

Математички факултет, Универзитет у Београду
Анализа 2 (Р смер) - први поправак првог колоквијума
1.7.2026.

1. На скупу $C[0, 1]$ дате су функције $d_1, d_2: C[0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ са

$$d_1(f, g) = \left| \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx \right| \quad \text{и} \quad d_2(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

и два низа $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ са $f_n(x) \equiv n$ и $g_n(x) = \begin{cases} n - n^2 x, & x \in [0, \frac{1}{n}], \\ 0, & x \in (\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$

а) [4] Доказати да је тачно једна од функција d_1 и d_2 метрика на $C[0, 1]$ и означимо је надаље са d .

б) [3] Нека је са d_∞ означена позната супремум метрика на $C[0, 1]$ дата са

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|.$$

Израчунати $d(f_n, 0)$, $d_\infty(f_n, 0)$, $d(g_n, 0)$ и $d_\infty(g_n, 0)$ за свако $n \in \mathbb{N}$, где је са 0 означена функција идентички једнака нули.

в) [3] Испитати ограниченост и компактност простора $(C[0, 1], d)$.

г) [3] Доказати да за све $f, g \in C[0, 1]$ важи $d(f, g) \leq d_\infty(f, g)$. Када се достиже једнакост?

д) [3] Доказати да метрике d и d_∞ нису еквивалентне.

ђ) [4] Испитати путну повезаност простора $(C[0, 1], d)$.

2. Дата је непрекидна функција $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ са

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 \sin y - y^2 \sin x}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ c, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

а) [3] Одредити константу $c \in \mathbb{R}$.

б) [2] Наћи извод функције f у правцу произвољног јединичног вектора $v = (a, b)$ у тачки $(0, 0)$.

в) [2] Испитати диференцијабилност функције f на скупу $\mathbb{R}^2$.

г) [3] Испитати непрекидност парцијалних извода функције f на скупу $\mathbb{R}^2$.

3. Нека је дата функција $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ са $f(x, y, z) = x^3 y + xy^3 + z^2 - xy + 2z$.

а) [5] Одредити локалне екстремуме функције f .

б) [8] Доказати да функција f достиже минимум и максимум на телу $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 + 2z \leq 9, z \geq -4\}$ и одредити директну слику $f(T)$.

в) [7] Доказати да једначина $f(x, y, z) = -1$ дефинише јединствену имплицитну функцију $y = \varphi(x, z)$ класе C^∞ на некој околини тачке $(1, -2)$ такву да је $\varphi(1, -2) = -1$. Израчунати $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(1, -2)$ и $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}(1, -2)$.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена.