

6.7. а) Одредити формуле рефлексије простора у односу на раван $\alpha : 2x + 2y - z + 1 = 0$. б) Шта је слика сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ при тој рефлексији? Скицирати!

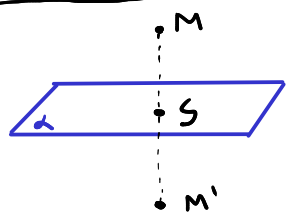
а)

I НАЧИН

* ретн. у односу на α_0 кроз коорд. почетак

$$[S_{\alpha_0}] = I_3 - 2 \vec{n}_{\alpha_0} \cdot \vec{n}_{\alpha_0}^T, \quad \alpha_0 : 2x + 2y - z = 0$$

$$\vec{n}_{\alpha_0} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right)$$



$$[S_{\alpha_0}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8/9 & 8/9 & -4/9 \\ 8/9 & 8/9 & -4/9 \\ -4/9 & -4/9 & 2/9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/9 & -8/9 & 4/9 \\ -8/9 & 1/9 & 4/9 \\ 4/9 & 4/9 & 7/9 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow S_{\alpha} = T_{\vec{OA}} \circ S_{\alpha_0} \circ T_{\vec{AO}}, \quad A \in \alpha \text{ произв.}$$

II НАЧИН

$$M(x_0, y_0, z_0) \mapsto M'(x'_0, y'_0, z'_0)$$

$$1) \text{ н т.д. } M \in n, \text{ н } \perp \alpha \Rightarrow \vec{n} = \vec{n}_{\alpha} = (2, 2, -1) \Rightarrow \begin{cases} x = 2t + x_0 \\ y = 2t + y_0 \\ z = -t + z_0 \end{cases}$$

$$2) S = n \cap \alpha : 4t + 2x_0 + 4t + 2y_0 + t - z_0 + 1 = 0$$

$$t = \frac{1}{9}(-2x_0 - 2y_0 + z_0 - 1)$$

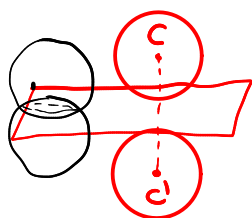
$$\Rightarrow S \left(\frac{5}{9}x_0 - \frac{4}{9}y_0 + \frac{2}{9}z_0 - \frac{2}{9}, -\frac{4}{9}x_0 + \frac{5}{9}y_0 + \frac{2}{9}z_0 - \frac{2}{9}, \frac{2}{9}x_0 + \frac{2}{9}y_0 + \frac{8}{9}z_0 + \frac{1}{9} \right)$$

$$3) [S] = \frac{[M] + [M']}{2} \Rightarrow [M'] = 2[S] - [M]$$

$$M' \left(\frac{1}{9}x_0 - \frac{8}{9}y_0 + \frac{4}{9}z_0 - \frac{4}{9}, -\frac{8}{9}x_0 + \frac{1}{9}y_0 + \frac{4}{9}z_0 - \frac{4}{9}, \frac{4}{9}x_0 + \frac{4}{9}y_0 + \frac{7}{9}z_0 + \frac{2}{9} \right)$$

$$S_{\alpha} : \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/9 & -8/9 & 4/9 \\ -8/9 & 1/9 & 4/9 \\ 4/9 & 4/9 & 7/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4/9 \\ -4/9 \\ 2/9 \end{bmatrix}$$

$$б) S : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \mapsto S' : \left(x + \frac{4}{9} \right)^2 + \left(y + \frac{4}{9} \right)^2 + \left(z - \frac{2}{9} \right)^2 = 1$$

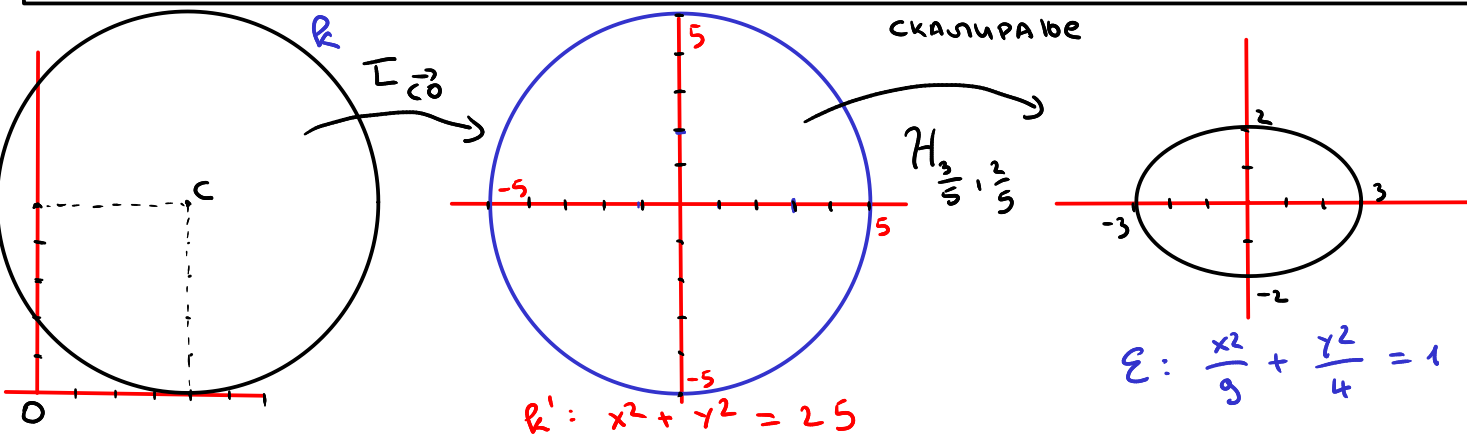


$$C(0, 0, 0) \xrightarrow{S_{\alpha}} C' \left(-\frac{4}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{2}{9} \right)$$

$$r = 1 \mapsto r' = 1$$

6.8. Одредити бар једно афино пресликавање равни које које круг $k : x^2 + y^2 - 8x - 10y + 16 = 0$ пресликава на елипсу $e : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

$$k : (x-4)^2 + (y-5)^2 = 25 \Rightarrow C(4, 5), r = 5$$



скалчрање са центром
у коорд. почетку

$$H_{\lambda_1, \lambda_2}: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$F = H_{\frac{3}{5}, \frac{2}{5}} \circ T_{\vec{c}} \Rightarrow [F] = \begin{bmatrix} 3/5 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & 0 & -12/5 \\ 0 & 2/5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & 0 \\ 0 & 2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12/5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

6.10. Одредити формуле афиног пресликавања простора које представља централну симетрију у односу на тачку $S(-1, 1, 3)$. Да ли пресликавање чува оријентацију простора?

I НАЧИН

$$C_S(M) = M' \Leftrightarrow \vec{SM'} = -\vec{SM}$$

$$M(x, y, z) \mapsto M'(x', y', z')$$

$$(x' + 1, y' - 1, z' - 3) = -(x + 1, y - 1, z - 3)$$

$$C_S: \begin{aligned} x' &= -x - 2 \\ y' &= -y + 2 \\ z' &= -z + 6 \end{aligned}$$

$$C_S: \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

II НАЧИН

$$C_0 = S_{Ox} \circ S_{Oy} \circ S_{Oz} \Rightarrow C_S = T_{\vec{S}} \circ C_0 \circ T_{\vec{S}}$$

$$\det [C_S] = -1 < 0 \Rightarrow \text{не чува оријентацију}$$

6.12. Одредити формуле хомотетије којом се сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ пресликава на сферу $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 3$. Наћи сва решења.

$$S: x^2 + y^2 + z^2 = 1 \mapsto S': (x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 3$$

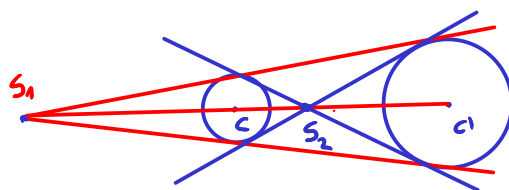
$$C(0, 0, 0), r = 1$$

$$C'(3, 1, 3), r' = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow |C| = \sqrt{3}$$

$$1) \chi_{S, \sqrt{3}}: \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$2) \chi_{S, -\sqrt{3}}: \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$



7 Површи

$$S: a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

7.1. Круг k који настаје ротацијом тачке $A(1, 2, 3)$ око праве $p: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$ написати као: а) пресек равни и сфере којој центар припада равни б) пресек равни и кружног цилиндра в) пресек две сфере полупречника 2.

$$a) k = \alpha \cap S$$

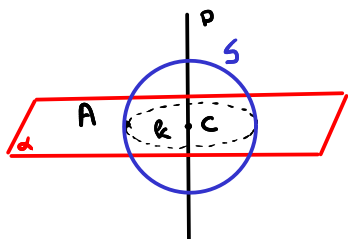
$$1) \alpha \perp p, A \in \alpha, \alpha \perp p \Rightarrow \vec{n}_\alpha = \vec{p} = (1, 1, 1)$$

$$\Rightarrow \alpha: 1(x-1) + 1(y-2) + 1(z-3) = 0$$

$$\alpha: x + y + z - 6 = 0$$

$$2) C = p \cap \alpha$$

$$p: \begin{aligned} x &= t+1 \\ y &= t+2 \\ z &= t+3 \end{aligned}, t \in \mathbb{R}$$



$$P \cap \alpha: t+1+t+2+t+1-6=0 \Rightarrow 3t=2 \Rightarrow t=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow C\left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

$$3) r = d(C, A) = \|\vec{AC}\| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{24}{9}} = \sqrt{\frac{8}{3}}$$

$M(x, y, z) \in S$ произв.

$$S: d(M, C) = r \Rightarrow S: \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{8}{3}$$

$$b) R = \alpha \cap \ell$$

$$\alpha: x+y+z-6=0$$

$$r = \sqrt{\frac{8}{3}}$$

$M(x, y, z) \in \ell$ произв.

$$\Rightarrow d(M, P) = r$$

$$P(1, 2, 1) \in P$$

$$\vec{P} = (1, 1, 1)$$

$$\ell: \sqrt{\frac{8}{3}} = d(M, P) = \frac{\|\vec{P} \times \vec{PM}\|}{\|\vec{P}\|}$$

$$\vec{P} \times \vec{PM} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ x-1 & y-2 & z-1 \end{vmatrix} = (z-y+1, x-z, y-x-1)$$

$$\ell: \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{\sqrt{(z-y+1)^2 + (x-z)^2 + (y-x-1)^2}}{\sqrt{3}}$$

$$\ell: (z-y+1)^2 + (x-z)^2 + (y-x-1)^2 = 8$$

$$b) R = S_1 \cap S_2$$

$$P: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{1}$$

$$P(t+1, t+2, t+1) \in P \text{ произв.}, A(1, 2, 3)$$

$$d(P, A) = 2$$

$$\sqrt{t^2 + t^2 + (t-2)^2} = 2 \quad /^2$$

$$3t^2 - 4t + 4 = 4 \Rightarrow t(3t-4) = 0$$

$$t_1 = 0 \quad \vee \quad t_2 = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow C_1(1, 2, 1)$$

$$C_2\left(\frac{7}{3}, \frac{10}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

$$\Rightarrow S_1: (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4, S_2: \left(x - \frac{7}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{10}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{7}{3}\right)^2 = 4$$

7.2. Одредити једначине равни које садрже праву $l: \frac{x-13}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{4}$ и додирују сферу $S: x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 67 = 0$. Одредити затим једначине симетралних равни диједара између ове две равни назначивши ону која сече дату сферу.

$$a) \ell: \frac{x-13}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{4} \Rightarrow \vec{e} = (-1, 1, 4), L(13, -1, 0) \in \ell$$

$$S: (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 81 \Rightarrow C(1, 2, 3), R=9$$

$$\Rightarrow \alpha: Ax + By + Cz + D = 0$$

$$1) \ell \subset \alpha \Rightarrow \vec{n}_\alpha \cdot \vec{e} = 0 \Rightarrow -A + B + 4C = 0 \Rightarrow B = A - 4C$$

$$2) L \in \ell \subset \alpha \Rightarrow 13A - B + D = 0 \Rightarrow D = B - 13A \Rightarrow D = -12A - 4C$$

$$3) \alpha \text{ додирује } S \Rightarrow d(C, \alpha) = R$$

$$g = \frac{|A+2B+3C+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|A+2A-8C+3C-12A-4C|}{\sqrt{A^2+A^2-8AC+16C^2+C^2}} = \frac{|-9A-9C|}{\sqrt{2A^2-8AC+17C^2}} / 2$$

$$\cancel{81} (2A^2 - 8AC + 17C^2) = \cancel{81} (A^2 + 2AC + C^2)$$

$$A^2 - 10AC + 16C^2 = 0 \quad /: C^2$$

$$\left(\frac{A}{C}\right)^2 - 10 \frac{A}{C} + 16 = 0 \Rightarrow t^2 - 10t + 16 = 0$$

$$(t-2)(t-8) = 0$$

$$t=2 \quad t=8$$

$$\Rightarrow A=2C \quad \vee \quad A=8C$$

$$B=-2C$$

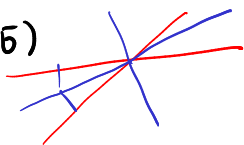
$$B=4C$$

$$D=-28C$$

$$D=-100C$$

$$d_1: 2x - 2y + z - 28 = 0, \quad d_2: 8x + 4y + z - 100 = 0$$

б)



$$M(x, y, z) \in \sigma \text{ произв.} \Rightarrow d(M, d_1) = d(M, d_2)$$

$$\frac{|2x - 2y + z - 28|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|8x + 4y + z - 100|}{\sqrt{8^2 + 4^2 + 1^2}}$$

$$3|2x - 2y + z - 28| = |8x + 4y + z - 100|$$

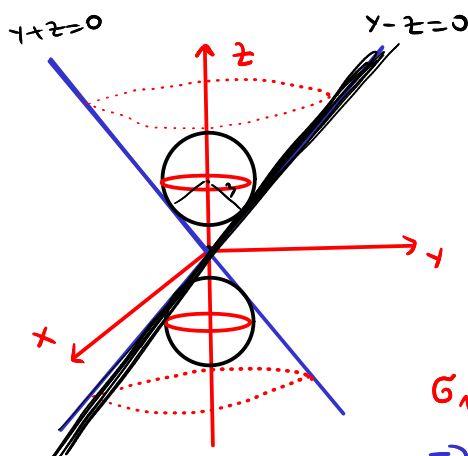
$$3(2x - 2y + z - 28) = \pm (8x + 4y + z - 100)$$

$$\sigma_1: 2x + 10y - 2z - 16 = 0 \quad \sigma_2: 14x - 2y + 4z - 184 = 0$$

$$\sigma_1: x + 5y - z - 8 = 0, \quad \sigma_2: 7x - y + 2z - 92 = 0$$

$$C(1, 2, 3) \in \sigma_1? \quad 1 + 10 - 3 - 8 = 0 \quad \checkmark \Rightarrow C \in \sigma_1 \Rightarrow \sigma_1 \text{ сече } S$$

7.3. Одредити једначину сфере полупречика 3 која је уписана у конус $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Скицирати.



$$\gamma: x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

$$z=0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow O(0, 0, 0)$$

$$x=0 \Rightarrow y^2 - z^2 = 0 \Rightarrow y = \pm z$$

$$y=0 \Rightarrow x^2 - z^2 = 0 \Rightarrow x = \pm z$$

$$O \subset \text{конуса је } O_z: x=0, y=0, z=t, t \in \mathbb{R}$$

$$C \in O_z \Rightarrow C(0, 0, t) \text{ центар сфере}$$

$$\sigma_1: y - z = 0 \text{ танг. раван на } S$$

$$\Rightarrow d(C, \sigma_1) = 3$$

$$\frac{|0 - t|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 3 \Rightarrow |t| = 3\sqrt{2} \Rightarrow t = \pm 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow C_1(0, 0, 3\sqrt{2}), \quad C_2(0, 0, -3\sqrt{2})$$

$$S_1: x^2 + y^2 + (z - 3\sqrt{2})^2 = 9, \quad S_2: x^2 + y^2 + (z + 3\sqrt{2})^2 = 9$$