Решења поправног првог колоквијума из Анализе 2 у јуну 1

1. На скупу $C[0,1]$ дате су функције $d_1, d_2 \colon C[0,1] \times C[0,1] \to [0,+\infty)$ са

$$d_1(f,g) = \left| \int_0^1 \big(f(x) - g(x)\big)\, dx \right| \quad \text{и} \quad d_2(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$$

и два низа $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ са $f_n(x) \equiv n$ и $g_n(x) = \begin{cases} n - n^2 x, & x \in \left[0, \frac{1}{n}\right], \\ 0, & x \in \left(\frac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$

а) Доказати да је тачно једна од функција d_1 и d_2 метрика на $C[0,1]$ и означимо је надаље са d.

б) Нека је са d_∞ означена позната супремум метрика на $C[0,1]$ дата са

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

Израчунати $d(f_n, 0)$, $d_\infty(f_n, 0)$, $d(g_n, 0)$ и $d_\infty(g_n, 0)$ за свако $n \in \mathbb{N}$, где је са 0 означена функција идентички једнака нули.

в) Испитати ограниченост и компактност простора $(C[0,1], d)$.

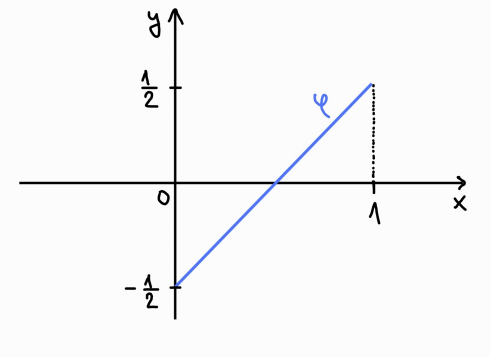
г) Доказати да за све $f, g \in C[0,1]$ важи $d(f,g) \leqslant d_\infty(f,g)$. Када се достиже једнакост?

д) Доказати да метрике d и d_∞ нису еквивалентне.

ђ) Испитати путну повезаност простора $(C[0,1], d)$.

Решење:

а) Сетимо се најпре тврђења из *Анализе 1* да уколико је $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрекидна ненегативна функција за коју важи $\int_a^b \varphi(x)dx = 0$, тада је $\varphi(x) = 0$ за све $x \in [a,b]$ тј. $\varphi \equiv 0$. Услов ненегативности функције φ је битан, јер уколико га изоставимо, тврђење више не мора да важи. На пример, функција $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ дата са $\varphi(x) = x - \frac{1}{2}$ није идентички једнака нули и достиже и позитивне и негативне вредности на свом домену, а за њу важи $\int_0^1 \varphi(x)dx = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$, што се види и са њеног графика пошто су површине одговарајућа два троугла испод и изнад x-осе међусобно једнаке.



Ово је кључна опсервација за доказ да функција d_1 није метрика. Она јесте ненегативна, симетрична и испуњава неједнакост троугла (и то се може лако доказати), али није недегенерисана. Заиста, одабиром две функције $f, g \in C[0,1]$ дате се $f(x) = x - \frac{1}{2}$ и $g(x) \equiv 0$ видимо да важи $d_1(f,g) = \left| \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2} \right) dx \right| = 0$ иако су оне међусобно различите.

Докажимо сада да функција d_2 јесте метрика на скупу $C[0,1]$.

Ненегативност и симетричност су очигледне, јер за сваке две функције $f, g \in C[0,1]$ важи $|f(x) - g(x)| \geqslant 0$ и $|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|$ за свако $x \in [0,1]$, па је $d_2(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx \geqslant \int_0^1 0\, dx = 0$ и $d_2(g,f) = \int_0^1 |g(x) - f(x)|\, dx = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx = d_2(f,g)$.

Даље, ако је $f = g$, јасно важи $\int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx = \int_0^1 0\, dx = 0$. С друге стране, уколико је $\int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx = 0$, на основу опсервације одозго и чињенице да је функција $|f(x) - g(x)|$ непрекидна као композиција и ненегативна закључујемо да је она идентички једнака нули, односно да је $f = g$. Према томе, функција d_2 је недегенерисана.

Коначно, за сваке три функције $f, g, h \in C[0,1]$ и свако $x \in [0,1]$ важи неједнакост троугла за реалне бројеве: $|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \geqslant |f(x) - h(x)|$, одакле интеграцијом добијамо

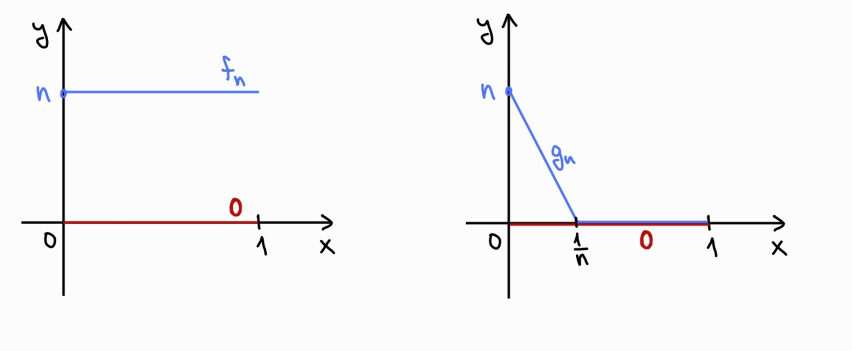
$$\int_0^1 \left(|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \right) dx \geqslant \int_0^1 |f(x) - h(x)|\, dx$$

тј.

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx + \int_0^1 |g(x) - h(x)|\, dx \geqslant \int_0^1 |f(x) - h(x)|\, dx,$$

а то управо значи да је $d_2(f,g) + d_2(g,h) \geqslant d_2(f,h)$ и да d_2 јесте метрика јер задовољава и неједнакост троугла.

б) Лако је скицирати графике непрекидних функција g_n знајући да су за свако $n \in \mathbb{N}$ оне линеарне на $\left[0, \frac{1}{n}\right]$, једнаке нули на $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ и да је $g_n(0) = n$, као и графике константних функција f_n. Одатле се види да су све функције g_n ненегативне и монотоно опадајуће.



Зато је

$$d_\infty(g_n, 0) = \sup_{x\in[0,1]} |g_n(x) - 0| = \sup_{x\in[0,1]} g_n(x) = g_n(0) = n \quad \text{и}$$

$$d(g_n, 0) = \int_0^1 |g_n(x) - 0|\, dx = \int_0^1 g_n(x)\, dx = \int_0^{\frac{1}{n}} (n - n^2x)\, dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 0\, dx =$$

$$= \left(nx - \frac{n^2x^2}{2}\right)\Big|_0^{\frac{1}{n}} + 0 = n \cdot \frac{1}{n} - \frac{n^2}{2} \cdot \frac{1}{n^2} - 0 = \frac{1}{2},$$

док је

$$d_\infty(f_n, 0) = \sup_{x\in[0,1]} |n - 0| = \sup_{x\in[0,1]} n = n \quad \text{и}$$

$$d(f_n, 0) = \int_0^1 |n - 0|\, dx = \int_0^1 n\, dx = nx|_0^1 = n.$$

в) На основу дела б) имамо да важи $d(f_n, 0) = n \to +\infty$, кад $n \to \infty$, па не постоји отворена лопта коначног полупречника $R > 0$ која садржи и нула-функцију и све функције низа $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Самим тим, не постоји отворена лопта у којој је садржан простор цео $C[0, 1]$, те он није ограничен. Како сваки компактан простор мора бити ограничен, то $(C[0, 1], d)$ није ни компактан.

г) Како је $d_\infty(f, g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$, то за свако $x \in [0, 1]$ важи $|f(x) - g(x)| \leqslant d_\infty(f, g)$ и притом је $d_\infty(f, g)$ константа тј. не зависи од x. Зато за сваке две функције $f, g \in C[0, 1]$ важи

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx \leqslant \int_0^1 d_\infty(f, g)\, dx = d_\infty(f, g) \int_0^1 dx = d_\infty(f, g) \cdot x|_0^1 = d_\infty(f, g).$$

Једнакост $d(f, g) = d_\infty(f, g)$ је еквивалентна са $\int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx = d_\infty(f, g) = \int_0^1 d_\infty(f, g)\, dx$ тј. са $\int_0^1 d_\infty(f, g)\, dx - \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx = 0$, а то је еквивалентно са $\int_0^1 (d_\infty(f, g) - |f(x) - g(x)|)\, dx = 0$. Како је функција $d_\infty(f, g) - |f(x) - g(x)|$ ненегативна (јер је $d_\infty(f, g) \geqslant |f(x) - g(x)|$ за све $x \in [0, 1]$) и непрекидна као композиција, мора важити $d_\infty(f, g) - |f(x) - g(x)| = 0$, односно $|f(x) - g(x)| = d_\infty(f, g)$ за све $x \in [0, 1]$. Дакле, $d_\infty(f, g) = d(f, g)$ важи ако и само ако је $|f(x) - g(x)|$ константно на $[0, 1]$ што због непрекидности значи да је и $f - g$ константна функција на $[0, 1]$.

д) Уколико би ове две метрике биле еквивалентне, постојале би константе $\alpha, \beta > 0$ такве да важи $\alpha d_\infty(f, g) \leqslant d(f, g) \leqslant \beta d_\infty(f, g)$ за све функције $f, g \in C[0, 1]$. На основу дела г) јасно је да константа β постоји, на пример, $\beta = 1$, а ми ћемо доказати да оваква константа α не постоји. Ако би постојала, важило би $\alpha d_\infty(g_n, 0) \leqslant d(g_n, 0)$, односно $\alpha n \leqslant \frac{1}{2}$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Међутим, ово је немогуће, јер $\alpha n \to +\infty$, кад $n \to \infty$. Зато метрике d и d_∞ нису еквивалентне.

ђ) Нека су $f, g \in C[0,1]$ две произвољне функције. На стандардан начин их можемо повезати путем $\gamma\colon ([0,1], |\cdot|) \to (C[0,1], d)$ дефинисаним са $\gamma(t) = (1-t)f + tg$ тј. $(\gamma(t))(x) = (1-t)f(x) + tg(x)$ за свако $x \in [0,1]$. Приметимо да је за свако $t \in [0,1]$ функција $(1-t)f + tg$ заиста непрекидна на $[0,1]$ као композиција, те је пут γ добро дефинисан (пошто $\gamma(t) \in C[0,1]$ за свако $t \in [0,1]$) и важи $\gamma(0) = 1 \cdot f + 0 \cdot g = f$ и $\gamma(1) = 0 \cdot f + 1 \cdot g = g$. Треба још доказати да је пресликавање γ непрекидно, што ћемо урадити доказивањем да је Липшицово.
Нека су $t, s \in [0,1]$ произвољни. Тада важи

$$d(\gamma(t), \gamma(s)) = \int_0^1 |(\gamma(t))(x) - (\gamma(s))(x)|\, dx = \int_0^1 |(1-t)f(x) + tg(x) - ((1-s)f(x) + sg(x))|\, dx =$$

$$= \int_0^1 |f(x) - tf(x) + tg(x) - f(x) + sf(x) - sg(x)|\, dx = \int_0^1 |(t-s)g(x) - (t-s)f(x)|\, dx =$$

$$= \int_0^1 |(t-s)(g(x) - f(x))|\, dx = \int_0^1 |t-s| \cdot |g(x) - f(x)|\, dx = |t-s| \int_0^1 |g(x) - f(x)|\, dx =$$

$$= |t-s| \cdot d(f,g) = L|t-s|,$$

па пресликавање γ заиста јесте Липшицово са константом $L = d(f,g)$, а то заједно са претходним значи да је простор $(C[0,1], d)$ путно повезан.

2. Дата је непрекидна функција $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ са

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \sin y - y^2 \sin x}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ c, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

а) Одредити константу $c \in \mathbb{R}$.

б) Наћи извод функције f у правцу произвољног јединичног вектора $v = (a,b)$ у тачки $(0,0)$.

в) Испитати диференцијабилност функције f на скупу $\mathbb{R}^2$.

г) Испитати непрекидност парцијалних извода функције f на скупу $\mathbb{R}^2$.

Решење:

а) Функција f је свакако непрекидна на скупу $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ као композиција непрекидних функција, па ћемо константу c одредити из услова што је она непрекидна у тачки $(0,0)$. То значи да је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$, односно $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 \sin y - y^2 \sin x}{x^2 + y^2} = c$. Увођењем поларних координата $x = \rho\cos\varphi$ и $y = \rho\sin\varphi$ и знајући да је $(x,y) \to (0,0)$ еквивалентно са $\rho \to 0$, добијамо

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \sin y - y^2 \sin x}{x^2 + y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\cos^2\varphi \sin(\rho\sin\varphi) - \rho^2 \sin^2\varphi \sin(\rho\cos\varphi)}{\rho^2} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \left(\cos^2\varphi \sin(\rho\sin\varphi) - \sin^2\varphi \sin(\rho\cos\varphi)\right).$$

Приметимо да је $\lim\limits_{\rho\to 0} \rho\sin\varphi = 0$ као производ функције ρ која тежи нули и ограничене функције $\sin\varphi$, па је $\lim\limits_{\rho\to 0} \sin(\rho\sin\varphi) = \sin 0 = 0$, а зато је и $\lim\limits_{\rho\to 0} \cos^2\varphi \sin(\rho\sin\varphi) = 0$, јер је $\cos^2\varphi$ ограничена функција. На сличан начин закључујемо да је $\lim\limits_{\rho\to 0} \rho\cos\varphi = 0$, $\lim\limits_{\rho\to 0} \sin(\rho\cos\varphi) = \sin 0 = 0$ и $\lim\limits_{\rho\to 0} \sin^2\varphi \sin(\rho\cos\varphi) = 0$. Све ово значи да је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 \sin y - y^2 \sin x}{x^2 + y^2} = 0 - 0 = 0$ тј. да је $c = 0$.

б) За јединични вектор $v=(a,b)$, где је $a^2+b^2=1$, по дефиницији имамо

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+tv)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+(ta,tb))-0}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot f(ta,tb)=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\frac{t^2a^2\sin(tb)-t^2b^2\sin(ta)}{t^2a^2+t^2b^2}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\frac{\cancel{t^2}(a^2\sin(tb)-b^2\sin(ta))}{\cancel{t^2}(a^2+b^2)}=\lim_{t\to 0}\frac{a^2\sin(tb)-b^2\sin(ta)}{t\cdot 1}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{a^2(tb+o(t))-b^2(ta+o(t))}{t}=\lim_{t\to 0}\big(a^2(b+o(1))-b^2(a+o(1))\big)=a^2b-b^2a=ab(a-b).$$

в) Израчунаћемо најпре парцијалне изводе функције f на отвореном скупу $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ и увидети да су они добро дефинисани и непрекидни. Имамо да је

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{(2x\sin y-y^2\cos x)(x^2+y^2)-(x^2\sin y-y^2\sin x)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}\quad\text{и}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{(x^2\cos y-2y\sin x)(x^2+y^2)-(x^2\sin y-y^2\sin x)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

за свако $(x,y)\neq(0,0)$, те су оба парцијална извода добро дефинисана и непрекидна као композиција елементарних функција на $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Зато је функција f диференцијабилна на овом скупу. Остаје да испитамо диференцијабилност у тачки $(0,0)$ и то ћемо урадити по дефиницији. Прво ћемо израчунати парцијалне изводе у овој тачки. Одабиром $v=(1,0)$ из дела б) добијамо да је $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1\cdot 0\cdot(1-0)=0$, а одабиром $v=(0,1)$ добијамо $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0\cdot 1\cdot(0-1)=0$. Функција f је диференцијабилна у $(0,0)$ ако и само ако је

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot h-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}}=0.$$

Сада рачунамо и у једном тренутку прелазимо на поларне координате $(h,k)=(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)$:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot h-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-0-0\cdot h-0\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}}=$$

$$=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\frac{h^2\sin k-k^2\sin h}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h^2\sin k-k^2\sin h}{\sqrt{h^2+k^2}^3}=$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2\cos^2\varphi\sin(\overbrace{\rho\sin\varphi}^{\to 0})-\rho^2\sin^2\varphi\sin(\overbrace{\rho\cos\varphi}^{\to 0})}{\rho^3}=$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2\cos^2\varphi(\rho\sin\varphi+o(\rho))-\rho^2\sin^2\varphi(\rho\cos\varphi+o(\rho))}{\rho^3}=$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^3\cos^2\varphi(\sin\varphi+o(1))-\rho^3\sin^2\varphi(\cos\varphi+o(1))}{\rho^3}=$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\big(\cos^2\varphi(\sin\varphi+o(1))-\sin^2\varphi(\cos\varphi+o(1))\big)=\cos^2\varphi\sin\varphi-\sin^2\varphi\cos\varphi.$$

Видимо да смо за вредност лимеса добили израз који зависи од променљиве φ, односно израз који није једнак нули независно од ње. На пример, за $\varphi=\frac{\pi}{6}$ је $\cos^2\varphi\sin\varphi-\sin^2\varphi\cos\varphi=\frac{3-\sqrt{3}}{8}\neq 0$, те посматрани лимес није једнак нули. Зато функција f није диференцијабилна у тачки $(0,0)$ тј. диференцијабилна је само на $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

г) У делу в) смо већ утврдили да су парцијални изводи функције f непрекидни на $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Испитајмо сада још њихову непрекидност у тачки $(0,0)$. Сетимо се да је

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(2x\sin y - y^2\cos x)(x^2+y^2) - 2x(x^2\sin y - y^2\sin x)}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

и уочимо низ $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ који тежи ка $(0,0)$ кад $n \to \infty$. За њега важи

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(0, \frac{1}{n}\right) = \frac{\left(0 \cdot \sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\cdot\cos 0\right)\left(0 + \frac{1}{n^2}\right) - 0 \cdot \left(0 \cdot \sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\cdot\sin 0\right)}{\left(0+\frac{1}{n^2}\right)^2} = \frac{-\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}} =$$

$$= -1 \to -1 \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\ n \to \infty,$$

па парцијални извод $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ није непрекидан у тачки $(0,0)$.
Слично, имамо да је

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2\cos y - 2y\sin x)(x^2+y^2) - 2y(x^2\sin y - y^2\sin x)}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

и да за низ $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$ који тежи $(0,0)$ кад $n \to \infty$ важи

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \frac{\left(\frac{1}{n^2}\cdot\cos 0 - 0\cdot\sin\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n^2} + 0\right) - 0 \cdot \left(\frac{1}{n^2}\cdot\sin 0 - 0\cdot\sin\frac{1}{n}\right)}{\left(0+\frac{1}{n^2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}} =$$

$$= 1 \to 1 \neq 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0),\ n \to \infty,$$

па ни парцијални извод $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ није непрекидан у тачки $(0,0)$.

3. Нека је дата функција $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ са $f(x,y,z) = x^3y + xy^3 + z^2 - xy + 2z$.

а) Одредити локалне екстремуме функције f.

б) Доказати да функција f достиже минимум и максимум на телу $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2+2z \leqslant 9,\ z \geqslant -4\}$ и одредити директну слику $f(T)$.

в) Доказати да једначина $f(x,y,z) = -1$ дефинише јединствену имплицитну функцију $y = \varphi(x,z)$ класе C^∞ на некој околини тачке $(1,-2)$ такву да је $\varphi(1,-2) = -1$. Израчунати $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(1,-2)$ и $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}(1,-2)$.

Решење:

а) Одредимо прво стационарне тачке функције f. Она је класе C^∞ на $\mathbb{R}^2$ као полином.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y + y^3 - y = y(3x^2+y^2-1) = 0 \iff y=0 \ \vee \ 3x^2+y^2=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 3xy^2 - x = x(x^2+3y^2-1) = 0 \iff x=0 \ \vee \ x^2+3y^2=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z+2 = 0 \iff z=-1$$

1° $x=0$ и $y=0$

$A(0,0,-1)$

2° $x=0$ и $y\neq 0$

$\Rightarrow 3x^2+y^2=1 \Rightarrow y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1$

$B(0,1,-1)$ и $C(0,-1,-1)$

3° $x\neq 0$ и $y=0$

$\Rightarrow x^2+3y^2=1 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

$D(1,0,-1)$ и $E(-1,0,-1)$

4° $x\neq 0$ и $y\neq 0$

$\Rightarrow 3x^2+y^2=1$ и $x^2+3y^2=1$

$\Rightarrow (3x^2+y^2)-(x^2+3y^2) = 1-1$

$\Rightarrow 2x^2-2y^2=0 \Rightarrow x^2=y^2$

$4x^2=1 \Rightarrow x^2=\frac{1}{4} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}$

$\Rightarrow y^2=\frac{1}{4} \Rightarrow y=\pm\frac{1}{2}$

$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\right)$, $G\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\right)$

$H\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1\right)$, $I\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1\right)$

Укупно имамо 9 стационарних тачака.

$$d^2f(x,y) = \begin{bmatrix} 6xy & 3x^2+3y^2-1 & 0 \\ 3x^2+3y^2-1 & 6xy & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$ је Хесијан матрица

$$d^2f(A) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$A_1 = 0 \Rightarrow$ не може се применити Силвестер

$\Phi(h_1,h_2,h_3) = -2h_1h_2 + 2h_3^2$

$\phi(1,1,0) = -2 < 0$, $\phi(0,0,1) = 2 > 0 \Rightarrow \phi$ мења знак

$\Rightarrow$ тачка A није локални екстремум

$$d^2f(B) = d^2f(C) = d^2f(D) = d^2f(E) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$A_1 = 0 \Rightarrow$ не може се применити Силвестер

$\phi(h_1, h_2, h_3) = 4h_1h_2 + 2h_3^2$

$\phi(0,0,1) = 2 > 0$, $\phi(-1,1,0) = -2 < 0 \Rightarrow \phi$ мења знак

$\Rightarrow$ тачке B, C, D и E нису локални екстремуми

$$d^2f(F) = d^2f(H) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad A_1 = \frac{3}{2} > 0, \quad A_2 = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = 2 > 0$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2A_2 = 4 > 0$$

Силвестер $\Rightarrow$ тачке F и H су локални минимуми функције f

$$\boxed{f(F) = f(H) = -\frac{9}{8}}$$

$$d^2f(G) = d^2f(I) = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad A_1 = -\frac{3}{2} < 0, \quad A_2 = \begin{vmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = 2 > 0$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2A_2 = 4 > 0$$

$\Rightarrow$ не може Силвестер

$\phi(h_1, h_2, h_3) = -\frac{3}{2}h_1^2 - \frac{3}{2}h_2^2 + h_1h_2 + 2h_3^2$

$\phi(1,1,0) = -2 < 0$, $\phi(0,0,1) = 2 > 0 \Rightarrow \phi$ мења знак

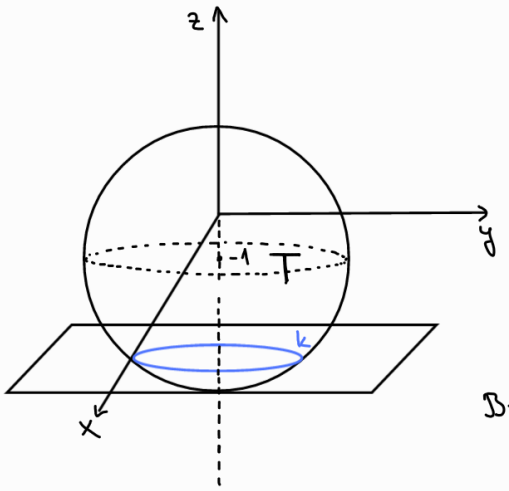
$\Rightarrow$ тачке G и I нису локални екстремуми функције f

Дакле, f има два локална минимума - тачке $F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$ и $H(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1)$.

б) $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2+2z \le 9,\ z \ge -4\}$

$x^2+y^2+z^2+2z \le 9 \ /+1 \iff x^2+y^2+(z+1)^2 \le 10$ затворена лопта са центром у $(0,0,-1)$ и полупречником $\sqrt{10}$

$z \ge -4$ је затворен полупростор изнад равни $z=-4$



Тело T је затворено као пресек затворене лопте и затвореног полупростора и ограничено је, јер је садржана у поменутој лопти.

$\Rightarrow$ T је компактно, а f непрекидна фја

Вајерштрас $\Rightarrow$ f достиже минимум и максимум на T

На $\operatorname{int} T$ посматрамо локалне екстремуме од f тј. тачке F и H из дела а).

Руб тела T треба поделити на три дела и на сваком од њих наћи стационарне тачке (при одговарајућим условима).

1. део: $x^2+y^2+z^2+2z = 9$, $z > -4$ тј. део сфере изнад равни

$\Downarrow$

$z^2+2z = 9-x^2-y^2$

$\Rightarrow f(x,y,z) = x^3y+xy^3+\underline{z^2}-xy+\underline{2z} = x^3y+xy^3-xy+9-x^2-y^2 =: g(x,y)$

↑ то је сада фја две променљиве

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= 3x^2y+y^3-y-2x = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= x^3+3xy^2-x-2y = 0 \end{aligned}\right\} \ominus \Rightarrow x^3+3xy^2-x-2y-3x^2y-y^3+y+2x = 0$$

$$x^3-y^3-3x^2y+3xy^2+x-y = 0$$

$$(x-y)(x^2+xy+y^2) - 3xy(x-y) + x - y = 0$$

$$(x-y)(x^2+xy+y^2-3xy+1) = 0$$

$$(x-y)(x^2-2xy+y^2+1) = 0$$

$$(x-y)\underbrace{((x-y)^2+1)}_{>0} = 0 \Rightarrow x-y=0 \Rightarrow y=x$$

$$x^3+3x^3-x-2x=0$$

$$4x^3-3x=0$$

$$x(4x^2-3)=0$$

$\Rightarrow x \in \{0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\} \Rightarrow (0,0), (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ и $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ су стационарне тачке фје g

$(x,y)=(0,0) \Rightarrow z^2+2z=9 \Rightarrow z=\pm\sqrt{10}-1$, али постоји само једно $z=\sqrt{10}-1$ због ограничења $z>-4$ (важно да је $\sqrt{10}>3$)

$$f(0,0,\sqrt{10}-1) = g(0,0) = 9$$

$(x,y)=(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) \Rightarrow z^2+2z = 9-\frac{3}{4}-\frac{3}{4} = \frac{15}{2} \Rightarrow z = \pm\sqrt{\frac{17}{2}}-1$

$\sqrt{\frac{17}{2}} < \sqrt{9} = 3 \Rightarrow -\sqrt{\frac{17}{2}}-1 > -4$ и $\sqrt{\frac{17}{2}}-1 > -4$

$$f(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \pm\sqrt{\tfrac{17}{2}}-1) = g(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{63}{8}$$

Аналогно је: $(x,y)=(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \Rightarrow z^2+2z = 9-\frac{3}{4}-\frac{3}{4} = \frac{15}{2} \Rightarrow z = \pm\sqrt{\frac{17}{2}}-1$

$$f(\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}, \pm\sqrt{\tfrac{17}{2}}-1) = g(\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{63}{8}$$

2. део: $x^2+y^2+z^2+2z < 9$, $z=-4$ тј. део равни унутар сфере

$\Downarrow$

$f(x,y,z) = f(x,y,-4) = x^3y+xy^3-xy+8 =: g(x,y)$ фја две променљиве

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 3x^2y + y^3 - y = 0 \iff y(3x^2+y^2-1) = 0 \iff \underline{y=0 \ \vee \ 3x^2+y^2=1}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = x^3 + 3xy^2 - x = 0 \iff x(x^2+3y^2-1) = 0 \iff \underline{x=0 \ \vee \ x^2+3y^2=1}$$

Добили смо исти систем као у делу а) где смо одредили стационарне тачке од f. Зато одмах имамо да су стационарне тачке фје g $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$, $(-1,0)$, $(1,0)$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ и $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$. Међутим, ограничење $x^2+y^2+z^2+2z \leq 9$, које се своди на $x^2+y^2 \leq 1$ уз услов $z=-4$, задовољавају само тачке $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ и $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ и за њих је

$$g\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right) = g\left(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right) = \frac{63}{8} \quad \text{и} \quad g\left(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right) = g\left(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right) = \frac{65}{8}.$$

<u>3. део</u>: $x^2+y^2+z^2+2z = 9$, $z=-4$ тј. пресечна кружница сфере и равни

$$\Rightarrow x^2+y^2 = 9-z^2-2z = 1$$

$$\Rightarrow f(x,y,z) = x^3y + xy^3 + z^2 - xy + 2z = xy\underbrace{(x^2+y^2)}_{1} + 16 - xy - 8 =$$

$$= xy + 8 - xy = 8$$, па је f константна на овој кружници

На основу свега испитаног видимо да је максимална вредност функције f на телу T једнака 9 и достиже се у тачки $(0,0,\sqrt{10}-1)$, док је њена минимална вредност једнака $-\frac{9}{8}$ и достиже се у тачкама $F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1)$ и $H(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1)$. Како је тело T (тј. K) повезано, па је $f(T)$ интервал у $\mathbb{R}$, и то затворен због компактности тела T. Дакле, $f(T) = \left[-\frac{9}{8}, 9\right]$.

б) Нешто једну променљиву у да изразимо преко преостале две променљиве x и z.

Уочимо фју $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x,y,z) = f(x,y,z) + 1 = x^3y + xy^3 + z^2 - xy + 2z + 1$

и означимо тачке $a = (\overset{x}{1}, \overset{z}{-2})$ и $b = -\overset{y}{1}$.

$F \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ као полином ✓

$F(a,b) = F(\overset{x}{1}, \overset{y}{-1}, \overset{z}{-2}) = 1^3 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1)^3 + (-2)^2 - 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) + 1 = 0$ ✓

$\frac{\partial F}{\partial y} = x^3 + 3xy^2 - x$ нетр. и $\frac{\partial F}{\partial y}(1,-1,-2) = 1^3 + 3 \cdot 1 \cdot (-1)^2 - 1 = 3 \neq 0$ ✓

$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2y + y^3 - y$ нетр. и $\frac{\partial F}{\partial z} = 2z + 2$ нетр. ✓

Т. $\Rightarrow$ постоје околине $U \ni (1,-2)$ и $V \ni -1$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$, $V \subseteq \mathbb{R}$ и јединствена C^∞ фја $\varphi: U \to V$ т.ј. је $\varphi(1,-2) = -1$ и $F(x, \varphi(x,z), z) = 0$ тј. $y = \varphi(x,z)$ за све $(x,z) \in U$

$\varphi \in C^\infty(U)$ јер $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$

Т. $\Rightarrow$ $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,z) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)} = -\frac{3x^2y + y^3 - y}{x^3 + 3xy^2 - x} \overset{y=\varphi(x,z)}{=} -\frac{3x^2\varphi(x,z) + \varphi(x,z)^3 - \varphi(x,z)}{x^3 + 3x\varphi(x,z)^2 - x}$

$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x}(1,-2) \overset{\varphi(1,-2)=-1}{=} -\frac{3 \cdot 1^2 \cdot (-1) + (-1)^3 - (-1)}{1^3 + 3 \cdot 1 \cdot (-1)^2 - 1} = -\frac{-3}{3} = 1$

Даље, имамо да је

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}(x,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,z)\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{3x^2\varphi(x,z) + \varphi(x,z)^3 - \varphi(x,z)}{x^3 + 3x\varphi(x,z)^2 - x}\right) =$$

$$-\frac{\left(3x^2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x,z) + 3\varphi(x,z)^2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x,z) - \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x,z)\right) \cdot \left(x^3 + 3x\varphi(x,z)^2 - x\right) - \left(3x^2\varphi(x,z) + \varphi(x,z)^3 - \varphi(x,z)\right) \cdot 3x \cdot 2\varphi(x,z) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x,z)}{\left(x^3 + 3x\varphi(x,z)^2 - x\right)^2}$$

Видимо да нам је неопходна и вредност $\frac{\partial y}{\partial z}(1,-2)$, па тако је израчунајмо.

$$\frac{\partial y}{\partial z}(x,z) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)} = -\frac{2z+2}{x^3+3xy^2-x} \overset{y=\varphi(x,z)}{=} -\frac{2z+2}{x^3+3x\varphi(x,z)^2-x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial y}{\partial z}(1,-2) \overset{\varphi(1,-2)=-1}{=} -\frac{2\cdot(-2)+2}{1^3+3\cdot 1\cdot(-1)^2-1} = -\frac{-2}{3} = \frac{2}{3}$$

Сада се вратимо на $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}(x,z)$ и убрзо имамо $x=1, z=-2, \varphi(1,-2)=-1$ и $\frac{\partial y}{\partial z}(1,-2)=\frac{2}{3}$:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}(1,-2) = -\frac{\left(3\cdot 1^2\cdot\frac{2}{3}+3\cdot(-1)^2\cdot\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\right)\cdot(1^3+3\cdot1\cdot(-1)^2-1)-(3\cdot1^2\cdot(-1)+(-1)^3-(-1))\cdot3\cdot1\cdot2\cdot(-1)\cdot\frac{2}{3}}{(1^3+3\cdot1\cdot(-1)^2-1)^2} = \frac{2}{9}$$