Геометрија 1 — скрипта

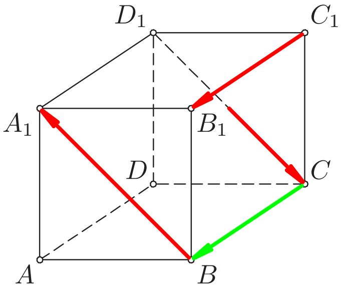
Димитрије Шпадијер

27. март 2020.

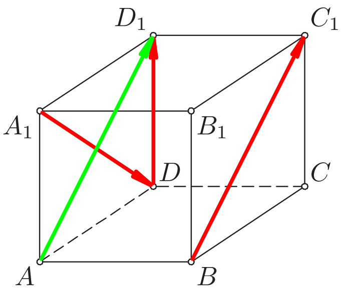
Садржај

1 Линеарне операције са векторима

1.1. а)

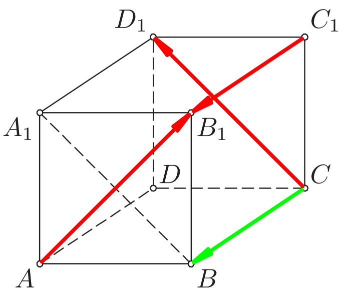


Вектори $\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{C_1B_1}$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{D_1C}$ су компланарни. Заиста, ако уочимо дате векторе и уочимо представника $\overrightarrow{CB}$ вектора $\overrightarrow{C_1B_1}$ (означен зеленом бојом), примећујемо да се вектори $\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{CB}$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{D_1C}$ налазе у равни BCD_1A_1.
б)



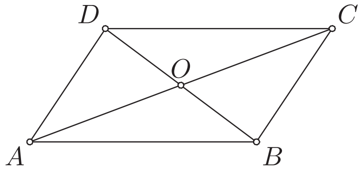
Вектори $\overrightarrow{DD_1}$, $\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{A_1D}$ су компланарни. Као у претходном задатку, ако уочимо дате векторе и уочимо представника $\overrightarrow{AD_1}$ вектора $\overrightarrow{BC_1}$ (означен зеленом бојом), примећујемо да се вектори $\overrightarrow{DD_1}$, $\overrightarrow{AD_1}$, $\overrightarrow{A_1D}$ налазе у равни ADD_1A_1.

в)



Вектори $\overrightarrow{C_1B_1}$, $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{CD_1}$ нису компланарни. Заиста, уочимо представника $\overrightarrow{CB}$ вектора $\overrightarrow{C_1B_1}$ (означен зеленом бојом). Можемо приметити да се вектори $\overrightarrow{CD_1}$ и $\overrightarrow{CB}$ налазе у равни BCD_1A_1, али да ма ког представника вектора $\overrightarrow{AB_1}$ посматрали, не можемо га сместити у ту раван. Дакле, не постоји раван која садржи неке представнике ових вектора, те они нису компланарни.

1.2.

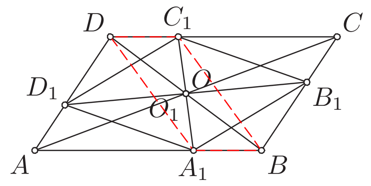


$\boxed{\Longrightarrow}$: Претпоставимо да се дијагонале четвороугла $ABCD$ полове. То значи да се дужи AC и BD секу у тачки O која је средиште и једне и друге дужи. Према томе, важи $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB}$. Закључујемо да је $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{DC}$, што значи да је четвороугао $ABCD$ паралелограм.

$\boxed{\Longleftarrow}$: Претпоставимо да је четвороугао $ABCD$ паралелограм. Нека је O

средиште дијагонале AC. Тада важи $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$. Треба доказати да је O средиште дијагонале BD. Пошто је $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$, следи да је O средиште дијагонале BD, па се дијагонале паралелограма $ABCD$ полове.

1.3.



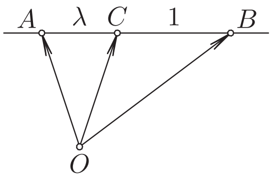
Користићемо тврђење из претходног задатка, тј. да се дијагонале паралелограма полове. Према том тврђењу, дијагонале AC и BD паралелограма $ABCD$ секу се у тачки O која је њихово заједничко средиште. Такође, и дијагонале A_1C_1 и B_1D_1 паралелограма $A_1B_1C_1D_1$ секу се у тачки O_1 која је њихово заједничко средиште. Потребно је доказати да се AC, BD, A_1C_1, B_1D_1 секу у једној тачки. Пошто се прве две секу у O, а друге две у O_1, треба доказати да су O и O_1 иста тачка. Ако докажемо да је четвороугао A_1BC_1D паралелограм, онда се његове дијагонале A_1C_1 и BD секу у тачки која им је заједничко средиште. Међутим, како је средиште дужи јединствена тачка, а средиште дужи A_1C_1 је тачка O_1, а средиште дужи BD је тачка O, овим ће бити доказано да су O и O_1 иста тачка, а тиме и тврђење овог задатка.

Нека су $\lambda, \mu, \nu, \theta \in \mathbb{R}$ такви да је $\overrightarrow{A_1B} = \lambda\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B_1C} = \mu\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC_1} = \nu\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{AD_1} = \theta\overrightarrow{AD}$. Четвороугао $ABCD$ је паралелограм, па је $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Такође, четвороугао $A_1B_1C_1D_1$ је паралелограм, па је $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{D_1C_1}$. Пошто је

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A_1B_1} &= \overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB_1}\\
&= \lambda\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{B_1C}\\
&= \lambda\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \mu\overrightarrow{BC}\\
&= \lambda\overrightarrow{AB} + (1-\mu)\overrightarrow{BC}\\
&= \lambda\overrightarrow{AB} + (1-\mu)\overrightarrow{AD},\\
\overrightarrow{D_1C_1} &= \overrightarrow{D_1A} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC_1}\\
&= -\overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{AD} + \nu\overrightarrow{DC}\\
&= -\theta\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} + \nu\overrightarrow{DC}\\
&= \nu\overrightarrow{DC} + (1-\theta)\overrightarrow{AD}\\
&= \nu\overrightarrow{AB} + (1-\theta)\overrightarrow{AD},
\end{aligned}$$

а вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ су линеарно независни, следи да важи $\lambda = \nu$ и $1-\nu = 1-\theta$, тј. $\nu = \theta$. Према томе, $\overrightarrow{A_1B} = \lambda\overrightarrow{AB} = \nu\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC_1}$, па је четвороугао A_1BC_1D паралелограм, што смо и хтели да докажемо.

1.4.



Важе следеће једнакости:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}\\ &= \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{CB}\\ &= \overrightarrow{OA} + \lambda(\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB})\\ &= \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{CO} + \lambda\overrightarrow{OB}\\ &= \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} - \lambda\overrightarrow{OC}.\end{aligned}$$

Према томе, $(\lambda+1)\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}$, па је $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{\lambda+1}\overrightarrow{OA} + \frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{OB}$. Приметимо да смо искористили претпоставку да је $\lambda + 1 \neq 0$, тј. да је $\lambda \neq -1$. Ово је оправдано, тј. заиста важи $\lambda \neq -1$, јер ако то не би било тачно, онда би било $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CB}$, тј. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0}$, односно било би $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$, што је у супротности с условом задатка ($A \neq B$).

1.5. Тачка C припада правој AB ако и само ако су тачке A, B и C колинеарне, а то важи ако и само ако су вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ колинеарни, односно линеарно зависни. Пошто је $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{0}$, колинеарност вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ је еквивалентна с условом $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$, за неко $\lambda \in \mathbb{R}$.

Нека је $\overrightarrow{OC} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$, за неке $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\Longrightarrow}$: Нека важи $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$, за неко $\lambda \in \mathbb{R}$. Тада је:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}\\ &= \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB}\\ &= \overrightarrow{OA} + \lambda(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB})\\ &= \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AO} + \lambda\overrightarrow{OB}\\ &= \overrightarrow{OA} - \lambda\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}\\ &= (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}.\end{aligned}$$

Пошто су $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ линеарно независни (јер су O, A и B неколинеарне тачке), следи да је $\alpha = 1 - \lambda$ и $\beta = \lambda$, па је $\alpha + \beta = 1$.

$\boxed{\Longleftarrow}$: Нека важи $\alpha + \beta = 1$. Тада је:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} \\
&= -\overrightarrow{OA} + \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} \\
&= (\alpha - 1)\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} \\
&= -\beta\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} \\
&= \beta(-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \\
&= \beta\overrightarrow{AB}.
\end{aligned}$$

Ако је при томе $\alpha \geq 0$ и $\beta \geq 0$, онда је $0 \leq \beta \leq 1$, па је вектор $\overrightarrow{AC}$ истог смера као $\overrightarrow{AB}$ и интензитет (дужина) му је мањи или једнак од интензитета вектора $\overrightarrow{AB}$, што значи да се C налази између тачака A и B, тј. да припада дужи AB.

1.6. Тачка D припада равни троугла $\triangle ABC$ ако и само ако су тачке A, B, C и D компланарне, а то важи ако и само ако су вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ компланарни. Пошто су вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ линеарно независни, следи да је компланарност вектора $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ еквивалнента с условом $\overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$, за неке $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Нека је $\overrightarrow{OD} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}$, за неке $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\Longrightarrow}$: Нека важи $\overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$, за неке $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Тада је:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} \\
&= \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} \\
&= \overrightarrow{OA} + \lambda(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) + \mu(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}) \\
&= \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AO} + \lambda\overrightarrow{OB} + \mu\overrightarrow{AO} + \mu\overrightarrow{OC} \\
&= \overrightarrow{OA} - \lambda\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} - \mu\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OC} \\
&= (1 - \lambda - \mu)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} + \mu\overrightarrow{OC}.
\end{aligned}$$

Пошто су $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ линеарно независни (јер су O, A, B и C некомпланарне тачке), следи да је $\alpha = 1 - \lambda - \mu$, $\beta = \lambda$ и $\gamma = \mu$, па је $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

$\boxed{\Longleftarrow}$: Нека важи $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Тада је:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} \\
&= -\overrightarrow{OA} + \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} \\
&= (\alpha - 1)\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} \\
&= (-\beta - \gamma)\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} \\
&= \beta(-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \gamma(-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) \\
&= \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}.
\end{aligned}$$

Ако је при томе $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ и $\gamma \geq 0$, онда због $\beta \geq 0$ и $\gamma \geq 0$ следи да тачка D припада углу $\measuredangle BAC$. Сасвим слично се може извести да је $\overrightarrow{BD} = \alpha\overrightarrow{BA} + \gamma\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$. Због $\alpha \geq 0$ и $\gamma \geq 0$ следи да тачка D припада углу $\measuredangle ABC$, а због $\alpha \geq 0$ и $\beta \geq 0$ следи да тачка D припада углу $\measuredangle ACB$. Дакле, у том случају тачка D припада троуглу $\triangle ABC$ (његовој унутрашњости или његовом рубу).

1.7. а) Треба доказати да дефиниција тачке T не зависи од избора тачке O. То значи да треба доказати да једнакост $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}$ важи ако се уместо тачке O узме било која друга тачка. Зато узмимо произвољну тачку O_1. Тада је:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{O_1T} &= \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OT} \\
&= \frac{1}{n} \cdot n\overrightarrow{O_1O} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{O_1O} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_1} \qquad (n \text{ пута сумирамо } \overrightarrow{O_1O}) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OA_i}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{O_1A_i}.
\end{aligned}$$

б) Пошто је T_i тежиште скупа тачака $\{A_1, \ldots, A_n\}$ без тачке A_i, то значи да је T_i тежиште скупа тачака $\{A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n\}$, па је

$$\overrightarrow{OT_i} = \frac{1}{n-1}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\overrightarrow{OA_j}.$$

Како је

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OT} &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\overrightarrow{OA_j} = \frac{1}{n}\overrightarrow{OA_i} + \frac{1}{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\overrightarrow{OA_j} \\
&= \frac{1}{n}\overrightarrow{OA_i} + \frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\overrightarrow{OA_j} \\
&= \frac{1}{n}\overrightarrow{OA_i} + \frac{n-1}{n}\overrightarrow{OT_i},
\end{aligned}$$

на основу задатка 1.5. следи да тачка T припада дужи A_iT_i. Ово важи за све i од 1 до n, па следи да T припада свим дужима A_iT_i. Такође, како је

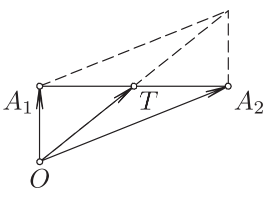
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A_iT} &= \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OA_i} = \frac{1}{n}\overrightarrow{OA_i} + \frac{n-1}{n}\overrightarrow{OT_i} - \overrightarrow{OA_i} \\
&= -\frac{n-1}{n}\overrightarrow{OA_i} + \frac{n-1}{n}\overrightarrow{OT_i} \\
&= \frac{n-1}{n}(\overrightarrow{OT_i} - \overrightarrow{OA_i}) = \frac{n-1}{n}\overrightarrow{A_iT_i}
\end{aligned}$$

и

$$\overrightarrow{TT_i} = \overrightarrow{A_iT_i} - \overrightarrow{A_iT} = \overrightarrow{A_iT_i} - \frac{n-1}{n}\overrightarrow{A_iT_i} = \frac{1}{n}\overrightarrow{A_iT_i},$$

следи и да је $\overrightarrow{A_iT} : \overrightarrow{TT_i} = (n-1) : 1$.

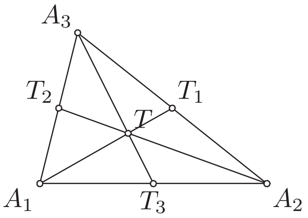
1.8.



Случај $n = 2$: Тежиште скупа тачака $\{A_1, A_2\}$ јесте тачка T таква да је $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2})$. Збир вектора $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$ је дијагонала паралелограма одређеног тим векторима, па пошто је $\overrightarrow{OT}$ његова половина, онда је T средиште те дијагонале. Пошто се дијагонале паралелограма полове, следи да је T средиште и друге дијагонале, тј. да је средиште дужи A_1A_2. Ако је O_1 нека друга тачка, онда је

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{O_1T} &= \overrightarrow{O_1O}+\overrightarrow{OT} \\
&= \frac{1}{2}(\overrightarrow{O_1O}+\overrightarrow{O_1O})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}) \\
&= \frac{1}{2}(\overrightarrow{O_1O}+\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{O_1O}+\overrightarrow{OA_2}) \\
&= \frac{1}{2}(\overrightarrow{O_1A_1}+\overrightarrow{O_1A_2}).
\end{aligned}$$

Тачке T_1 и T_2 су, редом, тежишта скупова тачака $\{A_2\}$ и $\{A_1\}$, па је $\overrightarrow{OT_1}=\frac{1}{1}\overrightarrow{OA_2}=\overrightarrow{OA_2}$ и $\overrightarrow{OT_2}=\frac{1}{1}\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{OA_1}$, тј. тачка T_1 је идентична тачки A_2, а тачка T_2 је идентична тачки A_1. Тачка T припада дужи A_1A_2, па следи да припада и дужима A_1T_1 и A_2T_2 (то је све иста дуж). Такође, T је средиште дужи A_1A_2, па је $\overrightarrow{A_1T}:\overrightarrow{TT_1}=1:1=\overrightarrow{A_2T}:\overrightarrow{TT_2}$.

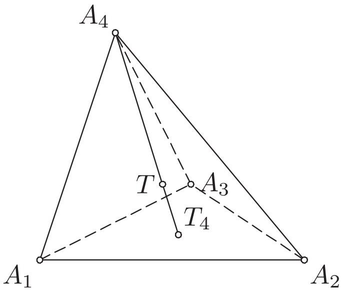


Случај $n=3$: Тежиште скупа тачака $\{A_1,A_2,A_3\}$ је тачка Tтаква да је $\overrightarrow{OT}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3})$. Ако уместо тачке O узмемо неку другу тачку O_1, слично се као малопре показује да је $\overrightarrow{O_1T}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{O_1A_1}+\overrightarrow{O_1A_2}+\overrightarrow{O_1A_3})$ (идеја: $\overrightarrow{O_1O}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{O_1O}+\overrightarrow{O_1O}+\overrightarrow{O_1O})$). Тачка T_1 је тежиште скупа тачака $\{A_2,A_3\}$, тј. средиште дужи A_2A_3. Слично, T_2 је средиште дужи A_1A_3 и T_3 је средиште дужи A_1A_2. Докажимо да T припада, на пример, дужи A_1T_1 и да је $\overrightarrow{A_1T}:\overrightarrow{TT_1}=2:1$ (овим ћемо добити да је T тежиште троугла, као пресек тежишних дужи A_1T_1, A_2T_2 и A_3T_3). Важи да је

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OT} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3})=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA_1}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}) \\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA_1}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}) \\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA_1}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OT_1}.
\end{aligned}$$

Дакле, на основу задатла 1.5. тачка T припада дужи A_1T_1. Такође, $\overrightarrow{A_1T}=\overrightarrow{OT}-\overrightarrow{OA_1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA_1}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OT_1}-\overrightarrow{OA_1}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{OA_1}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OT_1}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{OT_1}-\overrightarrow{OA_1})=\frac{2}{3}\overrightarrow{A_1T_1}$ и $\overrightarrow{TT_1}=\overrightarrow{A_1T_1}-\overrightarrow{A_1T}=\overrightarrow{A_1T_1}-\frac{2}{3}\overrightarrow{A_1T_1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{A_1T_1}$, па тачка T дели дуж A_1T_1

у односу $2:1$. Слично важи и за остале дужи.



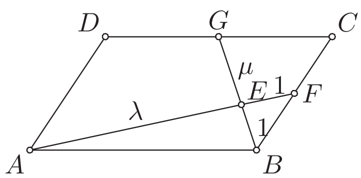
Случај $n = 4$: За вежбу. Напоменимо само да је овде T тежиште тетраедра $A_1A_2A_3A_4$, да је у пресеку тежишних дужи A_1T_1, A_2T_2, A_3T_3 и A_4T_4 (T_1 је тежиште троугла $A_2A_3A_4$ итд), као и да дели сваку од њих у односу $3:1$.

1.9. Нека је O произвољна тачка. Тежиште тетраедра $ABCD$ је тачка T таква да је $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$. Тачка A' је тежиште троугла BCD, па је $\overrightarrow{OA'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$. Слично, $\overrightarrow{OB'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$, $\overrightarrow{OC'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})$ и $\overrightarrow{OD'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$. Тежиште тетраедра $A'B'C'D'$ је тачка T' таква да је $\overrightarrow{OT'} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{OD'})$. Према томе, важи:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OT'} &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})+\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})\right.\\
&+ \left.\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})+\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\right)\\
&= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}(3\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}+3\overrightarrow{OD})\\
&= \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{OT},
\end{aligned}$$

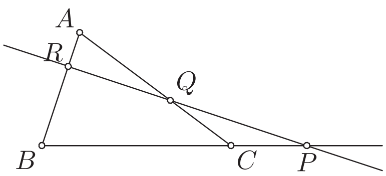
па се тачке T' и T поклапају.

1.10.



Нека је $\overrightarrow{AE} = \lambda\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{GE} = \mu\overrightarrow{EB}$. Изразимо вектор $\overrightarrow{DE}$ преко (линеарно независних) вектора $\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{DA}$ користећи једнакост добијену у задатку 1.4. С једне стране добијамо да је $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{\lambda+1}\overrightarrow{DA} + \frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{DF}$. Пошто је $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$, закључујемо да важи $\overrightarrow{DE} = \left(\frac{1}{\lambda+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)\overrightarrow{DA} + \frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{DC}$. С друге стране добијамо да је $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{\mu+1}\overrightarrow{DG} + \frac{\mu}{\mu+1}\overrightarrow{DB}$. Како је $\overrightarrow{DG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}$, добијамо $\overrightarrow{DE} = \frac{\mu}{\mu+1}\overrightarrow{DA} + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\mu+1} + \frac{\mu}{\mu+1}\right)\overrightarrow{DC}$. Вектори $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{DC}$ су линеарно независни, те добијамо да је $\frac{1}{\lambda+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda}{\lambda+1} = \frac{\mu}{\mu+1}$ и $\frac{\lambda}{\lambda+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\mu+1} + \frac{\mu}{\mu+1}$. Пошто је $\frac{1}{\lambda+1} + \frac{\lambda}{\lambda+1} = 1$, следи да је $\frac{1}{\lambda+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda}{\lambda+1} = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda}{\lambda+1}$, па користећи претходне једначине, добијамо да је $\frac{\mu}{\mu+1} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\mu+1} + \frac{\mu}{\mu+1}\right)$. Множењем са $\mu+1$ добијамо $\mu = \mu + 1 - \frac{1}{4} - \frac{\mu}{2}$, па је $\frac{\mu}{2} = \frac{3}{4}$, тј. $\mu = \frac{3}{2}$. Дакле, $\overrightarrow{GE} : \overrightarrow{EB} = \mu = 3:2$, па је $BE : EG = 2:3$. Израчунајмо још колико је λ. Добијамо да је $\frac{\lambda}{\lambda+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\mu+1} + \frac{\mu}{\mu+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}+1} + \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}+1} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$, па је $5\lambda = 4\lambda + 4$, тј. $\lambda = 4$. Дакле, $\overrightarrow{AE} : \overrightarrow{EF} = 4:1$, па је и $AE : EF = 4:1$.

1.11.



Означимо односе $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} = \alpha$, $\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = \beta$ и $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = \gamma$. Потребно је доказати да су тачке P, Q и R колинеарне ако и само ако је $\alpha\beta\gamma = -1$. На основу задатка 1.4. важи $\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{\beta+1}\overrightarrow{BC} + \frac{\beta}{\beta+1}\overrightarrow{BA}$. Како је $\overrightarrow{BP} = \alpha\overrightarrow{PC}$, следи да је $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PC} = (\alpha+1)\overrightarrow{PC} = \frac{\alpha+1}{\alpha}\overrightarrow{BP}$. Слично, како је $\overrightarrow{AR} = \gamma\overrightarrow{RB}$, следи да је $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -(\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{RB}) = -(\gamma+1)\overrightarrow{RB} = (\gamma+1)\overrightarrow{BR}$. Према томе, закључујемо да је $\overrightarrow{BQ} = \frac{\alpha+1}{\alpha(\beta+1)}\overrightarrow{BP} + \frac{\beta(\gamma+1)}{\beta+1}\overrightarrow{BR}$. На основу задатка 1.5. следи да су тачке P, Q и R колинеарне ако и само ако је

$$\frac{\alpha+1}{\alpha(\beta+1)} + \frac{\beta(\gamma+1)}{\beta+1} = 1.$$

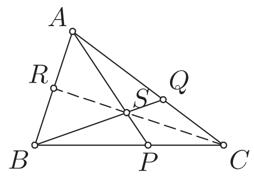
Множењем обеју страна ове једнакости са $\alpha(\beta+1)$ добијамо

$$\alpha + 1 + \alpha\beta(\gamma+1) = \alpha(\beta+1),$$

тј. $\alpha + 1 + \alpha\beta\gamma + \alpha\beta = \alpha\beta + \alpha$. Након сређивања остаје $\alpha\beta\gamma = -1$.

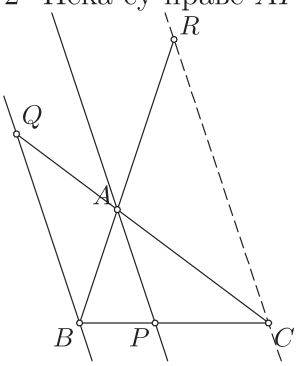
1.12. Означимо, као у претходном задатку, односе $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} = \alpha$, $\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = \beta$ и $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = \gamma$. Потребно је доказати да се праве AP, BQ и CR секу у једној

тачки или су паралелне ако и само ако је $\alpha\beta\gamma=1$.
1° Нека се праве AP и BQ секу у тачки S. Тада се AP, BQ и CR секу у једној тачки ако и само ако су тачке C, S и R колинеарне.



Посматрајмо троугао $\triangle CPA$. Тачке B, S и Q припадају редом правима CP, PA и AC и колинеарне су, па на основу Менелајеве теореме следи да је $\frac{\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{BP}}\cdot\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QC}}=-1$. Изразимо односе $\frac{\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{BP}}$ и $\frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QC}}$ преко α и β. Пошто је $\overrightarrow{BP}=\alpha\overrightarrow{PC}$, следи да је $\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{BC}=-(\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PC})=-(\alpha+1)\overrightarrow{PC}=-\frac{\alpha+1}{\alpha}\overrightarrow{BP}$, па је $\frac{\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{BP}}=-\frac{\alpha+1}{\alpha}$. Такође, $\frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QC}}=\frac{-\overrightarrow{QA}}{-\overrightarrow{CQ}}=\frac{\overrightarrow{QA}}{\overrightarrow{CQ}}=\frac{1}{\beta}$, па добијамо да је $-\frac{\alpha+1}{\alpha}\cdot\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SA}}\cdot\frac{1}{\beta}=-1$. Дакле, $\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SA}}=\frac{\alpha\beta}{\alpha+1}$.

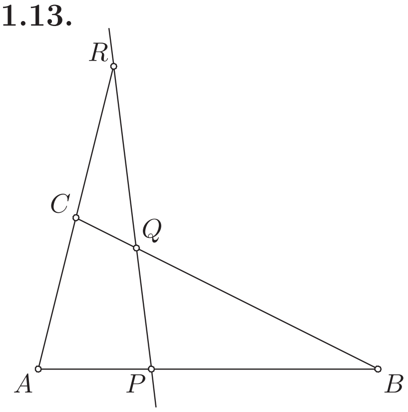
Посматрајмо сада троугао $\triangle BPA$. Тачке C, S и R припадају редом правима BP, PA и AB, па на основу Менелајеве теореме следи да су оне колинеарне (тј. да се AP, BQ и CR секу у тачки S) ако и само ако је $\frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{CP}}\cdot\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}=-1$. У претходном пасусу смо извели да је $\overrightarrow{CB}=-(\alpha+1)\overrightarrow{PC}$, па је $\overrightarrow{BC}=-(\alpha+1)\overrightarrow{CP}$, тј. $\frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{CP}}=-(\alpha+1)$. Закључујемо да су C, S и P колинеарне ако и само ако је $-(\alpha+1)\cdot\frac{\alpha\beta}{\alpha+1}\cdot\gamma=-1$, односно ако и само ако је $\alpha\beta\gamma=1$.
2° Нека су праве AP и BQ паралелне.



На основу Талесове теореме је $\frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{PB}}=\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{AQ}}$. Како је $\frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{PB}}=\frac{-\overrightarrow{PC}}{-\overrightarrow{BP}}=\frac{\overrightarrow{PC}}{\overrightarrow{BP}}=\frac{1}{\alpha}$ и $\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{AQ}}=\frac{\overrightarrow{CQ}+\overrightarrow{QA}}{-\overrightarrow{QA}}=-\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}-1=-\beta-1=-(\beta+1)$, следи да је $\frac{1}{\alpha}=-(\beta+1)$. Одавде следи да је $-\alpha(\beta+1)=1$, тј. да је $-\alpha\beta-\alpha=1$. Другим речима, важи $\alpha+1=-\alpha\beta$.

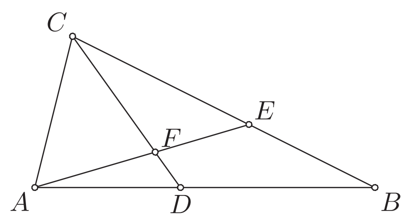
На основу Талесове теореме важи да су праве AP и CR паралелне ако и само ако је $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}=\frac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{AR}}$. Пошто је $\frac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{AR}}=\frac{-\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AR}}=-\frac{\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{RB}}{\overrightarrow{AR}}=-1-\frac{1}{\gamma}$, следи да су AP, BQ и CR паралелне ако и само ако је $\alpha = -1 - \frac{1}{\gamma}$, тј. $\alpha + 1 = -\frac{1}{\gamma}$. Пошто је $\alpha + 1 = -\alpha\beta$, следи да је претходна једнакост еквивалентна са $-\alpha\beta = -\frac{1}{\gamma}$, тј. са $\alpha\beta\gamma = 1$.

1.13.



Директном применом Менелајеве теореме, због колинеарности тачака P, Q, R, добијамо да је $\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}} = -1$. Према томе, $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}} = -1$, па је $\frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}} = -\frac{1}{2}$.

1.14.



Да бисмо однос у којем F дели дуж AE, приметимо троугао $\triangle ABE$ и тачке D, C, F, које припадају редом правима AB, BE, EA и колинеарне су, па испуњавају услове Менелајеве теореме. Према томе, $\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{CE}} \cdot \frac{\overrightarrow{EF}}{\overrightarrow{FA}} = -1$. Тачка D припада дужи AB, па је $\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}$ позитивно. Дакле, $\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = \frac{AD}{DB} = \frac{3}{4}$. С друге стране, тачка C не припада дужи BE, па је $\frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{CE}}$ негативан. Следи да је $\frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{CE}} = -\frac{BC}{CE} = -\frac{12}{7}$. Дакле, $\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{12}{7}\right) \cdot \frac{\overrightarrow{EF}}{\overrightarrow{FA}} = -1$, па је $\frac{\overrightarrow{EF}}{\overrightarrow{FA}} = \frac{7}{9}$. Пошто је $EF : FA = \left|\frac{\overrightarrow{EF}}{\overrightarrow{FA}}\right| = \frac{7}{9}$, следи да тачка F дели дуж EA у односу $7 : 9$.

Слично, да бисмо добили однос у коме F дели дуж CD, приметимо троугао $\triangle DBC$ и тачке A, E, F, које припадају редом правима DB, BC, CD и колинеарне су, па испуњавају услове Менелајеве теореме. Према томе, $\frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{AB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BE}}{\overrightarrow{EC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CF}}{\overrightarrow{FD}} = -1$. Како је D између A и B, следи да је $\frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{AB}}$ негативно, па је $\frac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{AB}} = -\frac{DA}{AB} = -\frac{3}{7}$. Како је E између B и C, следи да је $\frac{\overrightarrow{BE}}{\overrightarrow{EC}}$ позитивно, па је $\frac{\overrightarrow{BE}}{\overrightarrow{EC}} = -\frac{BE}{EC} = \frac{5}{7}$. Следи да је $-\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{\overrightarrow{CF}}{\overrightarrow{FD}} = -1$, па је $\frac{\overrightarrow{CF}}{\overrightarrow{FD}} = \frac{49}{15}$. Пошто је $CF : FD = \left|\frac{\overrightarrow{CF}}{\overrightarrow{FD}}\right| = \frac{49}{15}$, следи да F дели дуж CD у односу $49 : 15$.

1.15. Праве AQ, CP, BR се секу у једној тачки, па на основу Чевине теореме следи да је $\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}} = 1$. Тачка A се налази између тачака P и B, па је $\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}$ негативно, што значи да је $\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} = -\frac{AP}{PB} = -\frac{1}{4}$. Тачка Q се налази између тачака B и C, па је $\frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}}$ позитивно, што значи да је $\frac{\overrightarrow{BQ}}{\overrightarrow{QC}} = \frac{BQ}{QC} = 1$. Дакле, $-\frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}} = 1$, па је $\frac{\overrightarrow{CR}}{\overrightarrow{RA}} = -4$. Следи да је $\overrightarrow{CR} = -4\overrightarrow{RA} = 4\overrightarrow{AR}$. Из $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AR} + \overrightarrow{RC} = \overrightarrow{AR} - \overrightarrow{CR} = \overrightarrow{AR} - 4\overrightarrow{AR} = -3\overrightarrow{AR}$ следи да је $\overrightarrow{AC} : \overrightarrow{AR} = -3$.

1.16. Пошто је T тежиште троугла $\triangle ABC$, на основу задатка 1.7. следи да је $\overrightarrow{AT} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. Нека је $\frac{\overrightarrow{KB}}{\overrightarrow{AK}} = \mu$ и $\frac{\overrightarrow{LC}}{\overrightarrow{AL}} = \nu$. Пошто тачка K припада дужи AB, следи да је $\mu > 0$, па је $\mu = \frac{KB}{AK}$. Такође, пошто тачка L припада дужи AC, следи да је $\nu > 0$, па је $\nu = \frac{LC}{AL}$. Према услову задатка је $\mu + \nu = 1$. Како је $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KB} = \overrightarrow{AK} + \mu\overrightarrow{AK} = (1+\mu)\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{LC} = \overrightarrow{AL} + \nu\overrightarrow{AL} = (1+\nu)\overrightarrow{AL}$. Дакле, $\overrightarrow{AT} = \frac{1}{3}\Big((1+\mu)\overrightarrow{AK} + (1+\nu)\overrightarrow{AL}\Big) = \frac{1+\mu}{3}\overrightarrow{AK} + \frac{1+\nu}{3}\overrightarrow{AL}$. Пошто је $\frac{1+\mu}{3} \geq 0$, $\frac{1+\nu}{3} \geq 0$ и $\frac{1+\mu}{3} + \frac{1+\nu}{3} = \frac{2+\mu+\nu}{3} = 1$, на основу задатка 1.5. следи да тачка T припада дужи KL.

1.17.

1.18. Јасно је да важи

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} &= \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AA_2} + \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BB_2} + \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{CC_2} \\
&= \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{CC_2} \\
&= \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{CC_2} = \overrightarrow{C_2C} + \overrightarrow{CC_2} = \overrightarrow{0}.
\end{aligned}$$

1.19.

2 Скаларни, векторски и мешовити производ

2.1. Означимо са a, b, c редом дужине страница BC, CA, AB троугла $\triangle ABC$. Тада је

$$\begin{aligned} c^2 &= \|\overrightarrow{AB}\|^2 = \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle = \langle \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \rangle \\ &= \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC} \rangle + \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB} \rangle + \langle \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC} \rangle + \langle \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CB} \rangle \\ &= \|\overrightarrow{AC}\|^2 + \|\overrightarrow{CB}\|^2 + 2\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB} \rangle = b^2 + a^2 + 2\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB} \rangle. \end{aligned}$$

Како је $\measuredangle ACB = \gamma$, следи да је $\langle \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB} \rangle = \|\overrightarrow{CA}\| \|\overrightarrow{CB}\| \cos\gamma = ab\cos\gamma$. Према томе, $c^2 = a^2 + b^2 - 2\langle \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB} \rangle = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

2.2.

2.3.

2.4.

2.5. Претпоставимо да је бар један од бројева α, β, γ различит од нуле. Не умањујући општост, нека је $\alpha \neq 0$. Како је $\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{a} \rangle = \alpha$ и $\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{b} \rangle = \beta$, следи да је $\alpha\beta = \beta\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{a} \rangle = \alpha\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{b} \rangle$. Дакле, $\langle \overrightarrow{x}, \beta\overrightarrow{a} \rangle - \langle \overrightarrow{x}, \alpha\overrightarrow{b} \rangle = 0$, тј. $\langle \overrightarrow{x}, \beta\overrightarrow{a} - \alpha\overrightarrow{b} \rangle = 0$. Следи да је $\overrightarrow{x} \perp \beta\overrightarrow{a} - \alpha\overrightarrow{b}$. Слично, како је $\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{a} \rangle = \alpha$ и $\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{c} \rangle = \gamma$, следи да је $\alpha\gamma = \gamma\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{a} \rangle = \alpha\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{c} \rangle$, па је $\langle \overrightarrow{x}, \gamma\overrightarrow{a} \rangle - \langle \overrightarrow{x}, \alpha\overrightarrow{c} \rangle = 0$, Одавде је $\langle \overrightarrow{x}, \gamma\overrightarrow{a} - \alpha\overrightarrow{c} \rangle = 0$, па је $\overrightarrow{x} \perp \gamma\overrightarrow{a} - \alpha\overrightarrow{c}$.

Вектори $\beta\overrightarrow{a} - \alpha\overrightarrow{b}$ и $\gamma\overrightarrow{a} - \alpha\overrightarrow{c}$ су линеарно независни,. Заиста, из $\lambda(\beta\overrightarrow{a} - \alpha\overrightarrow{b}) + \mu(\gamma\overrightarrow{a} - \alpha\overrightarrow{c}) = \overrightarrow{0}$ следи да је $(\lambda\beta + \mu\gamma)\overrightarrow{a} - \lambda\alpha\overrightarrow{b} - \mu\alpha\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$, па због линеарне независности вектора $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ следи да је $\lambda\beta + \mu\gamma = 0$, $\lambda\alpha = 0$ и $\mu\alpha = 0$. Пошто је $\alpha \neq 0$, следи да је $\lambda = \mu = 0$. Према томе, $(\beta\overrightarrow{a} - \alpha\overrightarrow{b}) \times (\gamma\overrightarrow{a} - \alpha\overrightarrow{c}) \neq \overrightarrow{0}$, а због $\overrightarrow{x} \perp \beta\overrightarrow{a} - \alpha\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{x} \perp \gamma\overrightarrow{a} - \alpha\overrightarrow{c}$ следи да је $\overrightarrow{x}$ колинеаран са $(\beta\overrightarrow{a} - \alpha\overrightarrow{b}) \times (\overrightarrow{x} \perp \gamma\overrightarrow{a} - \alpha\overrightarrow{c})$. Дакле,

$$\overrightarrow{x} = \lambda(\beta\overrightarrow{a} - \alpha\overrightarrow{b}) \times (\gamma\overrightarrow{a} - \alpha\overrightarrow{c}), \text{ за неко } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Дакле,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{x} &= \lambda(-\beta\alpha\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} - \alpha\gamma\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a} + \alpha^2\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) \\ &= \lambda\alpha(\alpha\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} + \beta\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a} + \gamma\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}). \end{aligned}$$

Како је $\alpha = \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{a} \rangle$, следи да је $\alpha = \lambda\alpha(\alpha\langle \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a} \rangle + 0 + 0) = \lambda\alpha^2[\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}] = \lambda\alpha^2[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]$. Пошто је $\alpha \neq 0$ и $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}] \neq 0$, јер су вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ линеарно независни, следи да је $\lambda\alpha = \frac{1}{[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]}$. Коначно, следи да је

$$\overrightarrow{x} = \frac{1}{[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]}(\alpha \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} + \beta \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a} + \gamma \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}).$$

Нека је $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Дакле, $\overrightarrow{x} \perp \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{x} \perp \overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{x} \perp \overrightarrow{c}$. Из прва два следи да је $\overrightarrow{x} = \lambda \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$, за неко $\lambda \in \mathbb{R}$. Због $\overrightarrow{x} \perp \overrightarrow{c}$ важи $0 = \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{c} \rangle = \lambda \langle \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \rangle = \lambda [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]$. Због линеарне независности вектора $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ је $[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}] \neq 0$, па је $\lambda = 0$, што значи да је $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$. С обзиром на то да је $\alpha = \beta = \gamma = 0$, следи да је и у овом случају

$$\overrightarrow{x} = \frac{1}{[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]}(\alpha \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} + \beta \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a} + \gamma \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}).$$

Дакле, у свим случајевима је $\overrightarrow{x} = \frac{1}{[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}]}(\alpha \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} + \beta \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a} + \gamma \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$.

2.6. Из датих услова следи да је

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{x}) = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{x} \rangle \overrightarrow{u} - \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle \overrightarrow{x} = \alpha \overrightarrow{u} - \|\overrightarrow{u}\|^2 \overrightarrow{x}.$$

Дакле, $\|\overrightarrow{u}\|^2 \overrightarrow{x} = \alpha \overrightarrow{u} - \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$.

Ако је $\|\overrightarrow{u}\| \neq 0$, односно $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, онда је $\overrightarrow{x} = \frac{1}{\|\overrightarrow{u}\|^2}(\alpha \overrightarrow{u} - \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})$.

Нека је $\|\overrightarrow{u}\| = 0$, односно $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$. Ако је $\alpha \neq 0$ или $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, онда задатак нема решења. Ако је $\alpha = 0$ и $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, онда је сваки вектор $\overrightarrow{x}$ решење.

2.7. Како је $\overrightarrow{AB} = B - A = (2,3,5) - (0,1,1) = (2,2,4)$ и $\overrightarrow{AC} = C - A = (3,1,4) - (0,1,1) = (3,0,3)$, следи да је површина троугла $\triangle ABC$ једнака

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2}\left\| \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} \right\| \\ &= \frac{1}{2}\|(6-0)\overrightarrow{i} + (12-6)\overrightarrow{j} + (0-6)\overrightarrow{k}\| \\ &= \frac{1}{2}\|(6,6,-6)\| = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} = 3\sqrt{3}. \end{aligned}$$

2.8. Како је $\overrightarrow{AB} = B - A = (1,2,6) - (0,1,1) = (1,1,5)$, $\overrightarrow{AC} = C - A = (0,1,2) - (0,1,1) = (0,0,1)$ и $\overrightarrow{AD} = D - A = (2,0,2) - (0,1,1) = (2,-1,1)$, следи да је запремина тетраедра $ABCD$ једнака

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]| = \frac{1}{6}|\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}| \\
&= \frac{1}{6}| - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}| \\
&= \frac{1}{6}| - (-1-2)| = \frac{1}{6}| - (-3)| = \frac{1}{6}|3| = \frac{1}{6} \cdot 3 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

2.9. Јасно је да важи

$$\begin{aligned}
P_{A_1B_1C_1} &= \frac{1}{2}\|\overrightarrow{C_1B_1} \times \overrightarrow{C_1A_1}\| = \frac{1}{2}\|(\overrightarrow{C_1B} + \overrightarrow{BB_1}) \times (\overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{CA_1})\| \\
&= \frac{1}{2}\|(\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BA}) \times (2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC})\| \\
&= \frac{1}{2}\|(\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BA}) \times (2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})\| \\
&= \frac{1}{2}\|(\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BA}) \times (3\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})\| \\
&= \frac{1}{2}\|\overrightarrow{0} - \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA} + 6\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{0}\| \\
&= \frac{1}{2}\|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} + 6\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}\| \\
&= \frac{1}{2}\|7\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}\| = 7 \cdot \frac{1}{2}\|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}\| = 7P_{ABC}.
\end{aligned}$$

2.10.

2.11.

2.12.

2.13.

2.14. Нека је O тачка која не припада равни троугла $\triangle ABC$. Тада су вектори $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ линеарно независни, па чине базу векторског простора $\mathbb{V}$. Сваки вектор се може изразити на јединствен начин преко базе, па постоје јединствени $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ такви да је $\overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}$.

Тада је

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PA} &= \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} = (1-\alpha)\overrightarrow{OA} - \beta\overrightarrow{OB} - \gamma\overrightarrow{OC},\\
\overrightarrow{PB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP} = -\alpha\overrightarrow{OA} + (1-\beta)\overrightarrow{OB} - \gamma\overrightarrow{OC},\\
\overrightarrow{PC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP} = -\alpha\overrightarrow{OA} - \beta\overrightarrow{OB} + (1-\gamma)\overrightarrow{OC},\\
\overrightarrow{AB} &= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB},\\
\overrightarrow{BC} &= -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC},\\
\overrightarrow{CA} &= \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC},
\end{aligned}$$

па је

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{AB} &= \Big((1-\alpha)\overrightarrow{OA} - \beta\overrightarrow{OB} - \gamma\overrightarrow{OC}\Big) \times \Big(-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\Big)\\
&= (1-\alpha)\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} + \beta\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OA} + \gamma\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA} - \gamma\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OB}\\
&= (1-\alpha-\beta)\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} + \gamma\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA},\\
\overrightarrow{PB} \times \overrightarrow{BC} &= \Big(-\alpha\overrightarrow{OA} + (1-\beta)\overrightarrow{OB} - \gamma\overrightarrow{OC}\Big) \times \Big(-\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\Big)\\
&= \alpha\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} - \alpha\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC} + (1-\beta)\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} + \gamma\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OB}\\
&= \alpha\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} + (1-\beta-\gamma)\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} + \alpha\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA},\\
\overrightarrow{PC} \times \overrightarrow{CA} &= \Big(-\alpha\overrightarrow{OA} - \beta\overrightarrow{OB} + (1-\gamma)\overrightarrow{OC}\Big) \times \Big(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}\Big)\\
&= \alpha\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC} - \beta\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} + (1-\gamma)\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA}\\
&= \beta\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} + \beta\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} + (1-\gamma-\alpha)\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA}.
\end{aligned}$$

Пре него што докажемо тражену еквиваленцију, докажимо да из линеарне независности вектора $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ следи линеарна независност вектора $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA}$. Како је

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \times (\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}) &= \langle \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} \rangle \overrightarrow{OB} - \langle \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB} \rangle \overrightarrow{OC}\\
&= [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]\overrightarrow{OB} - 0\\
&= [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]\overrightarrow{OB},
\end{aligned}$$

следи да је

$$\begin{aligned}
[\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA}] &= \langle [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA} \rangle\\
&= [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}][\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] \neq 0.
\end{aligned}$$

Дакле, $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA}$ су линеарно независни.

Следи да је $\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PB} \times \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{PC} \times \overrightarrow{CA}$ ако и само ако је $1 - \alpha - \beta = \alpha = \beta$, $\gamma = 1 - \beta - \gamma = \beta$ и $\gamma = \alpha = 1 - \gamma - \alpha$. Ово важи ако и само ако је $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}$, што важи ако и само ако је $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. Ово важи ако и само ако је P тежиште троугла $\triangle ABC$.

3 Трансформације координата

3.1.

3.2.

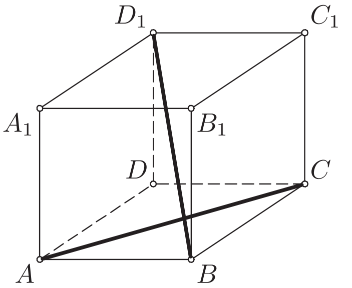
3.3.

3.4.

3.5.

3.6.

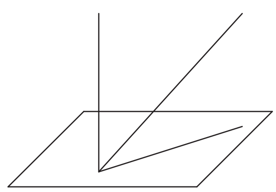
3.7. (а)



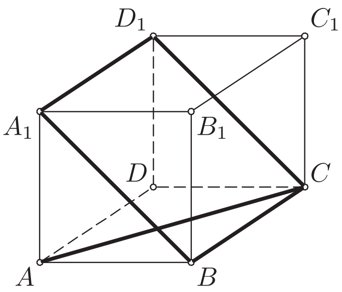
Уведимо Декартов правоугли координатни систем (ортонормирани репер) $Axyz$ такав да су тачке B, D, A_1 редом на позитивном делу x–осе, y–осе и z–осе. Тада су $A(0,0,0)$, $B(a,0,0)$, $C(a,a,0)$ и $D_1(0,a,a)$ координате ових тачака и $\overrightarrow{AC} = C - A = (a,a,0)$ и $\overrightarrow{BD_1} = (-a,a,a)$ координате ових вектора. Како је $\langle\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD_1}\rangle = -a^2 + a^2 + 0 = 0$, следи да је $AC \perp BD_1$.

(б)

(в)



Угао φ између праве и равни је, по дефиницији, угао између праве и њене нормалне пројекције на раван. Уколико уочимо праву која је у тачки продора нормална на равни, онда праве и нормале једнак $\frac{\pi}{2} - \varphi$.

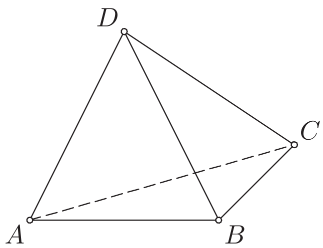


Уведимо Декартов правоугли координатни систем $Axyz$ као у претходном делу задатка. Тада су $A(0,0,0)$, $B(a,0,0)$, $C(a,a,0)$ и $A_1(0,0,a)$ координате ових тачака. Вектор $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA_1}$ је нормалан на равни BCD_1A_1. Како је $\overrightarrow{BC} = C - B = (0,a,0)$ и $\overrightarrow{BA_1} = A_1 - B = (-a,0,a)$, важи $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA_1} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ 0 & a & 0 \\ -a & 0 & a \end{vmatrix} = (a^2, 0, a^2)$. Поред тога, $\overrightarrow{AC} = (a,a,0)$, па је

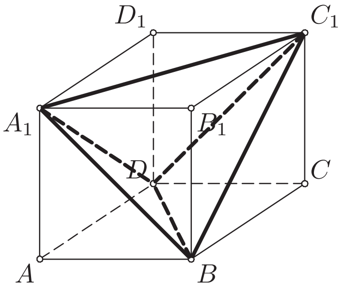
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{\langle \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{AC} \rangle}{\|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA_1}\| \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{a^3}{a^2\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Дакле, $\sin\varphi = \frac{1}{2}$, па је $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

3.8. (а)

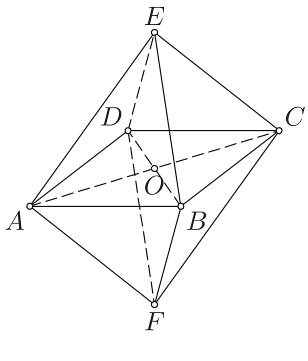


Угао између ивица правилног тетраедра је $\frac{\pi}{3}$, па није згодно бирати координатни систем код кога би координатни почетак било неко од темена тетраедра а једна од оса ишла у смеру ивице тетраедра, јер онда остале две осе не би могле да иду у смеру осталих ивица. За разлику од правилног тетраедра, коцка има праве углове између ивица, па ту тог проблема нема. Штавише, темена коцке имају веома лепе координате у том координатном систему. Ако би било могуће наћи четири темена коцке таква да она представљају и темена правилног тетраедра, могли бисмо у координатном систему коцке изразити координате темена тог тетраедра.



Уочимо темена A_1, B, C_1. Свака од дужи A_1B, BC_1, A_1C_1 је дијагонала квадрата (стране коцке), па је троугао $\triangle A_1BC_1$ једнакостраничан. Такође, дужи A_1D, BD, C_1D су дијагонале стране коцке, па су и троуглови $\triangle A_1BD, \triangle BC_1D, \triangle A_1C_1D$ једнакостранични. Дакле, темена коцке A_1, B, C_1, D јесу темена правилног тетраедра. Да би ивица тетраедра била a, потребно је да дијагонала стране коцке буде a, па је ивица коцке једнака $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Следи да су тачке $A_1\left(0, 0, \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$, $B\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right)$, $C_1\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$ и $D\left(0, \frac{a\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ темена правилног тетраедра ивице a.

(б)



Правилни октаедар је тело ограничено омотачима двеју правилних четвоространих пирамида (основа пирамиде је квадрат, подножје висине из врха пирамиде пада у средиште квадрата) које имају заједничку основу и бочна ивица им је једнака основној ивици.

Пошто су дијагонале квадрата међусобно нормалне и пошто висина сваке од пирамида, чији омотачи чине правилни октаедар, пада у средиште квадрата, природно је одабрати координатни систем $Oxyz$ коме је координатни почетак средиште квадрата и тачке C, D, E припадају редом позитивном делу x–осе, y–осе и z–осе. Ако је ивица октаедра једнака d, онда је $OC = OD = \frac{d\sqrt{2}}{2}$ и $OE = \sqrt{CE^2 - OC^2} = \sqrt{d^2 - \frac{d^2}{2}} = \sqrt{\frac{d^2}{2}} = \frac{d\sqrt{2}}{2}$.

Следи да су $A\left(-\frac{d\sqrt{2}}{2},0,0\right)$, $B\left(0,-\frac{d\sqrt{2}}{2},0\right)$, $C\left(\frac{d\sqrt{2}}{2},0,0\right)$, $D\left(0,\frac{d\sqrt{2}}{2},0\right)$, $E\left(0,0,\frac{d\sqrt{2}}{2}\right)$ и $F\left(0,0,-\frac{d\sqrt{2}}{2}\right)$ координате правилног октаедра ивице d.

4 Тачка, права и раван

4.1. Права p има вектор нормале $\overrightarrow{n_p}=(3,-2)$. Следи да је вектор правца праве p (један од њих) једнак $\overrightarrow{u_p}=(2,3)$. За вектор правца x–осе може се узети вектор $\overrightarrow{e_1}=(1,0)$, па је

$$\cos\measuredangle(p,x\text{–осе})=\frac{|\langle\overrightarrow{u_p},\overrightarrow{e_1}\rangle|}{\|\overrightarrow{u_p}\|\|\overrightarrow{e_1}\|}=\frac{|2\cdot 1+3\cdot 0|}{\sqrt{2^2+3^2}\cdot 1}=\frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Како су x–оса и y–оса међусобно нормалне, можемо закључити да је $\measuredangle(p,y\text{–осе})=\frac{\pi}{2}-\measuredangle(p,x\text{–осе})$, па је $\sin\measuredangle(p,y\text{–осе})=\cos\measuredangle(p,x\text{–осе})=\frac{2}{\sqrt{13}}$.

Једноставним тригонометријским трансформацијама може се добити да је $\cos\measuredangle(p,y\text{–осе})=\frac{3}{\sqrt{13}}$, што би се добило ако се израчуна $\frac{|\langle\overrightarrow{u_p},\overrightarrow{e_2}\rangle|}{\|\overrightarrow{u_p}\|\|\overrightarrow{e_2}\|}$. Такође, једноставно се проверава да је онда $\mathrm{t}g\measuredangle(p,x\text{–осе})=\frac{3}{2}$, а ако се једначина праве p изрази у експлицитном облику, добија се $y=\frac{3}{2}x+2$, што одговара томе да је коефицијент правца једнак тангенсу угла између праве и x–осе. Наравно, коефицијент правца може бити негативан, и у том случају је у питању тангенс тупог угла, а апсолутна вредност представља тангенс оштрог угла који граде права и x–оса.

4.2. Одредићемо прво пресек правих $x+y+1=0$ и $x-y=0$. Нека је то тачка $S(x_0,y_0)$. Тада координате тачке S задовољавају једначине обеју правих, тј. важи $x_0+y_0+1=0$ и $x_0-y_0=0$. Сабирањем ових једначина добија се $2x_0+1=0$, па је $x_0=-\frac{1}{2}$. Следи и да је $y_0=-\frac{1}{2}$.

Права n, која се тражи, садржо тачку S и нормална је на правој p. То значи да се за вектор правца праве n може узети вектор нормале праве p, односно да је $\overrightarrow{u_n}=\overrightarrow{n_p}=(2,3)$. Следи да је тражена права

$$n:\frac{x-\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}=\frac{y-\left(-\frac{1}{2}\right)}{3}.$$

4.3. Пресек правих p и q је тачка $S(x_0,y_0)$. Тада је $y_0=x_0-2$ и $y_0=3$, тј. $x_0=5$ и $y_0=3$. Дакле, праве p и q се секу у тачки $S(5,3)$.

(а) Да бисмо добили вектор правца симетрале угла, посматрајмо произвољни ромб $ABCD$. Битна особина ромба јесте да је дијагонала AC симетрала угла $\measuredangle BAD$. Ова особина не важи код паралелограма који није ромб. Такође, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$. Дакле, да би се добио вектор правца симетрале, довољно је сабрати векторе правца кракова угла, али је битно да они буду исте дужине (као што су код ромба вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ исте дужине). Најједноставнији начин да се постигне да вектори буду исте дужине јесте да се узму јединични вектори (вектори дужине 1).

Један могући вектор правца праве p је $\overrightarrow{u_p} = (1,1)$. Да бисмо добили јединични вектор, поделимо га његовом дужином. Његова дужина је $\|\overrightarrow{u_p}\| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, па можемо одабрати да вектор правца праве p буде $\overrightarrow{u_p} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Један могући вектор правца праве q је $\overrightarrow{u_q} = (1,0)$. Пошто је он јединични, следи да је вектор правца једне од симетрала једнак $\overrightarrow{u_{s_1}} = \overrightarrow{u_p} + \overrightarrow{u_q} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (1,0) = \left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Дакле, једначина једне симетрале је

$$s_1 : \frac{x-5}{\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} = \frac{y-3}{\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

Скраћивање са $\sqrt{2}$ добијамо $s_1 : \frac{x-5}{1+\sqrt{2}} = \frac{y-3}{1}$.

Да бисмо добили једначину друге симетрале, потребно је променити смер једном од вектора правца. Добијамо $\overrightarrow{u_{s_2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (-1,0) = \left(\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Једначина друге симетрале је

$$s_2 : \frac{x-5}{\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} = \frac{y-3}{\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

Скраћивање са $\sqrt{2}$ добијамо $s_2 : \frac{x-5}{1-\sqrt{2}} = \frac{y-3}{1}$.

(б) Фиксирајмо вредност за x, нпр. $x = 10$. Ако је $y = 3$, онда је то тачка која припада правој q. Ако је $y = 10 - 2 = 8$, онда тачка припада правој p ($y = x - 2$). Дакле, ако је $y < 3$, тачка се налази „испод" праве q. Ако је $3 < y < 8$, тачка се налази „између" правих q и p (и то „изнад" праве q и „испод" праве p). Ако је $y > 8$, онда се тачка налази „изнад" праве p. Дакле, можемо одабрати нпр. $A_1(10,2)$, $A_2(10,5)$, $A_3(10,10)$. Тиме смо добили тачке у три од четири угла који граде праве p и q. Недостаје тачка која би била између правих p и q, али „испод" праве q и „изнад" праве p. За то је потребно одабрати мање x. Пошто је тачка пресека $S(5,3)$, довољно је узети нпр. $x = 3$. Тада се тачка на правој p добија за $y = 3 - 2 = 1$, па је за $1 < y < 3$ тачка „испод" праве q и „изнад" праве p. Дакле, за четврту тачку можемо одабрати тачку $A_4(3,2)$.

(в) Тачка $M(1,4)$ има $x = 1$ и за $y = 1 - 2 = -1$ добија се тачка на правој p. Како је $4 > -1$ и $4 > 3$, добија се да је тачка M „изнад" правих p и q. Дакле, тачка M се налази у истом углу у којем се налази и тачка $A_3(10,10)$.

4.4. Тангента t садржи тачку $M(1,2)$, па је њена једначина $t : \frac{x-1}{a} = \frac{y-2}{b}$. Тангента је нормална на полупречнику круга, што значи да је растојање центра круга од тангенте једнако полупречнику круга. За растојање тачке од праве, потребна је једначина праве у имплицитном облику. Једначина праве се једноставно трансформише у $b(x-1) = a(y-2)$, односно $bx - ay + 2a - b = 0$. Дакле, растојање од центра $C(1,7)$ до тангенте t једнако је полупречнику круга $r = \sqrt{9} = 3$. Добија се

$$3 = \frac{|b \cdot 1 + (-a) \cdot 7 + 2a - b|}{\sqrt{b^2 + (-a)^2}} = \frac{|b - 7a + 2a - b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-5a|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Без умањења општости можемо претпоставити да је вектор правца $\overrightarrow{u_t} = (a, b)$ тангенте t јединични, односно да је $a^2 + b^2 = 1$. Дакле, добијамо $\frac{5|a|}{1} = 3$, односно $|a| = \frac{3}{5}$. Следи да је $b^2 = 1 - a^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$, па је $|b| = \frac{4}{5}$. Дакле, могући вектори правца су $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$, $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$, $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$, $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$. Приметимо да су вектори $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ и $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ супротног смера, као и вектори $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$, $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Пошто вектори супротног смера, имају исти правац, па је довољно посматрати само један од њих. Дакле, постоје две тангенте, и то су $t_1 : \frac{x-1}{\frac{3}{5}} = \frac{y-2}{\frac{4}{5}}$ и $t_2 : \frac{x-1}{\frac{3}{5}} = \frac{y-2}{-\frac{4}{5}}$. Скраћивањем са 5 добијају се решења $t_1 : \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4}$ и $t_2 : \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-4}$.

4.5.

4.6.

4.7. (а) Заменом $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$ добија се једначина праве $p : \frac{r\cos\varphi}{m} + \frac{r\sin\varphi}{n} = 1$.
(б) Пронаћи ћемо једначину у Декартовим координатама, а затим је пребацити у поларне, као у претходном делу задатка.

Угао који права $q : \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}$ гради са x–осом је $\varphi_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Дакле, вектор правца $\overrightarrow{u_q} = (a, b)$ праве q мора бити $\overrightarrow{u_q} = (\cos\varphi_0, \sin\varphi_0)$. Дакле, $q : \frac{x-x_0}{\cos\varphi_0} = \frac{y-y_0}{\sin\varphi_0}$.

Дато је растојање од координатног почетка. Зато пребацимо једначину праве у имплицитни облик. Добијамо $\sin\varphi_0 \cdot (x - x_0) = \cos\varphi_0 \cdot (y - y_0)$, односно $\sin\varphi_0 \cdot x - \cos\varphi_0 \cdot y + \cos\varphi_0 \cdot y_0 - \sin\varphi_0 \cdot x_0 = 0$. Како је довољно пронаћи $\cos\varphi_0 \cdot y_0 - \sin\varphi_0 \cdot x_0$, означимо то са c. Растојање од тачке $O(0,0)$ до праве q је r_0, па је $r_0 = \frac{|\sin\varphi_0 \cdot 0 - \cos\varphi_0 \cdot 0 + c|}{\sqrt{\sin^2\varphi_0 + (-\cos\varphi_0)^2}} = \frac{|c|}{1} = |c|$. Следи да су решења $q_1 : \sin\varphi_0 \cdot x - \cos\varphi_0 \cdot y + r_0 = 0$ и $q_2 : \sin\varphi_0 \cdot x - \cos\varphi_0 \cdot y - r_0 = 0$.

Пређимо сада у поларне координате. Заменом $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$ добијамо једначине правих $q_1 : \sin\varphi_0 \cdot r\cos\varphi - \cos\varphi_0 \cdot r\sin\varphi + r_0 = 0$ и $q_1 : \sin\varphi_0 \cdot r\cos\varphi - \cos\varphi_0 \cdot r\sin\varphi - r_0 = 0$. Једноставним сређивањем се добија $q_1 : r\sin(\varphi_0 - \varphi) + r_0 = 0$ и $q_2 : r\sin(\varphi_0 - \varphi) - r_0 = 0$.

4.8.

4.9.

4.10. Нека је n права која се тражи. Права n је нормална на равни $\alpha : 2x + y - 4z + 5 = 0$, па следи да је вектор нормале $\overrightarrow{n_\alpha}$ равни α заправо вектор правца $\overrightarrow{u_n}$ праве n (један од). Дакле, можемо узети да је $\overrightarrow{u_n} = \overrightarrow{n_\alpha} = (2, 1, -4)$. Такође, права n садржи тачку $A(2, 3, -1)$, па је њена једначина

$$n : \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-(-1)}{-4}.$$

4.11.

4.12. (а) Паралелне равни имају исту нормалу. Дакле, вектор нормале Oxz равни исти је као вектор нормале тражене равни α. Како је y–оса нормална на Oxz равни, следи да је вектор нормале ове равни једнак $\overrightarrow{e_2} = (0, 1, 0)$, те је и вектор нормале равни α једнак $\overrightarrow{n_\alpha} = (0, 1, 0)$. Како раван α садржи тачку $P(2, 3, 5)$, следи да је њена једначина

$$\alpha : 0 \cdot (x-2) + 1 \cdot (y-3) + 0 \cdot (z-5) = 0,$$

односно $\alpha : y - 3 = 0$.
(б) Раван β, која се тражи, садржи z–осу, што значи да садржи тачку $O(0, 0, 0)$ која јој припада и њен вектор правца $\overrightarrow{e_3} = (0, 0, 1)$. Такође, раван β садржи и тачку $M(-3, 1, 2)$, што значи да садржи и вектор $\overrightarrow{OM} = (-3, 1, 2)$. Вектор нормале $\overrightarrow{n_\beta}$ равни β нормалан је на свим векторима те равни, па је нормалан и на векторима $\overrightarrow{e_3}$ и $\overrightarrow{OM}$. Пошто за вектор нормале равни дужина и смер нису битни (битан је само правац), можемо за вектор нормале $\overrightarrow{n_\beta}$ равни β узети вектор $\overrightarrow{e_3} \times \overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1, -3, 0)$. Пошто раван β садржи тачку $O(0, 0, 0)$, њена једначина је

$$\beta : -1 \cdot (x-0) + (-3) \cdot (y-0) + 0 \cdot (z-0) = 0,$$

односно $\beta : -x - 3y = 0$ или $\beta : x + 3y = 0$.
(в) Раван γ, која се тражи, паралелна је x–оси, што значи да постоји представник вектора $\overrightarrow{e_1} = (1, 0, 0)$ који припада равни γ. Такође, раван γ садржи тачке $A(4, 0, -2)$ и $B(5, 1, 7)$, па садржи и вектор $\overrightarrow{AB} = B - A = (5-4, 1-0, 7-(-2)) = (1, 1, 9)$. Вектор нормале $\overrightarrow{n_\gamma}$ равни γ нормалан је на сваком вектору равни γ, па и на векторима $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{AB}$. Следи да $\overrightarrow{n_\gamma}$ има исти правац као и векторски производ вектора $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{AB}$, а како је вектор

нормале равни довољно наћи било који вектор који има правац нормале, можемо узети $\overrightarrow{n_\gamma} = \overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = (0, -9, 1)$. Пошто раван γ садржи тачку $A(4, 0, -2)$, следи да је њена једначина

$$\gamma : 0 \cdot (x - 4) + (-9) \cdot (y - 0) + 1 \cdot (z - (-2)) = 0,$$

односно $\gamma : -9y + z + 2 = 0$.

4.13. Потражимо прво координате тачке $P_0(x_0, y_0, z_0)$ која представља нормалну пројекцију тачке $P(3, -2, -4)$ на равни $\alpha : 6x+2y-3z-75 = 0$. Тачка P_0 припада равни α, што значи да је $6x_0+2y_0-3z_0-75 = 0$. Takође, вектор $\overrightarrow{PP_0}$ је нормалан на равни α, односно има исти правац као вектор нормале $\overrightarrow{n_\alpha} = (6, 2, -3)$ равни α. Дакле, постоји неко $\lambda \in \mathbb{R}$ такво да је $\overrightarrow{PP_0} = \lambda\overrightarrow{n_\alpha}$. Дакле, добијамо да је

$$(x_0 - 3, y_0 - (-2), z_0 - (-4)) = \lambda(6, 2, -3) = (6\lambda, 2\lambda, -3\lambda),$$

односно $x_0 - 3 = 6\lambda$, $y_0 - (-2) = 2\lambda$ и $z_0 - (-4) = -3\lambda$. Након сређивања добијамо $x_0 = 3 + 6\lambda$, $y_0 = -2 + 2\lambda$ и $z_0 = -4 - 3\lambda$, па важи

$$6(3 + 6\lambda) + 2(-2 + 2\lambda) - 3(-4 - 3\lambda) - 75 = 0.$$

Дакле, $18 + 36\lambda - 4 + 4\lambda + 12 + 9\lambda - 75 = 0$, односно $49\lambda - 49 = 0$. Дакле, $\lambda = 1$, што значи да је $x_0 = 3 + 6 \cdot 1 = 9$, $y_0 = -2 + 2 \cdot 1 = 0$ и $z_0 = -4 - 3 \cdot 1 = -7$, тј. координате нормалне пројекције су $P_0(9, 0, -7)$.

Тачка $Q(x_1, y_1, z_1)$ је симетрична тачки P у односу на раван α. То значи да је PQ нормално на α, а пошто је P_0 нормална пројекција тачке P на равни α, следи да тачка P_0 припада правој PQ. Штавише, услов симетричности тачака P и Q означава да је P_0 средиште дужи PQ. Дакле, $9 = \frac{3+x_1}{2}$, $0 = \frac{-2+y_1}{2}$ и $-7 = \frac{-4+z_1}{2}$, па одавде добијамо $x_1 = 2 \cdot 9 - 3 = 15$, $y_1 = 2 \cdot 0 - (-2) = 2$, $z_1 = 2 \cdot (-7) - (-4) = -14 + 4 = -10$. Према томе, координате тачке симетричне тачки P у односу на раван α су $Q(15, 2, -10)$.

4.14.

4.15. Раван β, која се тражи, садржи праву $l : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{3}$, што значи да садржи тачку $L(1, -2, 3)$ са праве l и вектор правца $\overrightarrow{u_l} = (2, 1, 3)$ праве l припада равни β. Такође, имамо да је раван β нормална на равни $\alpha : 2x - 4y + z + 5 = 0$, што значи да је вектор нормале $\overrightarrow{n_\beta}$ нормалан на вектору нормале $\overrightarrow{n_\alpha} = (2, -4, 1)$ равни α. Пошто је вектор нормале $\overrightarrow{n_\beta}$ равни β нормалан на свим векторима равни β, следи да је нормалан на вектору $\overrightarrow{u_l}$. Дакле, $\overrightarrow{n_\beta} \perp \overrightarrow{u_l}$ и $\overrightarrow{n_\beta} \perp \overrightarrow{n_\alpha}$, што значи да вектор $\overrightarrow{n_\beta}$ има исти правац као $\overrightarrow{u_l} \times \overrightarrow{n_\alpha}$. Пошто дужина и смер вектора $\overrightarrow{n_\beta}$ нису битни, можемо узети да је $\overrightarrow{n_\beta} = \overrightarrow{u_l} \times \overrightarrow{n_\alpha} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = (13, 4, -10)$. Дакле, једначина равни β је

$$\beta : 13 \cdot (x-1) + 4 \cdot (y+2) + (-10) \cdot (z-3) = 0,$$

односно $\beta : 13x - 13 + 4y + 8 - 10z + 30 = 0$. Након сређивања, добија се $\beta : 13x + 4y - 10z + 25 = 0$.

4.16. Познато је да две праве које се секу припадају једној равни. Ако је права a одређена тачком A и вектором $\overrightarrow{u_a}$ и ако је права b одређена тачком B и вектором $\overrightarrow{u_b}$, онда оне припадају једној равни ако и само ако вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u_a}, \overrightarrow{u_b}$ припадају једној равни, односно ако и само ако су компланарни. Из особина мешовитог производа познато нам је да три вектора припадају једној равни ако и само ако је њихов мешовити производ једнак нули, што значи да праве a и b припадају једној равни ако и само ако $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u_a}, \overrightarrow{u_b}] = 0$.

Ако праве a и b припадају једној равни, а не секу се, онда су паралелне, а тада су њихови вектори правца u_a и u_b колинеарни. Дакле, услов да се праве a и b секу јесте да њихови вектори правца $\overrightarrow{u_a}$ и $\overrightarrow{u_b}$ нису колинеарни и да је $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u_a}, \overrightarrow{u_b}] = 0$.

Права $p : \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-1}{-2}$ садржи тачку $P(2, -4, 1)$ и има вектор правца $\overrightarrow{u_p} = (3, 5, -2)$, док права $q : \frac{x-\lambda}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{0}$ садржи тачку $Q(\lambda, 3, -5)$ и има вектор правца $\overrightarrow{u_q} = (2, 1, 0)$. Пошто вектори $\overrightarrow{u_p}$ и $\overrightarrow{u_q}$ нису колинеарни (не може се ниједан од њих помножити неким бројем и добити други), следи да се p и q секу ако и само ако је $[\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{u_q}] = 0$. Како је $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (\lambda - 2, 3 - (-4), -5 - 1) = (\lambda - 2, 7, -6)$, следи да је

$$0 = [\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{u_q}] = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 7 & -6 \\ 3 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -28 - 18 + 60 + 2(\lambda - 2),$$

тј. $14 + 2\lambda - 4 = 0$. Дакле, $2\lambda = -10$, односно $\lambda = -5$.

Нека је $S(x_0, y_0, z_0)$ пресечна тачка правих p и q. Тада тачка S припада правој p, што значи да је $\frac{x_0-2}{3} = \frac{y_0+4}{5} = \frac{z_0-1}{-2} = t$, односно $x_0 - 2 = 3t$, $y_0 + 4 = 5t$ и $z_0 - 1 = -2t$. Такође, тачка S припада и правој q, што значи да је $\frac{x_0-(-5)}{2} = \frac{y_0-3}{1} = \frac{z_0+5}{0} = s$, па је $x_0 - (-5) = 2s$, $y_0 - 3 = s$ и $z_0 + 5 = 0$. Према томе, важи $z_0 = -5$, па заменом у $z_0 - 1 = -2t$ добијамо

$-5-1=-2t$, тј. $-6=-2t$. Дакле, $t=3$. Одавде је $x_0-2=3\cdot 3=9$, тј. $x_0=11$ и $y_0+4=5\cdot 3=15$, тј. $y_0=11$. Треба још проверити да ли заменом у једначине $x_0-(-5)=2s$ и $y_0-3=s$ не добијамо контрадикцију (то би значило да се праве p и q заправо не секу). Међутим, $s=11-3=8$ и $11-(-5)=16=2\cdot 8$, што значи да је пресечна тачка има координате $S(11,11,-5)$.