

Аналитичка геометрија - колоквијум (23.05.2026.)

Презиме и име

Индекс

Ток

Поени

30

Обавезно прочитати!

У току теста није дозвољено коришћење литературе, телефона, окретање, а све врсте покушаја варања биће ригорозно санкционисане. Решења задатака су реални бројеви које треба уписати у за то предвиђене кућице. Поени предвиђени за задатак (3 по задатку) освајају се уколико су све кућице у оквиру тог задатка исправно попуњене уз тачан поступак решавања. Уколико кућице нису исправно попуњене, тачан поступак решавања носиће део поена.

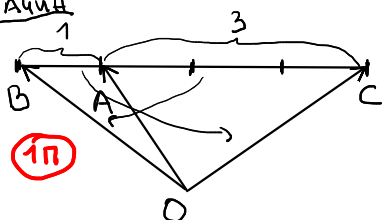
Време предвиђено за рад је 90 минута! Срећан рад!

Нека су O, A, B и C четири различите тачке и нека је $\vec{AC} = 3\vec{BA}$. Тада је

$$\vec{OC} = \boxed{4} \vec{OA} + \boxed{-3} \vec{OB}.$$

Поступак:

I НАЧИН



$$\boxed{1.4} \Rightarrow \vec{OA} = \frac{1}{4} \vec{OC} + \frac{3}{4} \vec{OB} \quad / \cdot 4$$

$$\boxed{\vec{OC} = 4\vec{OA} - 3\vec{OB}} \quad (2п)$$

II НАЧИН

$$\vec{AC} = 3\vec{BA} = 3\vec{BC} + 3\vec{CA} \Rightarrow 4\vec{AC} = -3\vec{CB} \Rightarrow \vec{AC} = -\frac{3}{4}\vec{CB} \xrightarrow[\lambda = -\frac{3}{4}]{1 \cdot 4} \vec{OC} = \frac{1}{-\frac{3}{4} + 1} \vec{OA} + \frac{-\frac{3}{4}}{-\frac{3}{4} + 1} \vec{OB}$$

III НАЧИН

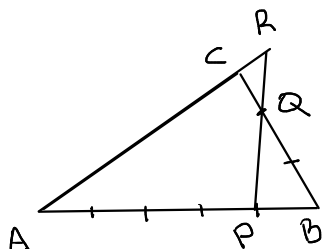
$$\Rightarrow \boxed{\vec{OC} = 4\vec{OA} - 3\vec{OB}} \quad (2п)$$

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OA} + 3\vec{BA} = \vec{OA} + 3(\vec{BO} + \vec{OA}) = \boxed{4\vec{OA} - 3\vec{OB}} \quad (3п)$$

Нека је ABC троугао, и P и Q такве да је $\vec{AB} = 5\vec{PB}$ и $\vec{BQ} = -2\vec{CQ}$. Ако је R тачка пресека правих AC и PQ , тада је

$$\vec{AC} = \boxed{-7} \vec{RC}.$$

Поступак:



$$\Delta ABC \quad P, Q, R \text{ колчн.} \quad \xrightarrow{\text{Менел Aj}} \frac{\vec{AP}}{\vec{PB}} \cdot \frac{\vec{BQ}}{\vec{QC}} \cdot \frac{\vec{CR}}{\vec{RA}} = -1$$

$$\vec{AB} = 5\vec{PB} \Rightarrow \vec{AP} + \vec{PB} = 5\vec{PB} \Rightarrow \boxed{\vec{AP} = 4\vec{PB}} \quad (1п)$$

$$\vec{BQ} = -2\vec{CQ} = 2\vec{QC}$$

$$\Rightarrow 4 \cdot 2 \cdot \frac{\vec{CR}}{\vec{RA}} = -1 \Rightarrow \frac{\vec{CR}}{\vec{RA}} = -\frac{1}{8} \Rightarrow \boxed{\vec{AR} = 8\vec{CR}} \quad (1п)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{AC} = \vec{AR} + \vec{RC} = 8\vec{CR} + \vec{RC} = -8\vec{RC} + \vec{RC} = -7\vec{RC}} \quad (1п)$$

Ако су вектори $\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{y} = 4\vec{a} + 4\vec{b}$ међусобно ортогонални, при чему је $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 1$, тада је

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \boxed{\pi}.$$

Поступак:

$$\vec{x} \perp \vec{y} \Rightarrow \overset{(1п)}{0} = \vec{x} \circ \vec{y} = (2\vec{a} + \vec{b}) \circ (4\vec{a} + 4\vec{b})$$

$$\Rightarrow 0 = 8\underbrace{\|\vec{a}\|^2}_{=1} + 8\vec{a} \circ \vec{b} + 4\vec{b} \circ \vec{a} + 4\underbrace{\|\vec{b}\|^2}_{=1}$$

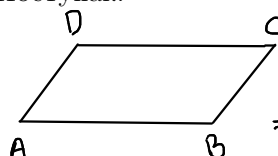
$$\Rightarrow 12\vec{a} \circ \vec{b} = -12 \Rightarrow \boxed{\vec{a} \circ \vec{b} = -1} \quad (1п)$$

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} = \frac{-1}{1 \cdot 1} = -1 \Rightarrow \boxed{\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi} \quad (1п)$$

Нека су $A(3, 5, 1)$, $B(-1, 4, 1)$ и $C(11, 1, 1)$ три узастопна темена паралелограма $ABCD$. Тада су координате четвртог темена D , као и површина тог паралелограма:

$$D(\boxed{15}, \boxed{2}, \boxed{1}), \quad P = \boxed{24}.$$

Поступак:



$$\left. \begin{array}{l} \text{Нека је } D(x, y, z) \\ ABCD \text{ ПАРАЛЕЛОГРАМ} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{AD} = \vec{BC}$$

$$(x-3, y-5, z-1) = (12, -3, 0)$$

$$\Rightarrow x-3=12, y-5=-3, z-1=0 \Rightarrow \boxed{D(15, 2, 1)} \quad (1п)$$

$$P = \|\vec{BA} \times \vec{BC}\| = \|(0, 0, 24)\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (24)^2} = \boxed{24} \quad (1п)$$

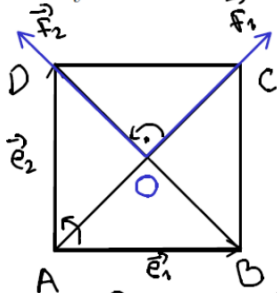
$$\vec{BA} \times \vec{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 1 & 0 \\ 12 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{(0, 0, -24)} \quad (1п)$$

Дат је квадрат $ABCD$ стране дужине 1 са центром O . Ортонормирани афини репер Axy има координатне векторе $\vec{e}_1 = \vec{AB}$ и $\vec{e}_2 = \vec{AD}$. У ортонормираном афиним реперу $Ox'y'$ исте оријентације тачка C је на позитивном делу x' осе. Веза између старих и нових координата је:

$$x' = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}} x + \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}} y + \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}},$$

$$y' = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}} x + \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}} y + \boxed{0}.$$

Поступак:



$$[O]_{Ae} = [\vec{AO}]_e = \left[\frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD}) \right]_e = \left[\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right]$$

$$\vec{f}_1 = \frac{\vec{OC}}{\|\vec{OC}\|} = \frac{\frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD})}{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_2 \quad (1п)$$

$$\Rightarrow [\vec{f}_1]_e = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right]$$

$$ABCD \text{ КВАДРАТ} \Rightarrow \vec{OD} \perp \vec{OC} \Rightarrow \vec{f}_2 = \frac{\vec{OD}}{\|\vec{OD}\|}$$

$$\vec{OD} = \frac{1}{2} \vec{BD} = \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{AD}) = -\frac{1}{2} \vec{e}_1 + \frac{1}{2} \vec{e}_2$$

$$\vec{f}_2 = \frac{\vec{OD}}{\|\vec{OD}\|} = \frac{-\frac{1}{2} \vec{e}_1 + \frac{1}{2} \vec{e}_2}{\sqrt{2}/2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_2 \quad (1п)$$

$$\Rightarrow [\vec{f}_2]_e = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right]$$

Наставак:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}}_B \quad x = Cx' + B \quad \Rightarrow x' = C^{-1}x - C^{-1}B$$

C ортогонална $\Rightarrow C^{-1} = C^T$

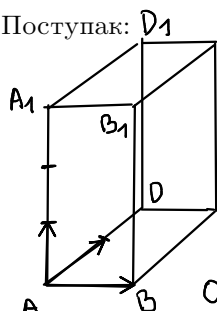
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1п)$$

Дат је правоугли паралелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ивица $AB = 1$, $AD = 2$, $AA_1 = 3$. Угао између праве AC_1 и равни BCD_1 једнак је

$$\arcsin \frac{3}{\sqrt{35}}$$

Поступак:



Посматрајмо ортонормирани репер

$$\vec{e}_1 = \vec{AB}, \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{2} \vec{AD}, \quad \vec{e}_3 = \frac{1}{3} \vec{AA_1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A(0,0,0), B(1,0,0), C(1,2,0) \\ C_1(1,2,3), D_1(0,2,3) \end{cases} \quad (1п)$$

Означимо $P = AC_1$ и $\alpha = \text{раван } BCD_1$

$$\Rightarrow \vec{P} = \vec{AC_1} = (1, 2, 3)$$

$$\vec{BC} \times \vec{BD_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (6, 0, 2) \parallel (3, 0, 1) = \vec{n}_\alpha$$

$$\sin \angle(P, \alpha) = \frac{|\vec{P} \cdot \vec{n}_\alpha|}{\|\vec{P}\| \cdot \|\vec{n}_\alpha\|} = \frac{6}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{10}} = \frac{6}{\sqrt{2} \sqrt{7} \sqrt{2} \sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{35}} = \frac{3\sqrt{35}}{35}$$

$$\Rightarrow \angle(P, \alpha) = \arcsin \frac{3}{\sqrt{35}} \quad \rightarrow \text{или} \quad (1п)$$

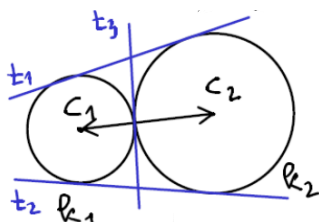
Кругови $k_1 : (x-13)^2 + (y+12)^2 = r_1^2$ и $k_2 : (x-1)^2 + (y+3)^2 = 64$ имају тачно три заједничке тангенте. Тада је

$$r_1 = 7$$

Поступак:

$$k_1 : (x-13)^2 + (y+12)^2 = r_1^2 \Rightarrow C_1(13, -12), r_1$$

$$k_2 : (x-1)^2 + (y+3)^2 = 64 \Rightarrow C_2(1, -3), r_2 = 8$$



k_1 и k_2 имају тачно три заједничке тангенте $\Leftrightarrow$ додирују се споља

$$\Leftrightarrow d(C_1, C_2) = r_1 + r_2 \quad (1п)$$

$$d(C_1, C_2) = \sqrt{(13-1)^2 + (-12+3)^2} = \sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} = 15$$

$$\Rightarrow r_1 = 15 - r_2 = 15 - 8 = 7 \quad (1п)$$

Правa p која садржи пресек правих $a : 2x + y + 4 = 0$ и $b : x + 2y - 1 = 0$ и паралелна је правој $c : 3x - y + 1312 = 0$ има једначину

$$p : \frac{x + \boxed{3}}{3} = \frac{y + \boxed{-2}}{\boxed{9}}. \quad (1п)$$

Поступак:

1) $a \cap b : \begin{cases} 2x + y + 4 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \xrightarrow{-2} \begin{cases} 2x + y + 4 = 0 \\ -3x - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -3 \quad (1п)$
 $\xrightarrow{+} y = -2x - 4 = 2 \Rightarrow a \cap b = \{A(-3, 2)\}$

2) $p \parallel c : 3x - y + 1312 = 0 \Rightarrow \vec{p} = \vec{c} = (1, 3) \parallel (3, 9)$
 $\vec{n}_c = (3, -1) \Rightarrow \vec{c} = (1, 3) \quad \text{због кутациа} \quad (1п)$

Дате су праве $p : \frac{x+2}{1} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z+4}{1}$ и $q : \frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z+3}{\lambda}$. Вредност реалног параметра λ за коју се праве p и q секу, као и координате пресечне тачке A су:

$$\lambda = \boxed{-1}, \quad A(\boxed{0}, \boxed{-3}, \boxed{-2}).$$

Поступак:

Иначе $p : \begin{cases} x = t - 2 \\ y = -4t + 5 \\ z = t - 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad q : \begin{cases} x = 2\lambda + 2 \\ y = -2\lambda - 5 \\ z = \lambda\lambda - 3 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow \begin{cases} t - 2 = 2\lambda + 2 \\ -4t + 5 = -2\lambda - 5 \\ t - 4 = \lambda\lambda - 3 \end{cases} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \uparrow \\ \text{из прве} \end{smallmatrix}} \begin{cases} t = 2\lambda + 4 \\ -4(2\lambda + 4) + 5 = -2\lambda - 5 \\ t - 4 = \lambda\lambda - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8\lambda - 16 + 5 = -2\lambda - 5 \\ -2 = -\lambda - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6\lambda = -6 \\ \lambda = -1 \end{cases}$

$\Rightarrow \lambda = -1 \quad (1п) \quad t = 2, \lambda = -1 \quad (1п) \quad A(0, -3, -2) \quad (1п)$

Другачиче p и q се секу $\Leftrightarrow [\vec{p}, \vec{q}, \vec{PQ}] = 0$
 $\vec{p} = (1, -4, 1) \quad \vec{q} = (2, -2, \lambda)$
 $P(-2, 5, -4) \quad Q(2, -5, -3) \quad \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & \lambda \\ 4 & -10 & 1 \end{vmatrix} = \dots = -6\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

Раван β која садржи праву $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{-1}$ и паралелна је равни $\alpha : 2x + y + 2z + 7 = 0$ има једначину

$$\beta : \boxed{-4}x - 2y + \boxed{-4}z + \boxed{12} = 0.$$

Поступак:

1) $p \subset \beta \Rightarrow P(1, 2, 1) \in p \subset \beta \quad (1п)$

2) $\beta \parallel \alpha \Rightarrow \vec{n}_\beta = \vec{n}_\alpha = (2, 1, 2) \quad (1п)$

$\Rightarrow \beta : 2(x-1) + 1(y-2) + 2(z-1) = 0$

$\beta : 2x + y + 2z - 6 = 0 \quad / \cdot (-2) \quad \text{због кутациа}$

$\Rightarrow \beta : -4x - 2y - 4z + 12 = 0 \quad (1п)$

