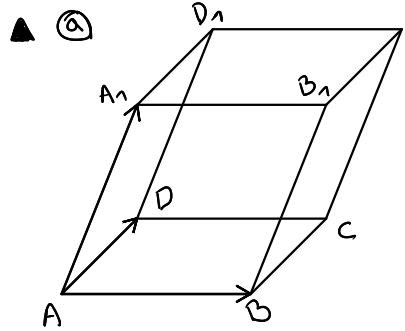




1. Нека су $A(-1, -2, 7)$, $B(5, 0, -4)$, $D(0, 1, 3)$ и $D_1(-3, -1, -2)$ четири темена паралелоипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.
- а) [4п] Израчунати координате преосталих темена паралелоипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.
- б) [6п] Израчунати запремину паралелоипеда и висину која одговара плосни $ADD_1 A_1$.
- в) [5п] Одредити угао између правих BC и DD_1 и дужину пројекције вектора $\overrightarrow{DD_1}$ на вектор $\overrightarrow{BC}$.



а) $ABCD$ ПАРАЛЕЛОГРАМ $\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $C = (x_c, y_c, z_c)$
 $\Rightarrow (1, 3, -4) = (x_c - 5, y_c, z_c + 4) \Rightarrow \boxed{C(6, 3, -8)}$
 $ADD_1 A_1$ ПАРАЛЕЛОГРАМ $\Rightarrow \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{DD_1}$, $A_1 = (x_{A_1}, y_{A_1}, z_{A_1})$
 $\Rightarrow (x_{A_1} + 1, y_{A_1} + 2, z_{A_1} - 7) = (-3, -2, -5) \Rightarrow \boxed{A_1(-4, -4, 2)}$
 $ABB_1 A_1$ ПАРАЛЕЛОГРАМ $\Rightarrow \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$, $B_1 = (x_{B_1}, y_{B_1}, z_{B_1})$
 $\Rightarrow (-3, -2, -5) = (x_{B_1} - 5, y_{B_1}, z_{B_1} + 4) \Rightarrow \boxed{B_1(2, -2, -9)}$
 $BCC_1 B_1$ ПАРАЛЕЛОГРАМ $\Rightarrow \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1}$, $C_1 = (x_{C_1}, y_{C_1}, z_{C_1})$
 $\Rightarrow (-3, -2, -5) = (x_{C_1} - 6, y_{C_1} - 3, z_{C_1} + 8) \Rightarrow \boxed{C_1(3, 1, -13)}$

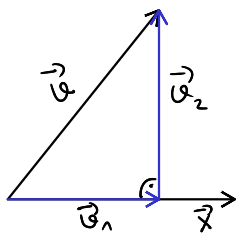
б) $V = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1}]| = |-181| = \boxed{181}$

$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1}] = \begin{vmatrix} 6 & 2 & -11 \\ 1 & 3 & -4 \\ -3 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 6 \cdot 2 \cdot (-5) + 2 \cdot (-11) \cdot (-3) + (-11) \cdot (-3) \cdot (-2) - (-90 + 24 + 22 - 99 - 48 + 10) = -181$

$V = B \cdot H \Rightarrow H = \frac{V}{B} = \frac{181}{\sqrt{867}} = \frac{181}{17\sqrt{3}} = \boxed{\frac{181\sqrt{3}}{51}}$

$B = P_{ADD_1 A_1} = \|\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AA_1}\| = \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & -4 \\ -3 & -2 & -5 \end{vmatrix} \right\| = \|(23, 17, 7)\| = \sqrt{529 + 289 + 49} = \sqrt{867}$

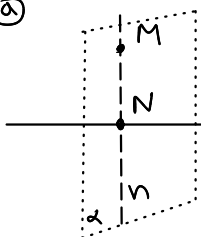
в) $\cos \Delta(BC, DD_1) = \frac{|\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DD_1}|}{\|\overrightarrow{BC}\| \cdot \|\overrightarrow{DD_1}\|} = \frac{|-3 - 6 + 20|}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{38}} = \frac{11}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{38}}$
 $\overrightarrow{BC} = (1, 3, -4)$
 $\overrightarrow{DD_1} = (-3, -2, -5)$
 $\Rightarrow \Delta(BC, DD_1) = \arccos \frac{11}{\sqrt{26} \sqrt{38}}$



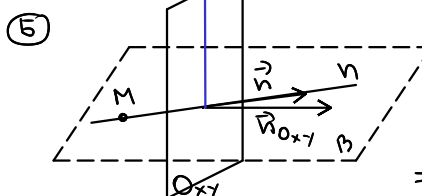
ОЗНАЧИМО $\vec{u} = \overrightarrow{DD_1}$, $\vec{x} = \overrightarrow{BC}$ и $\vec{u}_1$ пројекцијом $\vec{u}$ на $\vec{x}$.
 $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$, $\vec{u}_1 = \lambda \vec{x}$, $\vec{u}_2 \perp \vec{x} \Rightarrow \vec{u} = \lambda \vec{x} + \vec{u}_2$ / $\circ \vec{x}$
 $\Rightarrow \vec{u}_1 = \frac{\overrightarrow{DD_1} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|^2} \overrightarrow{BC} = \frac{11}{26} \overrightarrow{BC}$
 $\Rightarrow \|\vec{u}_1\| = \frac{11}{26} \cdot \|\overrightarrow{BC}\| = \frac{11}{26} \cdot \sqrt{26} \Rightarrow \boxed{\|\vec{u}_1\| = \frac{11\sqrt{26}}{26}}$

2. Дате су тачка $M(-1, 1, 1)$ и права $p: y = 0, x - z + 1 = 0$.

- а) [7п] Одредити једначину нормале n на праву p која садржи тачку M .
- б) [7п] Одредити једначину равни која садржи нормалу n и нормална је на раван Oxy .



а) α т.н. $M \in \alpha$, $\alpha \perp p: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{v}_\alpha = \vec{p} = (1, 0, 1)$
 $\Rightarrow \alpha: 1(x+1) + 0(y-1) + 1(z-1) = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha: x + z = 0}$
 б) $N = p \cap \alpha: t + t + 1 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{N(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})}$
 $n = MN \Rightarrow \vec{n} = \overrightarrow{MN} = (\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}) \parallel (1, -2, -1)$
 $\Rightarrow \boxed{n: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-1}}$



а) $M(-1, 1, 1) \in n \subset \beta \checkmark$
 б) $n \subset \beta \Rightarrow \vec{v}_\beta \perp \vec{n} = (1, -2, -1)$
 в) $\beta \perp Oxy: z = 0 \Rightarrow \vec{v}_\beta \perp \vec{v}_{Oxy} = (0, 0, 1)$
 $\Rightarrow \vec{v}_\beta = \vec{v}_{Oxy} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (2, 1, 0) \checkmark$

$$\Rightarrow B: 2(x+1) + 1(y-1) + 0(z-1) = 0 \Rightarrow B: 2x + y + 1 = 0$$

3. [14п] Изометријском трансформацијом свести криву $K: 3x^2 + 3y^2 + 2xy - 2x - 4y - 9 = 0$ на канонски облик и написати формуле те трансформације. Која крива је у питању и колики је њен ексцентрицитет?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & -9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1^2 = (3-\lambda-1)(3-\lambda+1) = (2-\lambda)(4-\lambda) \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow U_2 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}), U_4 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y') \end{cases} \Rightarrow \mathcal{K}': \frac{3}{2}(x'^2 + 2x'y' + y'^2) + \frac{3}{2}(x'^2 - 2x'y' + y'^2) + \frac{2}{2}(-x'^2 + y'^2) - \frac{2}{\sqrt{2}}(x' + y') - \frac{4}{\sqrt{2}}(-x' + y') - 9 = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{K}': 2x'^2 + 4y'^2 + \sqrt{2}x' - 3\sqrt{2}y' - 9 = 0 \quad | :2$$

$$\mathcal{K}': x'^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + 2(y'^2 - \frac{3\sqrt{2}}{4}y' + \left(\frac{3\sqrt{2}}{8}\right)^2) - 2 \cdot \left(\frac{3\sqrt{2}}{8}\right)^2 - \frac{9}{2} = 0$$

$$\mathcal{K}': \left(x' + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + 2\left(y' - \frac{3\sqrt{2}}{8}\right)^2 - \frac{1}{8} - \frac{9}{16} - \frac{9}{2} = 0$$

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{\sqrt{2}}{4} \\ y'' = y' - \frac{3\sqrt{2}}{8} \end{cases} \Rightarrow \mathcal{K}'': x''^2 + 2y''^2 = \frac{83}{16} \Rightarrow \mathcal{K}'': \frac{x''^2}{\frac{83}{16}} + \frac{y''^2}{\frac{83}{32}} = 1 \quad \Rightarrow \text{еллипса}$$

$$a^2 = \frac{83}{16}, b^2 = \frac{83}{32}$$

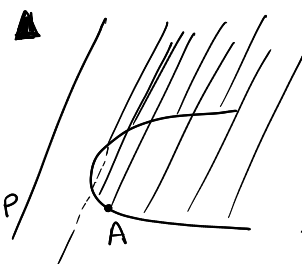
$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{83}{32} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{83}}{4\sqrt{2}}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{\sqrt{83}}{4\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{83}}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

формуле:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x'' - \frac{\sqrt{2}}{4} + y'' + \frac{3\sqrt{2}}{8}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x'' + y'' + \frac{\sqrt{2}}{8}\right) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-x'' + \frac{\sqrt{2}}{4} + y'' + \frac{3\sqrt{2}}{8}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-x'' + y'' + \frac{5\sqrt{2}}{8}\right) \end{cases}$$

4. [14п] Нека је $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + \frac{9}{4}z^2 - 3xz + 6x - y - 7z + 5 = 0\}$ и C цилиндар чије су изводнице паралелне правој $p: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2}$, а који садржи параболу $y = x^2, z = 2$. Доказати да је $S = C$.



$A(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{P}$ произв. $\Rightarrow y_0 = x_0^2, z_0 = 2$

$i: \frac{x-x_0}{3} = \frac{y-y_0}{4} = \frac{z-z_0}{2} \in \mathcal{C}$ произвољна изводница $\parallel p$

$$\Rightarrow x_0 = x - 3t, y_0 = y - 4t, z_0 = z - 2t, t \in \mathbb{R}$$

1) $z_0 = 2 \Rightarrow z - 2t = 2 \Rightarrow t = \frac{z}{2} - 1 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = x - \frac{3z}{2} + 3 \\ y_0 = y - 2z + 4 \\ z_0 = 2 \end{cases}$

2) $y_0 = x_0^2 \Rightarrow \mathcal{C}: y - 2z + 4 = \left(x - \frac{3z}{2} + 3\right)^2$

$$\Rightarrow \mathcal{C}: y - 2z + 4 = x^2 + \frac{9}{4}z^2 + 9 - 3xz + 6x - 9z = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{C}: x^2 + \frac{9}{4}z^2 - 3xz + 6x - y - 7z + 5 = 0 \Rightarrow \mathcal{C} = S$$

5. а) [6п] Одредити формуле афиног пресликавања простора које представља централну симетрију S_T у односу на тачку $T(-2, 1, -3)$. Одредити слику σ површи $x^2 + 8x + y^2 - 4y + z^2 + 12z + 55 = 0$ при централној симетрији S_T и доказати да је σ јединична сфера.
- б) [7п] Сферни троугао ABC на сфери σ (из дела а)) има два једнака угла $\alpha = \beta = \frac{\pi}{6}$ и трећи угао $\gamma = \frac{3\pi}{4}$. Израчунати површину и ивице тог троугла.

а) $\vec{TM} = -\vec{TM} \Rightarrow (x'+2, y'-1, z'+3) = (-2-x, 1-y, -3-z)$

$$\Rightarrow S_T: \begin{cases} x' = -x-4 \\ y' = -y+2 \\ z' = -z-6 \end{cases} \rightarrow S: (x+4)^2 + (y-2)^2 + (z+6)^2 = 1$$

$$C(-4, 2, -6), r=1 \xrightarrow{S_T} C'(0, 0, 0), r'=1$$

$$\sigma = S_T(S): x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

б) $\alpha = \beta = \pi/6, \gamma = 3\pi/4 \Rightarrow P = \alpha + \beta + \gamma - \pi = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{4} - \pi = \frac{\pi}{12}$

$$-\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha \quad | \cdot 4$$

$$\sqrt{2} \cos \alpha = -\sqrt{6} + 2\sqrt{3}$$

$$a = b = \arccos(\sqrt{6} - \sqrt{3})$$

$$-\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cos \gamma \quad | \cdot 4$$

$$\cos \gamma = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$c = \arccos(3 - 2\sqrt{2})$$

cos α = cos β = $\sqrt{3}/2$
sin α = sin β = $1/2$
cos γ = $-\sqrt{2}/2$
sin γ = $\sqrt{2}/2$