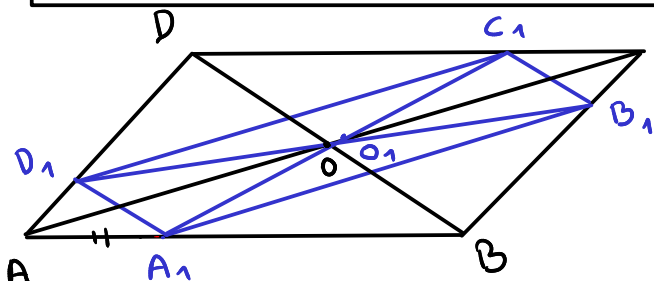
$$\Leftrightarrow \vec{BO} = \vec{OD}$$



$$\vec{BO} = \vec{BC} + \vec{CO} = \vec{AD} + \vec{OA} \stackrel{4)}{=} \vec{OA} + \vec{AD} = \vec{OD}$$

$$\Rightarrow O \in BD \text{ и } O = S(BD).$$

1.3. На страницама AB , BC , CD и AD паралелограма $ABCD$ дате су редом тачке A_1, B_1, C_1, D_1 тако да је $A_1B_1C_1D_1$ паралелограм. Доказати да се праве AC , BD , A_1C_1 , B_1D_1 секу у једној тачки.



$ABCD$ паралелограм

$$\Rightarrow O = S(AC) = S(BD)$$

$A_1B_1C_1D_1$ паралелограм

$$\Rightarrow O_1 = S(A_1C_1) = S(B_1D_1)$$

Покажујемо да је $O \equiv O_1$:

$\Leftrightarrow$ доказ. да је $O = S(A_1 C_1) \Leftrightarrow \vec{A_1 O} = \vec{O C_1}$:

A, A_1, B количн. $\Rightarrow \vec{A A_1}$ и $\vec{A B}$ количн. $\Rightarrow \vec{A A_1} = \alpha \vec{A B}$

Аналогно, $\vec{A D_1} = \beta \vec{A D}$, $\vec{C B_1} = \gamma \vec{C B}$, $\vec{C C_1} = \delta \vec{C D}$.

$A_1 B_1 C_1 D_1$ паралелограм $\Rightarrow \vec{A_1 D_1} = \vec{B_1 C_1}$

$$\vec{A_1 A} + \vec{A D_1} = \vec{B_1 C} + \vec{C C_1}$$

$$-\alpha \vec{A B} + \beta \vec{A D} = -\gamma \vec{C B} + \delta \vec{C D}$$

$$-\alpha \vec{A B} + \beta \vec{A D} = \gamma \vec{A D} - \delta \vec{A B}$$

$$(\delta - \alpha) \vec{A B} + (\beta - \gamma) \vec{A D} = \vec{0}$$

$\vec{A B}, \vec{A D}$ лич. нез $\Rightarrow \delta - \alpha = 0, \beta - \gamma = 0$

$$\delta = \alpha, \beta = \gamma$$

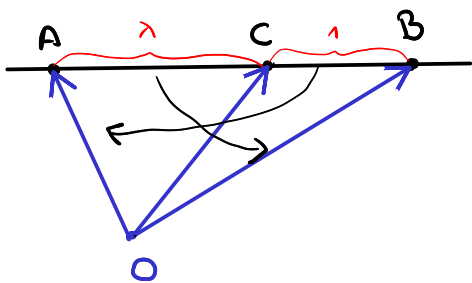
$$\vec{A A_1} = \alpha \vec{A B}, \vec{A D_1} = \beta \vec{A D}, \vec{C B_1} = \beta \vec{C B} = -\beta \vec{A D}$$

$$\vec{C C_1} = \alpha \vec{C D} = -\alpha \vec{A B} = -\vec{A A_1}$$

$$\vec{A_1 O} = \vec{A_1 A} + \vec{A O} = \vec{C C_1} + \vec{O C} = \vec{O C} + \vec{C C_1} = \vec{O C_1}$$

$$\Rightarrow O = S(A_1 C_1) \Rightarrow \boxed{O \equiv O_1} \quad \checkmark$$

1.4. У односу на тачку O дати су вектори положаја $\vec{OA}, \vec{OB}$ тачака A и B ($A \neq B$). Изразити вектор положаја $\vec{OC}$ тачке C за коју је $\vec{AC} = \lambda \vec{CB}, \lambda \in \mathbb{R}$.



$$\vec{AC} = \lambda \vec{CB} \Rightarrow A, B, C \text{ колинеарне}$$

$$\vec{AO} + \vec{OC} = \lambda (\vec{CO} + \vec{OB})$$

$$\vec{OC} - \lambda \vec{CO} = -\vec{AO} + \lambda \vec{OB}$$

$$(1 + \lambda) \vec{OC} = \vec{OA} + \lambda \vec{OB}$$

$$1) 1 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

$$2) \lambda \neq -1$$

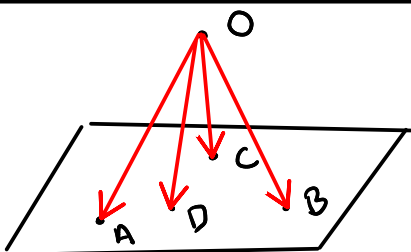
$$\vec{O} = \vec{OA} - \vec{OB}$$

$$\vec{OA} = \vec{OB}$$

$$A \equiv B \quad \downarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{OC} = \frac{1}{\lambda + 1} \vec{OA} + \frac{\lambda}{\lambda + 1} \vec{OB}}$$

1.6. Нека су O, A, B и C четири некопланарне тачке. Да би тачка D одређена са $\vec{OD} = \alpha \vec{OA} + \beta \vec{OB} + \gamma \vec{OC}$ припадала равни троугла ABC , потребно је и довољно да је $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Ако је при томе $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ и $\gamma \geq 0$, тада тачка D припада троуглу ABC . Доказати.



$$\vec{OD} = \alpha \vec{OA} + \beta \vec{OB} + \gamma \vec{OC}$$

O, A, B, C некоплан $\Rightarrow \underline{A, B, C \text{ неколичн.}} \quad \oplus$



$$\boxed{=>} \quad D \in \text{ПРЯМЫХ } ABC \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 1 ?$$

$\rightarrow A, B, C, D$ КОПЛАНАРНЫЕ $\Rightarrow \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ КОПЛАНАРНЫ
 $\Rightarrow$ ЛИН. ЗАВИСИМЫ $\Rightarrow \lambda_1 \vec{AB} + \lambda_2 \vec{AC} + \lambda_3 \vec{AD} = \vec{0}$, где не все $\lambda_i = 0$.
 $\lambda_3 \neq 0$ ЗБОГ $(*) \Rightarrow \vec{AD} = p \vec{AB} + q \vec{AC}$, $p, q \in \mathbb{R}$

$$\vec{AO} + \vec{OD} = p(\vec{AO} + \vec{OB}) + q(\vec{AO} + \vec{OC})$$

$$\vec{OD} = (1-p-q)\vec{OA} + p\vec{OB} + q\vec{OC}$$

$$\vec{OD} = \alpha \vec{OA} + \beta \vec{OB} + \gamma \vec{OC}$$

$$(1-p-q-\alpha)\vec{OA} + (p-\beta)\vec{OB} + (q-\gamma)\vec{OC} = \vec{0}$$

ЛИН. НЕЗАВИСИМЫ $\Rightarrow \alpha = 1-p-q, \beta = p, \gamma = q$

$$\alpha + \beta + \gamma = 1-p-q+p+q = 1 \quad \checkmark$$

$$\boxed{<=} \quad \alpha + \beta + \gamma = 1 \Rightarrow D \in \text{ПРЯМЫХ } ABC$$

$$\Rightarrow \alpha = 1 - \beta - \gamma$$

$$\vec{OD} = (1-\beta-\gamma)\vec{OA} + \beta\vec{OB} + \gamma\vec{OC}$$

$$\vec{OD} - \vec{OA} = \beta(\vec{OB} - \vec{OA}) + \gamma(\vec{OC} - \vec{OA})$$

$$\vec{AD} = \beta \vec{AB} + \gamma \vec{AC} \Rightarrow \vec{AD}, \vec{AB}, \vec{AC} \text{ ЛИН. ЗАВИСИМЫ}$$

$\Rightarrow$ КОПЛАНАРНЫ $\Rightarrow A, B, C, D$ КОПЛАНАРНЫЕ

$$\Rightarrow D \in \text{ПРЯМЫХ } ABC \quad \checkmark$$

СпешивзАнАто

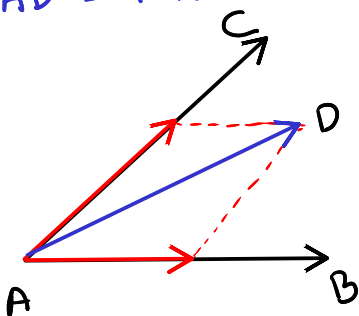
$$\left. \begin{array}{l} \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]}$$

$$1) \alpha = 1 - \beta - \gamma$$

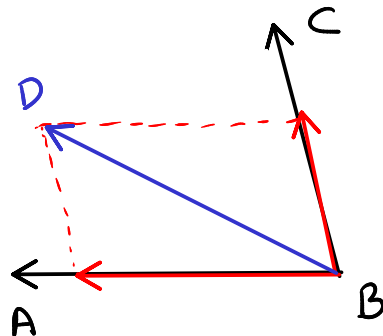
$$2) \beta = 1 - \alpha - \gamma$$

$$\Rightarrow \vec{AD} = \beta \vec{AB} + \gamma \vec{AC}$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \vec{BD} = \alpha \vec{BA} + \gamma \vec{BC}$$



$$\Rightarrow D \in \angle CAB$$



$$\Rightarrow D \in \angle CBA$$

$$1, 2 \Rightarrow D \in \Delta ABC$$

$\alpha, \beta, \gamma > 0 \Rightarrow D \in \text{УНУТРАШНОСТИ } \Delta ABC$

Или од $\alpha, \beta, \gamma = 0 \Rightarrow D \in \text{ГРАНИЦЫ } \Delta ABC$