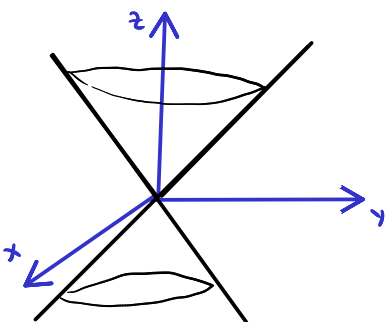


7.4. Шта се добија (објаснити и написати једначину) ротацијом праве p око Oz осе, ако је права p : а) $x = 0, y = z$; б) $y = 0, x = 1$ в) $z = 0, x = y$; г) $z = 0, x = 2$; д) $x = 1, y = z$.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

а) $p: x = 0, y = z \Rightarrow M(0, t, t) \in p$ произв., $t \in \mathbb{R}$

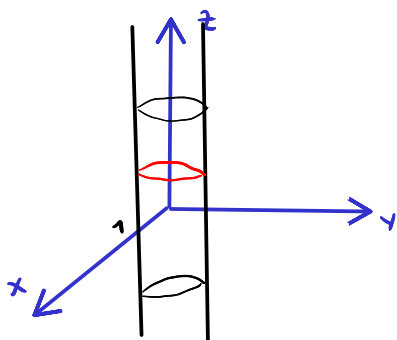


$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \sin \alpha \\ t \cos \alpha \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$x'^2 + y'^2 = t^2 \sin^2 \alpha + t^2 \cos^2 \alpha = t^2 = z'^2$$

$$\mathcal{S}: x^2 + y^2 - z^2 = 0 \quad \text{кружачи конач}$$

б) $p: y = 0, x = 1$



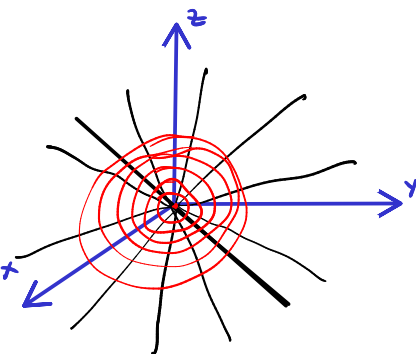
$M(1, 0, t) \in p$ произв., $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$x'^2 + y'^2 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$\mathcal{S}: x^2 + y^2 = 1 \quad \text{кружачи бесконач}$$

в) $p: z = 0, x = y$



$M(t, t, 0) \in p$ произв., $t \in \mathbb{R}$

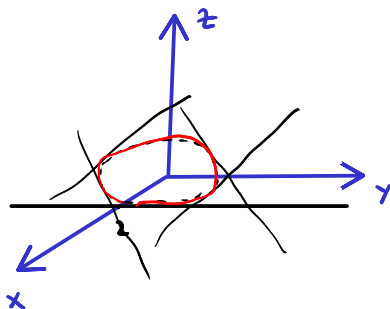
$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cos \alpha - t \sin \alpha \\ t \sin \alpha + t \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$x'^2 + y'^2 = t^2 + t^2 = 2t^2, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$z' = 0$$

$$\mathcal{S}: O_{xy} - \text{раван}, \quad z = 0$$

г) $p: z = 0, x = 2$



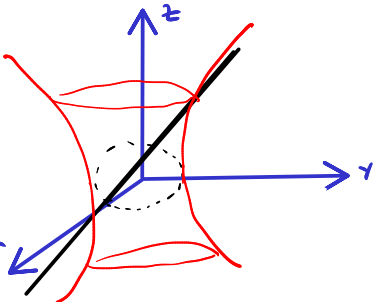
$M(2, t, 0) \in p$ произв.

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos \alpha - t \sin \alpha \\ 2 \sin \alpha + t \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$x'^2 + y'^2 = 4 + t^2 \Rightarrow \mathcal{S}: x^2 + y^2 \geq 4, \quad z = 0$$

раван O_{xy} без
гипер. круга $x^2 + y^2 = 4$

д) $p: x = 1, y = z$



$M(1, t, t) \in p$ произв.

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha - t \sin \alpha \\ \sin \alpha + t \cos \alpha \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$x'^2 + y'^2 = 1 + t^2 = 1 + z'^2$$

$$\mathcal{S}: x^2 + y^2 - z^2 = 1 \quad \text{безпогранич гиперболич}$$

7.7. Одредити једначину геометријског места тачака које су једнако удаљене од мимоилазних правих $p: x=0, y=0$, и $q: z=0, x=a$. Свести површ на канонски облик. О којој се површи ради?

$$p: x=0, y=0$$

$$q: z=0, x=a$$

$$\Rightarrow p: \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{matrix}, t \in \mathbb{R}$$

$$\vec{p} = (0, 0, 1), P(0, 0, 0)$$

$$q: \begin{matrix} x=a \\ y=t \\ z=0 \end{matrix}, t \in \mathbb{R} \quad Q(a, 0, 0)$$

$$\vec{q} = (0, 1, 0)$$

$$M(x, y, z) \in \mathcal{S} \text{ произв.} \Rightarrow d(M, p) = d(M, q)$$

$$\frac{\|\vec{p} \times \vec{PM}\|}{\|\vec{p}\|} = \frac{\|\vec{q} \times \vec{QM}\|}{\|\vec{q}\|}$$

$$\|\vec{p}\| = 1, \|\vec{q}\| = 1$$

$$\vec{p} \times \vec{PM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-y, x, 0)$$

$$\vec{q} \times \vec{QM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ x-a & y & z \end{vmatrix} = (z, 0, a-x)$$

$$\mathcal{S}: \sqrt{y^2 + x^2} = \sqrt{z^2 + (a-x)^2}$$

$$\mathcal{S}: y^2 + x^2 = z^2 + a^2 - 2ax + x^2$$

$$\boxed{\mathcal{S}: y^2 - z^2 = -2a(x - \frac{a}{2})}$$

хиперболоид параболоид

7.8. Одредити једначину цилиндра који је описан око сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ чије су изводнице паралелне вектору $(1, 1, -2)$.

$$\mathcal{S}: x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow C(0, 0, 0), r = 1$$

$$\sigma \text{ т.д. } C \in \sigma, \vec{\sigma} = (1, 1, -2) \Rightarrow \sigma: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}$$

$$M(x, y, z) \in \mathcal{C} \text{ произв.} \Rightarrow d(M, \sigma) = r$$

$$\vec{\sigma} \times \vec{CM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= (z+2y, -z-2x, y-x)$$

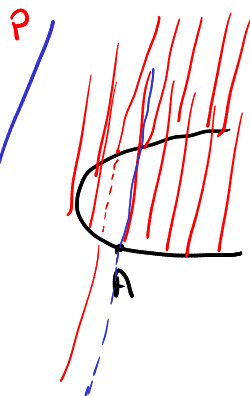
$$\mathcal{C}: \frac{\|\vec{\sigma} \times \vec{CM}\|}{\|\vec{\sigma}\|} = r = 1$$

$$\|\vec{\sigma}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$

$$\mathcal{C}: \frac{\sqrt{(z+2y)^2 + (-z-2x)^2 + (y-x)^2}}{\sqrt{6}} = 1$$

$$\boxed{\mathcal{C}: (z+2y)^2 + (-z-2x)^2 + (y-x)^2 = 6}$$

7.9. (291.) Одредити једначину цилиндра чије су изводнице паралелне правој $p: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{4}$, а који садржи параболу $x^2 = 2y, z=0$.



$$A(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{P} \Rightarrow x_0^2 = 2y_0, z_0 = 0$$

$$i: \frac{x-x_0}{2} = \frac{y-y_0}{3} = \frac{z-z_0}{4} = t \in \mathcal{C} \Rightarrow i:$$

$$x_0 = x - 2t$$

$$y_0 = y - 3t$$

$$z_0 = z - 4t$$

$$1) z_0 = 0 \Rightarrow z - 4t = 0 \Rightarrow t = \frac{z}{4} \Rightarrow$$

$$x_0 = x - \frac{z}{2}$$

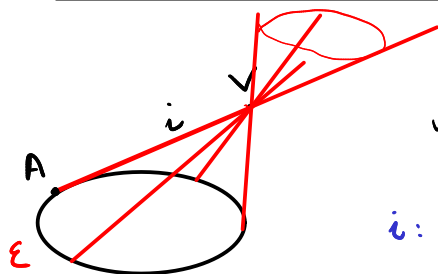
$$y_0 = y - \frac{3z}{4}$$

$$z_0 = 0$$

$$2) x_0^2 = 2y_0$$

$$\boxed{\mathcal{C}: (x - \frac{z}{2})^2 = 2(y - \frac{3z}{4})}$$

7.10. Одредити једначину конуса чији је врх тачка $V(0, 1, 1)$ и који садржи елипсу $x^2 + 3y^2 = 4, z = 0$. ε



$$A(x_0, y_0, z_0) \in \varepsilon \Rightarrow x_0^2 + 3y_0^2 = 4, z_0 = 0$$

изводичица $i = VA : \frac{x}{x_0} = \frac{y-1}{y_0-1} = \frac{z-1}{z_0-1} = t$

$$x_0 = \frac{x}{t} = \frac{x}{1-t}$$

$$i: y_0 = \frac{y-1}{t} + 1 = \frac{y-1}{1-t} + 1 = \frac{y-1+1-t}{1-t} = \frac{y-t}{1-t}$$

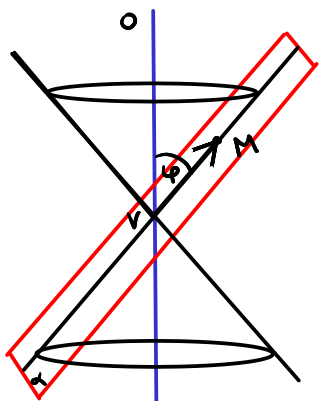
$$z_0 = \frac{z-1}{t} + 1 = 0$$

$$1) z_0 = 0 \Rightarrow \frac{z-1}{t} + 1 = 0 \Rightarrow z-1 = -t \Rightarrow z = 1-t \Rightarrow \underline{t = 1-z}$$

$$2) x_0^2 + 3y_0^2 = 4 \Rightarrow \mathcal{K}: \left(\frac{x}{1-z}\right)^2 + 3\left(\frac{y-t}{1-t}\right)^2 = 4$$

$$\mathcal{K}: x^2 + 3(y-z)^2 = 4(z-1)^2$$

7.11. Одредити једначину кружног конуса коме је права $o: x-y=0, 4x-z=0$ оса и коме је раван $\alpha: x+y+z=0$ тангентна раван.



$$o: \begin{cases} x-y=0 \\ 4x-z=0 \end{cases} \Rightarrow o: \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=4t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{o} = (1, 1, 4)$$

$$\alpha: x+y+z=0 \Rightarrow \vec{n}_\alpha = (1, 1, 1)$$

$$1) V = o \cap \alpha: t+t+4t=0 \Rightarrow t=0 \Rightarrow \underline{V(0, 0, 0)}$$

$$2) \sin \varphi = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{o}|}{\|\vec{n}_\alpha\| \cdot \|\vec{o}\|} = \frac{|1+1+4|}{\sqrt{3} \sqrt{18}} = \frac{6}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

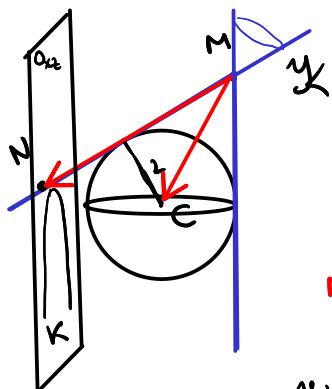
$$\Rightarrow \cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \sqrt{1 - \frac{6}{9}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$3) M(x, y, z) \in \mathcal{K} \text{ произв.} \Rightarrow \angle(VM, o) = \varphi = \text{const.}$$

$$\mathcal{K}: \frac{\sqrt{3}}{3} = \cos \varphi = \frac{|\vec{VM} \cdot \vec{o}|}{\|\vec{VM}\| \cdot \|\vec{o}\|} = \frac{|x+y+4z|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2} \cdot 3\sqrt{2}} \quad / 2$$

$$\mathcal{K}: (x+y+4z)^2 = 6(x^2+y^2+z^2)$$

7.12. (298.) Одредити једначину конуса чије је теме тачка $M(1, 4, 5)$ и који додирује сферу $\sigma: (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4$. Ако је извор светлости у тачки M одредити која је крива контура сенке сфере σ на раван Oxz .



$$\sigma: (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4 \Rightarrow C(1, 2, 1), R=2$$

$$N(x, y, z) \in \mathcal{K} \text{ произв.} \Rightarrow d(C, MN) = 2$$

$$\frac{\|\vec{MC} \times \vec{MN}\|}{\|\vec{MN}\|} = 2$$

$$\vec{MC} = (0, -2, -4)$$

$$\vec{MN} = (x-1, y-4, z-5)$$

$$\vec{MC} \times \vec{MN} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -2 & -4 \\ x-1 & y-4 & z-5 \end{vmatrix} = (-2z+4y-6, 4(x-1), 2(x-1))$$

$$\mathcal{K}: \frac{\sqrt{(4y-2z-6)^2 + 20(x-1)^2}}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2}} = 2$$

$$\mathcal{K}: (4y-2z-6)^2 + 16(x-1)^2 - 4(y-4)^2 - 4(z-5)^2 = 0$$

$$b) K = \mathcal{K} \cap O_{xz}, \quad O_{xz}: y=0 \quad \uparrow$$

$$K: (2z+6)^2 + 16(x-1)^2 - 4(z-5)^2 = 64$$

$$4(z+3)^2 + 16(x-1)^2 - 4(z-5)^2 = 64 \quad / : 4$$

$$\cancel{z^2} + \underline{6z} + \underline{9} + 4x^2 - 8x + 4 - \cancel{z^2} + \underline{10z} - \underline{25} = 16$$

$$4x^2 - 8x + 4 = -16z + 32 \quad / : 4$$

$$K: (x-1)^2 = -4(z-2) \quad \text{ПАРАБОЛА}$$

7.14. Свести једначину површи на канонски облик изометријском трансформацијом и написати формуле трансформације 1) $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 8x + 8y - z + 10 = 0$; 2) $12x^2 + 6y^2 + 9z^2 - 12xz - 12yz - 4 = 0$.

$$1) \mathcal{S}: 3x^2 + 3y^2 - 2xy - 8x + 8y - z + 10 = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} -4 \\ 4 \\ -1/2 \end{matrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -\lambda \end{matrix} = -\lambda \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \cdot [(3-\lambda)^2 - 1]$$

$$= -\lambda(2-\lambda)(4-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1=2 \quad \lambda_2=4 \quad \lambda_3=0$$

$$\lambda_1=2 \Rightarrow (B-2E)\vec{u} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{matrix} a-b=0 \\ -2c=0 \end{matrix} \Rightarrow \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

$$\lambda_2=4 \Rightarrow (B-4E)\vec{u} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{matrix} a=-b \\ c=0 \end{matrix} \Rightarrow \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -b \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$$

$$\lambda_3=0 \Rightarrow B\vec{u} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{matrix} 3a-b=0 \\ -a+3b=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} b=3a \\ a=0 \end{matrix}$$

$$\vec{u}_3 = (0, 0, 1)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ z = z' \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$$

$$\mathcal{S}': \frac{3}{2}(x'^2 - 2x'y' + y'^2) + \frac{3}{2}(x'^2 + 2x'y' + y'^2) - x'^2 + y'^2$$

$$\frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

$$- \frac{8}{\sqrt{2}}(x' - y') + \frac{8}{\sqrt{2}}(x' + y') - z' + 10 = 0$$

$$\mathcal{S}': 2x'^2 + 4y'^2 + 8\sqrt{2}y' - z' + 10 = 0$$

$$\mathcal{S}': 2x'^2 + 4(y' + \sqrt{2})^2 - z' + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\mathcal{S}'': 2x''^2 + 4y''^2 = z''$$

елиптички
параболоид

$$\begin{matrix} x'' = x' \\ y'' = y' + \sqrt{2} \\ z'' = z' - 2 \end{matrix}$$

