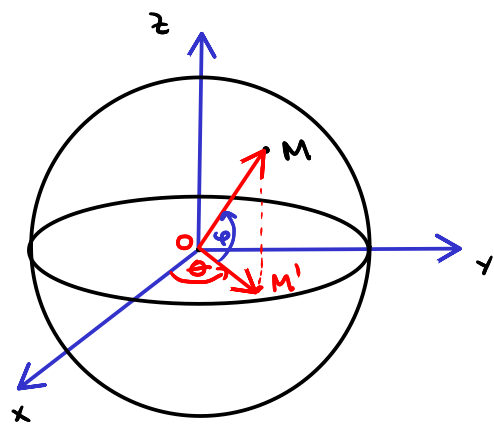


R полупр.

8 Сферна геометрија



$$\theta = \angle(\vec{Ox}, \vec{OM}) \in (-\pi, \pi] \text{ геогр. дужина}$$

$$\varphi = \angle(\vec{OM'}, \vec{OM}) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ геогр. ширина}$$

$$\begin{aligned} x &= R \cos \theta \cos \varphi \\ y &= R \sin \theta \cos \varphi \\ z &= R \sin \varphi \end{aligned}$$

$$\varphi = 0 \Rightarrow \text{екватор}$$

$$\theta = 0 \Rightarrow \text{Грчича}$$

$$\angle AOB = \alpha$$

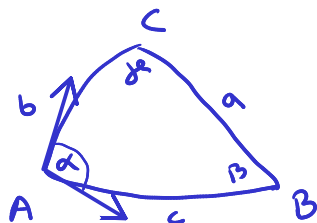
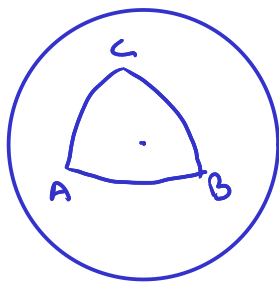
$$\frac{\widehat{AB}}{2R\pi} = \frac{\alpha}{2\pi} \Rightarrow \widehat{AB} = R\alpha = R \cdot \angle AOB$$

* Претп. да је НАДАЉЕ $R = 1$

$$\alpha = \angle(\perp_{\widehat{AB}}, \perp_{\widehat{AC}})$$

$$0 < a, b, c < \pi, \quad a + b + c < 2\pi$$

$$0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi, \quad \pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi$$



* синусна теорема :

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

* косинусна теорема :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

* дуална косинусна теорема :

$$-\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma \cos a$$

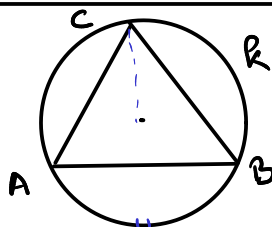
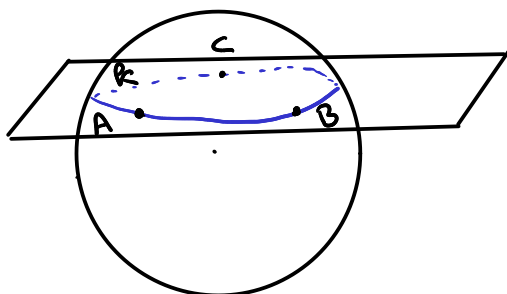
* површина Δ :

$$P = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

* обим Δ :

$$O = a + b + c$$

8.1. Одредити полупречник круга k на једничној сфери који садржи тачке $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$. Упоредити растојање између тачака A и B мерено по кругу k , са растојањем по великом кругу између A и B .



$$AB = \|\vec{AB}\| = \|(-1, 1, 0)\| = \sqrt{2}$$

$$AC = \|\vec{AC}\| = \|(-1, 0, 1)\| = \sqrt{2}$$

$$BC = \|\vec{BC}\| = \|(0, -1, 1)\| = \sqrt{2}$$

$\Rightarrow R$ круг описан око ΔABC

$$r = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\widehat{AB}^k = \frac{1}{3} \cdot 2\pi = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \pi = \frac{2\sqrt{6}}{9} \pi$$

$$\widehat{AB} = \angle AOB = \frac{\pi}{2}$$

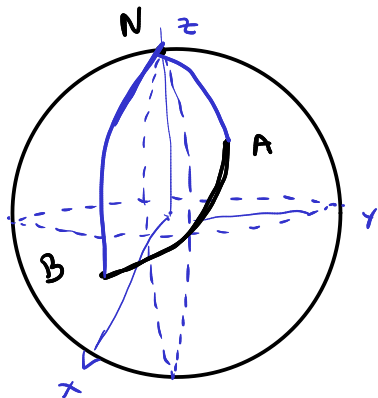
$$\angle AOB = \angle(\vec{OA}, \vec{OB}), \quad \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0 \Rightarrow \angle AOB = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{AB} < \widehat{AB}^k$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = \frac{81}{4 \cdot 81}$$

$$\left(\frac{2\sqrt{6}}{9}\right)^2 = \frac{24}{81} = \frac{96}{4 \cdot 81}$$

8.3. Одредити (приближно) растојање између тачака на планети Земљи између градова $A(45^\circ N, 20^\circ E)$ и $B(30^\circ S, 25^\circ W)$. Узети да је Земља сфера полупречника $r = 6340 km$.



Претпоставимо да је $r = 1$:

φ - геогр. ширина, θ - геогр. дужи на

$\Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow$ екватор, $\theta = 0 \Rightarrow$ Гринич

N - северни пол, $\varphi_N = 90^\circ$, θ_N - није деф

A: $\varphi_A = 45^\circ$, $\theta_A = 20^\circ$

B: $\varphi_B = -30^\circ$, $\theta_B = -25^\circ$

КОСИНУСА ТЕОРЕМА НА СФЕРНИ ТРОУГОЛ $\triangle ABN$:

$$\cos \widehat{AB} = \cos \widehat{NA} \cdot \cos \widehat{NB} + \sin \widehat{NA} \sin \widehat{NB} \cos \angle ANB$$

$$\widehat{NA} = \varphi_N - \varphi_A = 45^\circ, \quad \widehat{NB} = \varphi_N - \varphi_B = 90^\circ - (-30^\circ) = 120^\circ$$

$$\angle ANB = |\theta_A - \theta_B| = |20^\circ - (-25^\circ)| = 45^\circ$$

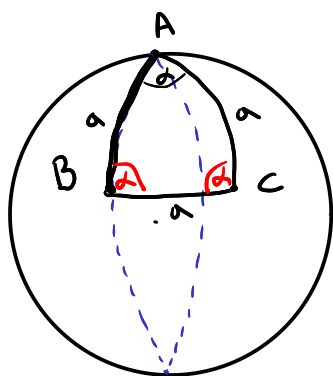
$$\begin{aligned} \cos \widehat{AB} &= \cos 45^\circ \cdot \cos 120^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 120^\circ \cdot \cos 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

За $R = 1 \Rightarrow \widehat{AB} = \arccos \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4}$

Како је $R = 6340$, применом хомотетије

$$\Rightarrow \widehat{AB} = 6340 \cdot \arccos \left(\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4} \right)$$

8.5. На јединичној сфери одредити једнакостранични сферни троугао ABC (тј. координате темена) чији је унутрашњи угао $\alpha > \frac{\pi}{3}$, а теме A је северни пол. Колики му је обим, а колика површина?



Нека је СТРАНИЦА ДУЖИНЕ α .

$$\Rightarrow \begin{cases} A: \varphi_A = \frac{\pi}{2}, \theta_A \text{ није деф} \\ B: \varphi_B = \frac{\pi}{2} - \alpha, \theta_B = 0 \\ C: \varphi_C = \frac{\pi}{2} - \alpha, \theta_C = \alpha \end{cases}$$

ОСТАЈЕ ДА ИЗРАЧУНАМО α :

КОСИНУСА

ДУЖИНА КОСИНУСА

$$\cos \alpha = \cos \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \sin \alpha \cos \alpha$$

...

$$-\cos \alpha = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{\cos^2 \alpha + \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\cos \alpha (\cos \alpha + 1)}{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}$$

$$\cos \alpha = \frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \Rightarrow \alpha = \arccos \left(\frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \right)$$

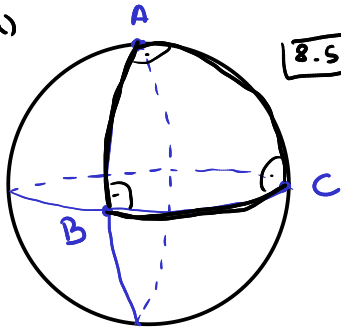
$$\Rightarrow \begin{cases} A: \varphi_A = \frac{\pi}{2}, \theta_A \text{ није деф} \\ B: \varphi_B = \frac{\pi}{2} - \arccos \left(\frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \right), \theta_B = 0 \\ C: \varphi_C = \frac{\pi}{2} - \arccos \left(\frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \right), \theta_C = \alpha \end{cases}$$

$$O = 3\alpha = 3 \arccos \left(\frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} \right)$$

$$P = 3\alpha - \pi$$

8.4. а) На јединичној сфери одредити неки сферни троугао (тј. координате темена) који има три права угла. Колики му је обим, а колика површина? б) Одредити фамилију троуглова чији збир углова тежи ка 3π .

а)



[8.5] $\Rightarrow$

$$\begin{cases} A: \varphi_A = \frac{\pi}{2}, \theta_A \text{ не деф.} \\ B: \varphi_B = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha}\right), \theta_B = 0 \\ C: \varphi_C = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha}\right), \theta_C = \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{за } \alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

снеч. за $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$A: \varphi_A = \frac{\pi}{2}, \theta_A \text{ не деф.}$$

$$B: \varphi_B = 0, \theta_B = 0$$

$$C: \varphi_C = 0, \theta_C = \frac{\pi}{2}$$

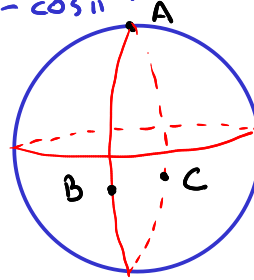


б)

[8.5] за $\alpha \rightarrow \pi \Rightarrow$ гранични случај

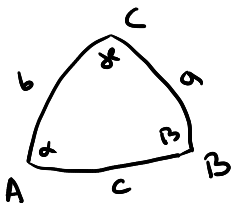
$$\alpha = \arccos\left(\frac{\cos \pi}{1 - \cos \pi}\right) = \arccos\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A: \varphi_A = \frac{\pi}{2}, \theta_A \text{ не деф.} \\ B: \varphi_B = -\frac{\pi}{6}, \theta_B = 0 \\ C: \varphi_C = -\frac{\pi}{6}, \theta_C = \pi \end{cases}$$



$$\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi - 4\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$$

8.6. Сферни троугао $\bar{ABC}$ на јединичној сфери има два угла једнака $\alpha = \frac{\pi}{3} = \beta$ и површину $P = \frac{\pi}{6}$. Израчунати ивице тог троугла.



$$\alpha = \frac{\pi}{3} \quad \beta = \frac{\pi}{3} \quad P = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow a = b$$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$P = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \gamma - \pi$$

$$\gamma = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$$

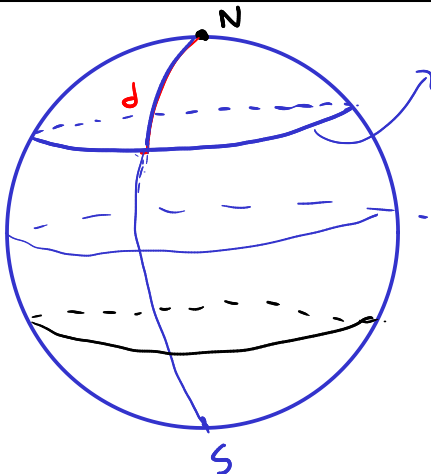
ДУАЛНА КОСИНУСА: $-\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma \cos a$

$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 \cdot \cos a \Rightarrow \cos a = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} = b$$

ДУАЛНА КОСИНУСА: $-\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \cos c$

$$0 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cos c \Rightarrow \cos c = \frac{1}{3} \Rightarrow c = \arccos \frac{1}{3}$$

8.7. Описати прецизно геометријско место тачака које су за $d > 0$ удаљене од северног пола сфере. Које су могуће вредности константе d ?



$$\varphi = \frac{\pi}{2} - d, \theta \in (-\pi, \pi]$$

$$\text{параметре } \varphi = \frac{\pi}{2} - d = \text{const}$$

$$d \in (0, \pi)$$

снеч. $d = \pi \Rightarrow$ јужни пол S

$$d \in (0, \pi]$$