

5.14. Одредити једначину праве која садржи тачку $A(3,4)$ и додирује криву $2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0$.

1) $P: \frac{x-3}{a} = \frac{y-4}{b} \Rightarrow P: \begin{cases} x = at+3 \\ y = bt+4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

2) P додирује $\mathcal{K} \Leftrightarrow P \cap \mathcal{K}$ има јед. решење

$$2(at^2 + 6at + 9) - 4(abt^2 + 4at + 3bt + 12) + (b^2t^2 + 8bt + 16) - 2at - 6 + 6bt + 24 - 3 = 0$$

$$\underbrace{(2a^2 - 4ab + b^2)}_A t^2 + \underbrace{(-6a + 2b)}_B t + \underbrace{1}_C = 0$$

$$0 = D = B^2 - 4AC = 36a^2 - 24ab + 4b^2 - 8a^2 + 16ab - 4b^2$$

$$28a^2 - 8ab = 0 \Rightarrow 4a(7a - 2b) = 0$$

$$\Rightarrow a = 0$$

$$\vee b = \frac{7}{2}a$$

$$\Rightarrow \vec{p} = (0, 1)$$

$$\vec{p} = (a, \frac{7}{2}a) \parallel (2, 7)$$

$$t_1: \frac{x-3}{0} = \frac{y-4}{1}$$

$$t_2: \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{7}$$

$$\boxed{t_1: x=3}$$

$$\boxed{t_2: 7x - 2y - 13 = 0}$$

Свођење криве II реда на канонски облик

$$\mathcal{K}: a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{K}: [x \ y \ 1] A \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

5.16. Свести криву другог реда $4x^2 - 4xy + y^2 + x + 12y + 6 = 0$ на канонски облик изометријском трансформацијом координата и написати формуле те трансформације. Која је то крива и колики јој је ексцентрицитет. Скицати криву.

$$\mathcal{K}: 4x^2 - 4xy + y^2 + x + 12y + 6 = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1/2 \\ -2 & 1 & 6 \\ 1/2 & 6 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

* сопств. вредности B

$$\det(B - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4 - 4 = \lambda(\lambda - 5) = 0$$

$$\boxed{\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 5}$$

* сопств. вектори $\Leftrightarrow (B - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}$

$$\boxed{\lambda_1 = 0} \Rightarrow B\vec{v} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4a - 2b = 0 \\ -2a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow b = 2a \Rightarrow \vec{v}_1 = (a, 2a)$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\lambda_2 = 5 \Rightarrow (B - 5E) \vec{v} = \vec{0} \quad -a - 2b = 0 \Rightarrow a = -2b \Rightarrow \vec{v}_2 = (-2b, b)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -2a - 4b = 0 \Rightarrow \vec{v}_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} & 0 \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = R \cdot X'$$

$$X: x^T A x = 0 \Rightarrow (R X')^T A \cdot R X' = 0 \Rightarrow X': X'^T \overset{A'}{R^T A R} X' = 0$$

$$A' = R^T A R = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1/2 \\ -2 & 1 & 6 \\ 1/2 & 6 & 6 \end{bmatrix} R$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2 \cdot 1/2}{\sqrt{5}} = \frac{2.5}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

$$-\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 25/2\sqrt{5} \\ -10/\sqrt{5} & 5/\sqrt{5} & 5/\sqrt{5} \\ 1/2 & 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} & 0 \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5\sqrt{5}/2 \\ 0 & 5 & \sqrt{5} \\ 5\sqrt{5}/2 & \sqrt{5} & 6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X': 5 y'^2 + 5\sqrt{5} x' + 2\sqrt{5} y' + 6 = 0$$

$$X': 5 \left(y'^2 + \frac{2}{\sqrt{5}} y' + \frac{1}{5} \right) + 5\sqrt{5} x' - 1 + 6 = 0$$

$$X': 5 \left(y' + \frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2 + 5\sqrt{5} x' + 5 = 0 \quad / : 5$$

$$\underbrace{\left(y' + \frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2}_{y''} = -\sqrt{5} \underbrace{\left(x' + \frac{1}{\sqrt{5}} \right)}_{x''} \quad ! \text{ we } x'' = -\sqrt{5} x' - 1 \text{ see these nom.}$$

$$X'': y''^2 = -\sqrt{5} x''$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{matrix} y''' = y'' \\ x''' = -x'' \end{matrix}$$

$$\Rightarrow X''': y'''^2 = \sqrt{5} x'''$$

ПАРАБОЛА

$$y^2 = 2px$$

$$\Rightarrow p = \frac{\sqrt{5}}{2}, T''(0,0), F\left(\frac{\sqrt{5}}{4}, 0\right), d''': x''' = -\frac{\sqrt{5}}{4}, \sigma''': y''' = 0$$

формуле:

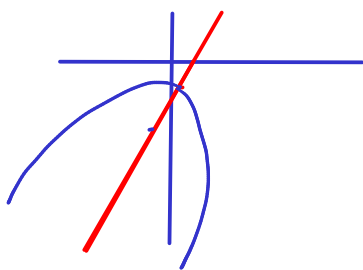
$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{5}} x' - \frac{2}{\sqrt{5}} y' = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(x'' - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) - \frac{2}{\sqrt{5}} \left(y'' - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = -\frac{1}{\sqrt{5}} x''' - \frac{2}{\sqrt{5}} y''' + \frac{1}{5} = x \\ y &= \frac{2}{\sqrt{5}} x' + \frac{1}{\sqrt{5}} y' = \frac{2}{\sqrt{5}} \left(x'' - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(y'' - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = -\frac{2}{\sqrt{5}} x''' + \frac{1}{\sqrt{5}} y''' - \frac{3}{5} = y \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T(1/5, -3/5), F(-\frac{1}{20}, -\frac{11}{10}), \sqrt{5} y''' = -2x + y + 1$$

$$\Rightarrow \sigma: -2x + y + 1 = 0$$

$$y = 2x - 1$$

$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1/2 \\ y & -1 & 0 \end{array}$$



6 Афина пресликавања

F афине пресликавање $M(x, y) \xrightarrow{F} M'(x', y')$

$$\Rightarrow f: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad F: Ax + B = x'$$

$$\Rightarrow f: \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boxed{F(\vec{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}}$$

Особине:

- 1) слика праве у праве
- 2) чува паралелност правих
- 3) чува размеру колчан. дужи

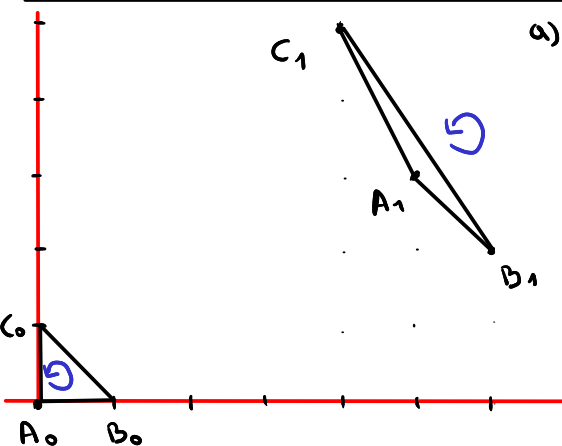
4) $\frac{P_{слике}}{P_{оригинала}} = \det A$

5) $\det A > 0 \Rightarrow$ чува оријентацију

$\det A < 0 \Rightarrow$ не чува

6) не чува дужине, углове,

6.1. а) Одредити афине пресликавање које тачке $A_0(0,0)$, $B_0(1,0)$, $C_0(0,1)$ пресликава редом у тачке $A_1(5,3)$, $B_1(6,2)$, $C_1(4,5)$. б) Да ли је пресликавање изометрија, чува ли оријентацију и површину? в) Одредити му инверзно пресликавање.



$$a) f: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

$$f(0) = f(A_0) = A_1 = (5, 3)$$

$$f(\vec{e}_1) = f(\vec{A_0B_0}) = \vec{A_1B_1} = (1, -1)$$

$$f(\vec{e}_2) = f(\vec{A_0C_0}) = \vec{A_1C_1} = (-1, 2)$$

$$\boxed{f: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}}$$

$$A^T A = E \quad (\Rightarrow \text{изометрија})$$

б) $\|\vec{A_0B_0}\| = 1 \xrightarrow{F} \|\vec{A_1B_1}\| = \sqrt{2} \Rightarrow F$ није изометрија

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0 \Rightarrow \text{чува оријентацију}$$

$$\det A = 1 \Rightarrow P_{слике} = P_{оригинала} \Rightarrow \text{чува површину}$$

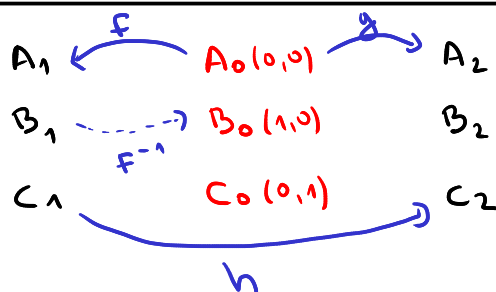
в) $x' = Ax + B \Rightarrow x = A^{-1}x' - A^{-1}B$

$$, A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{F^{-1}: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 13 \\ 8 \end{bmatrix}}$$

$$(A_0, B_0, C_0) \xrightarrow{F} (A_1, B_1, C_1)$$

6.2. а) Одредити афине пресликавање које троугао $A_1B_1C_1 : A_1(5,3)$, $B_1(6,2)$, $C_1(4,5)$ пресликава троугао $A_2B_2C_2 : A_2(1,1)$, $B_2(-1,0)$, $C_2(0,-3)$. б) чува ли пресликавање оријентацију. Скицати. в) Одредити површину троугла $A_2B_2C_2$ ако се зна да је површина троугла $A_1B_1C_1$ једнака $\frac{1}{2}$.



$$\boxed{h = g \circ F^{-1}}$$

$$P_{A_2B_2C_2} = \det h \cdot P_{A_1B_1C_1}$$

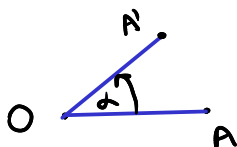
6.3. а) Одредити формуле ротације око тачке $S(2,2)$ за угао од $\phi = \frac{\pi}{4}$. б) Шта је слика праве $y = -x$ при том пресликавању. Нацртати!

* РОТАЦИЈА ОКО O ЗА УГАО α

* ТРАНСЛАЦИЈА ЗА $\vec{v} = (a, b)$

$$R_{O, \alpha} : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$T_{\vec{v}} : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$



а) $R_{S, \phi} = T_{\vec{OS}} \circ R_{O, \phi} \circ T_{\vec{SO}}$

III НАЧИН

$$x' = [R_{O, \phi}]x + b$$

$S \mapsto S$

$$[R_{S, \phi}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 2-2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\Rightarrow R_{S, \phi} : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2-2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

б) $P: y = -x \xrightarrow{R} P': y = 2-2\sqrt{2}$

I НАЧИН $O(0,0) \in P \mapsto (2, 2-2\sqrt{2}) = O' \in P'$
 $A(1,-1) \in P \mapsto (2+\sqrt{2}, 2-2\sqrt{2}) = A' \in P'$

$$\vec{P'} = \vec{O'A'} = (\sqrt{2}, 0) \Rightarrow P': \frac{x-2}{\sqrt{2}} = \frac{y-2+2\sqrt{2}}{0} \Rightarrow P': y = 2-2\sqrt{2}$$

II НАЧИН

$$x = \dots \Rightarrow P': y = -x \dots$$

6.4. а) Одредити формуле ротације око тачке $S(2,5)$ за угао од $\phi = \frac{\pi}{2}$. б) Шта је слика круга $(x-2)^2 + y^2 = 4$ при том пресликавању. Нацртати!

II НАЧИН

а) $[R_{S, \phi}] = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

2) $S \mapsto S \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2 = -5 + a \\ 5 = 2 + b \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = 7 \\ b = 3 \end{matrix}$

$$R_{S, \frac{\pi}{2}} : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

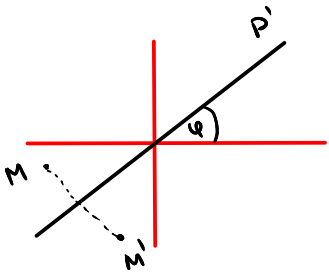
б) $k: (x-2)^2 + y^2 = 4 \mapsto k': (x-7)^2 + (y-5)^2 = 4$

$C(2,0), r=2 \mapsto C'(7,5), r'=2$

$$C \mapsto C' : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

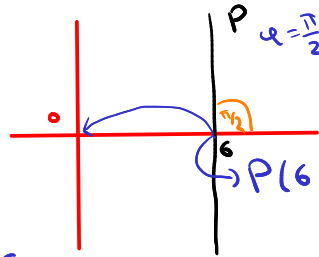
6.5. Одредити формуле рефлексije у односу на праву $p: x = 6$.

* рефлексija γ односу на праву кроз O



$$S_p: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

* $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $S_p = T_{\vec{OP}} \circ S_{p'} \circ T_{\vec{PO}}$



$$P(6,0) \quad [S_p] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[S_p] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

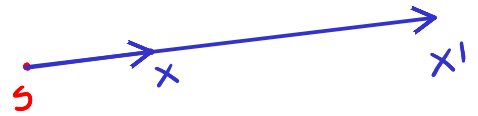
$$S_p: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

6.6. Одредити формуле хомотетије са коефицијентом 2 у односу на тачку $S(4,3)$. шта је слика круга $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 9$ при тој хомотетији?

* хомотетија са центром γ O и коеф. κ

$$\chi_{O,\kappa}: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & \kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

* $\chi_{S,\kappa}(X) = X' \Leftrightarrow \vec{SX'} = \kappa \vec{SX}$



I начин $\chi_{S,2} = T_{\vec{OS}} \circ \chi_{O,2} \circ T_{\vec{SO}}$

$$[\chi_{S,2}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\chi_{S,2}: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

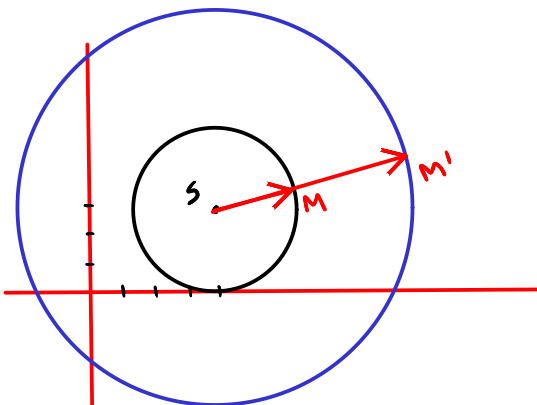
II начин $\chi_{S,2}(M) = M' \Leftrightarrow \vec{SM'} = 2\vec{SM}$

$$M(x,y) \mapsto M'(x',y') : (x'-4, y'-3) = 2(x-4, y-3)$$

$$x'-4 = 2x-8$$

$$y'-3 = 2y-6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = 2x - 4 \\ y' = 2y - 3 \end{cases}$$



$$K: (x-4)^2 + (y-3)^2 = 9$$

$$C(4,3), r=3$$



$$C'(4,3), r'=6$$

$$K': (x-4)^2 + (y-3)^2 = 36$$