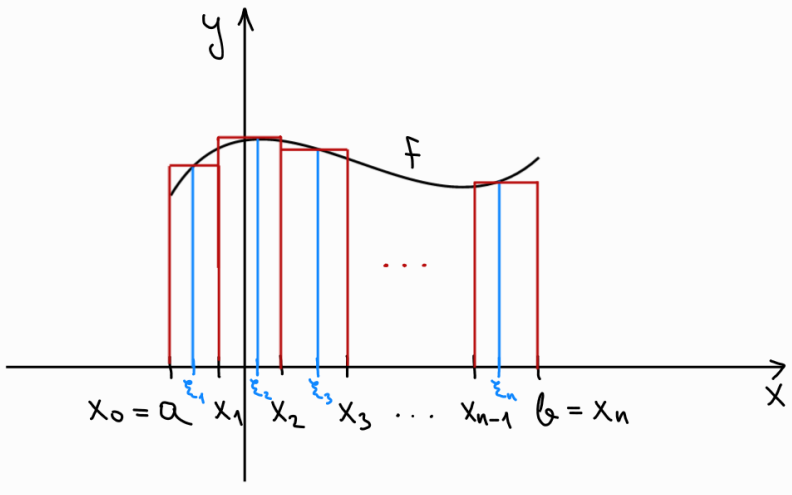
Одређени интеграл

Нека је $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ функција. Било који скуп тачака $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$, где је $n\in\mathbb{N}$ и $a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b$, називамо поделом интервала $[a,b]$, док број $\lambda(P)$ дат као $\lambda(P)=\max\{x_1-x_0,x_2-x_1,\dots,x_n-x_{n-1}\}$ називамо параметром поделе P. Даље, било који скуп $\xi=\{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n\}$ такав да је $\xi_1\in[x_0,x_1]$, $\xi_2\in[x_1,x_2]$, $\dots$, $\xi_n\in[x_{n-1},x_n]$ називамо скупом истакнутих тачака поделе $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ (даље, $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$ су истакнуте тачке).

За дату поделу $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ и скуп истакнутих тачака $\xi=\{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n\}$ израз

$$\sigma(f,P,\xi)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot(x_i-x_{i-1})=f(\xi_1)\cdot(x_1-x_0)+\dots+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1})$$

називамо интегралном сумом фје f за P и ξ.



Дакле, интегрална сума $\sigma(f,\mathcal{P},\xi)$ представља збир површина правоугаоника чије су странице $f(\xi_i)$ и $x_i - x_{i-1}$. Чини се да што је већи број ових правоугаоника и самим тим што су они ужи, то ће збир њихових површина све мање одступати од површине фигуре која је ограничена графиком функције f одозго, x-осом одоздо и вертикалама $x = a$ и $x = b$ са стране (ову површину често краће називамо површином испод графика функције f на интервалу $[a,b]$). И заиста, функције за које ово важи зваћемо Риман-интеграбилним (или само − интеграбилним) функцијама на интервалу $[a,b]$ и скуп свих таквих функција означавамо са $\mathcal{R}[a,b]$. Формално, уколико постоји коначан лимес $\lim\limits_{\lambda(\mathcal{P})\to 0}\sigma(f,\mathcal{P},\xi) = I \in \mathbb{R}$, што значи да за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ такво да за све поделе $\mathcal{P}$ овог интервала за које је $\lambda(\mathcal{P}) < \delta$ и све одабире истакнутих тачака ξ важи $|\sigma(f,\mathcal{P},\xi) - I| < \varepsilon$, кажемо да је функција f Риман-интеграбилна на интервалу $[a,b]$ и да је њен одређени интеграл на овом интервалу једнак броју I, што записујемо као $\int\limits_a^b f(x)dx = I$. Наравно, код одређеног интеграла није важно како смо означили променљиву у подинтегралној функцији, јер је његова вредност број, а не функција, па исто тако можемо писати и $\int\limits_a^b f(t)dt = I = \int\limits_a^b f(y)dy$ итд.

Са предавања знамо да су непрекидне функције и функције са коначно или пребројиво много тачака прекида (а самим тим и монотоне функције) интеграбилне и најчешће ћемо са таквим функцијама и радити.

Навешћемо сада неколико важних теорема које ћемо користити у задацима.

Теорема: Нека су f и g две Риман-интеграбилне функције на интервалу $[a,b]$ и $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Тада је и функција $\alpha f + \beta g$ Риман-интеграбилна на $[a,b]$ и важи

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx.$$

Теорема: Нека је функција f Риман-интеграбилна на сваком затвореном интервалу скупа $\mathbb{R}$. Тада за свака три броја $a,b,c \in \mathbb{R}$ важи

$$\int_a^a f(x)dx = 0,\ \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \ \text{ и } \ \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Теорема: Нека су $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ Риман-интеграбилне функције такве да је $g(x) \leqslant f(x)$ за све $x \in [a,b]$. Тада је $\int\limits_a^b g(x)dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)dx$. Специјално, уколико је функција f ненегативна на интервалу $[a,b]$, важи $\int\limits_a^b f(x)dx \geqslant 0$.

Следећа теорема представља јачу верзију претходне уз додатну претпоставку о непрекидности подинтегралне функције.

Теорема: Нека је $f:[a,b]\to[0,+\infty)$ непрекидна функција која није идентички једнака нули. Тада је $\int\limits_a^b f(x)dx > 0$. Другим речима, ако је непрекидна функција $f:[a,b]\to[0,+\infty)$ таква да је $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$, тада је она идентички једнака нули.

Теорема [основна интегрална неједнакост]: Нека је $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ Риман-интеграбилна функција. Тада важи $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|dx$.

Теорема: Нека је $E \subseteq [a,b]$ коначан или пребројив скуп и нека су $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Риман-интеграбилне функције такве да је $f(x) = g(x)$ за све $x \in [a,b] \backslash E$. Тада је $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

Коментар: Тврђење важи и у општијем случају, ако је скуп E Лебегове мере нула.

Најважнија теорема везана за интеграле је Њутн–Лајбницова формула која говори о вези одређеног и неодређеног интеграла. Иако проблеми одређивања примитивне функције и површине испод графика дате функције на први поглед нису повезани, ова теорема показује да ипак јесу и оправдава назив *одређени интеграл*.

Теорема [Њутн–Лајбниц]: Нека су функције $f, F : [a,b] \to \mathbb{R}$ такве да је F примитивна од f. Тада је

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Коментар: За произвољну функцију φ и тачке a и b из њеног домена користимо ознаку $\varphi(x)\big|_a^b$ за разлику вредности ове функције у те две тачке $\varphi(b) - \varphi(a)$.

Помоћу Њутн-Лајбницове формуле можемо многе одређене интеграле решавати тако што решимо прво одговарајући неодређени интеграл (тј. нађемо неку примитивну функцију) и потом уврстимо горњу и доњу границу у добијену функцију. Међутим, не може се сваки одређени интеграл израчунати на овај начин.

Пример: Имамо да је

$$\int_1^3 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{27-1}{3} = \frac{26}{3} \quad \text{и} \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x\big|_0^1 = \operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Овде смо одабрали функције $\frac{x^3}{3}$ односно $\operatorname{arctg} x$ као најједноставније примитивне функције ових подинтегралних функција. Међутим, и да смо одабрали неке друге примитивне функције, на пример, $\frac{x^3}{3} + 5$ и $\operatorname{arctg} x - 2$, наравно да бисмо добили исте резулате, јер би се те константе приликом одузимања скратиле.

Теорема [парцијална интеграција]: Нека су функције $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрекидно-диференцијабилне (тј. изводи u' и v' су им непрекидне функције што краће пишемо као $u, v \in C^1[a,b]$). Тада важи

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

или краће записано

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Теорема [о смени променљиве]: Нека је $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрекидна и $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ непрекидно-диференцијабилна функција таква да је $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$. Тада је

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{pmatrix} x = \varphi(t), \quad \varphi(\alpha) = a, \ \varphi(\beta) = b \\ dx = \varphi'(t)dt \end{pmatrix} = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Такође, ово тврђење важи и уколико је функција f Риман-интеграбилна на $[a,b]$, а φ строго монотона на $[\alpha, \beta]$ (што се лако испитује преко знака извода $\varphi'(t)$).

Као код неодређених интеграла, и овде смену у интегралу $\int_a^b f(x)dx$, где је f непрекидна функција, можемо

увести у облику $t = \psi(x)$, где је $\psi : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ непрекидно-диференцијабилна функција таква да је $\psi(a) = \alpha$ и $\psi(b) = \beta$, а то се може учинити и под слабијим условима – уколико је f Риман-интеграбилна, а ψ строго монотона функција.

У формулацији теореме о смени промењљиве врло је важно да како се полазна промењљива x креће у интервалу $[a, b]$, тако и нова промењљива t се мора кретати у неком интервалу $[\alpha, \beta]$. Другим речима, не сме се десити случај $\alpha = \beta$, па да доња и горња граница буду исти број.

Пример: Знамо да је

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = -(-1) + 1 = 2.$$

Али, ако бисмо покушали да уведемо смену $t = \sin x$, што не би било оправдано, јер је $\sin 0 = \sin\pi = 0$ (уосталом ни dx не би могло најједноставније да се изрази преко dt), добили бисмо интеграл чија су и доња и горња граница једнаке 0 и зато би и његова вредност била једнака 0. То није тачно, јер смо малопре израчунали да је та вредност једнака 2.

Одрадићемо сада пар задатака како бисмо илустровали наведене теореме и својства одређених интеграла.

1. Израчунати интеграл $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{9x^2+1}$.

Решење: Имамо да је

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{9x^2+1} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{(3x)^2+1} = \begin{pmatrix} t = 3x, & x = 0 \Rightarrow t = 0,\ x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow t = \sqrt{3} \\ & dt = 3dx \Rightarrow dx = \frac{1}{3}dt \end{pmatrix} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\frac{1}{3}dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{3}\text{arctg}t\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\left(\text{arctg}\sqrt{3} - \text{arctg}0\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{3} - 0\right) = \frac{\pi}{9}.$$

Подинтегрална функција је непрекидна, а функција $3x$ којом смо увели смену је глатка, јер је њен извод $(3x)' = 3$ непрекидна функција као елементарна и нове границе интеграла 0 и $\sqrt{3}$ су међусобно различите, те смо оправдано увели ову смену у одређени интеграл. Убудуће ове услове нећемо детаљно записивати, већ ћемо их усмено проверавати и увести смену уколико су испуњени.

2. Израчунати $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}dx$.

Решење: Имамо да је

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx = \int_0^2 \sqrt{4\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)}dx = 2\int_0^2 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}dx = \begin{pmatrix} t = \frac{x}{2}, & x = 0 \Rightarrow t = 0,\ x = 2 \Rightarrow t = 1 \\ & dt = \frac{1}{2}dx \Rightarrow dx = 2dt \end{pmatrix} =$$

$$2\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\cdot 2dt = 4\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt = \begin{pmatrix} t = \sin u,\ u = 0 \Rightarrow t = 0,\ u = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \\ dt = \cos u du \end{pmatrix} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 u}\cdot\cos u du =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 u}\cdot\cos u du = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos u|\cdot\cos u du = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u\cdot\cos u du = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2u}{2}du =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2u)du = 2\left(u + \frac{\sin 2u}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2} - \left(0 + \frac{\sin 0}{2}\right)\right) = 2\left(\frac{\pi}{2} + 0 - 0\right) = \pi.$$

Овде је важно напоменути да када смо се сусрели са изразом $|\cos u|$ у подинтегралној функцији, препознали смо да је $\cos u \geqslant 0$, јер $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и зато смо могли да кажемо да је $|\cos u| = \cos u$. За разлику од неодређених интеграла када смо без умањења општости претпостављали да радимо на одговарајућем интервалу на коме се једноставно можемо ослободити апсолутне вредности, код одређених интеграла већ имамо задат интервал на коме радимо и на основу њега видимо како ћемо се ослободити апсолутне вредности. У складу са тим решићемо и наредна два задатка.

3. Израчунати $\int_{-2}^{5} |x|dx$.

Решење: Како рачунамо интеграл на интервалу $[-2, 5]$, а знамо да је

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geqslant 0, \end{cases}$$

поделићемо полазни интервал интеграције $[-2, 5]$ на два интервала $[-2, 0]$ и $[0, 5]$. Зато је

$$\int_{-2}^{5} |x|dx = \int_{-2}^{0} |x|dx + \int_{0}^{5} |x|dx = \int_{-2}^{0} -xdx + \int_{0}^{5} xdx = -\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{5} = -\left(0 - \frac{4}{2}\right) + \frac{25}{2} - 0 = \frac{4}{2} + \frac{25}{2} = \frac{29}{2}.$$

4. Израчунати $\int_{0}^{2\pi} |\cos x|dx$.

Решење: Како је функција $\cos x$ ненегативна на интервалима $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, а непозитивна на интервалу $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, имамо

$$\int_{0}^{2\pi} |\cos x|dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |\cos x|dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x|dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} |\cos x|dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} -\cos xdx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos xdx =$$

$$\sin x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos xdx + \sin x\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 - \sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + \sin 2\pi - \sin\frac{3\pi}{2} =$$

$$= 1 - 0 - \left(\sin\frac{3\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\right) + 0 - (-1) = 1 - (-1 - 1) + 1 = 4.$$

5. Дата је функција $f : [0, 5] \to \mathbb{R}$ са

$$f(x) = \begin{cases} x\ln(1 + x^2), & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 4x, & 1 < x \leqslant 5. \end{cases}$$

Израчунати $\int_{0}^{5} f(x)dx$.

Решење: Имамо да је

$$\int_{0}^{5} f(x)dx = \underbrace{\int_{0}^{1} x\ln(1 + x^2)dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{1}^{5} 4xdx}_{I_2}.$$

Прво рачунамо

$$I_1 = \begin{pmatrix} u = \ln(1 + x^2) & dv = xdx \\ du = \frac{2x}{1+x^2}dx & v = \frac{x^2}{2} \end{pmatrix} = \frac{x^2}{2}\ln(1 + x^2)\Big|_{0}^{1} - \int_{0}^{1} \frac{x^2}{2} \cdot \frac{2x}{1 + x^2}dx = \frac{\ln 2}{2} - 0 - \int_{0}^{1} \frac{x^3}{x^2 + 1}dx =$$

$$= \frac{\ln 2}{2} - \int_0^1 \left(x - \frac{x}{x^2+1}\right) dx = \frac{\ln 2}{2} - \int_0^1 x dx + \int_0^1 \frac{x dx}{x^2+1} = \frac{\ln 2}{2} - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{\ln 2}{2} - \left(\frac{1}{2} - 0\right) + \int_0^1 \frac{x dx}{x^2+1} = \begin{pmatrix} t = x^2+1, & x = 0 \Rightarrow t = 1,\ x = 1 \Rightarrow t = 2 \\ dt = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{1}{2} dt \end{pmatrix} = \frac{\ln 2 - 1}{2} + \int_1^2 \frac{\frac{1}{2} dt}{t} =$$

$$= \frac{\ln 2 - 1}{2} + \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{dt}{t} = \frac{\ln 2 - 1}{2} + \frac{1}{2} \ln |t| \Big|_1^2 = \frac{\ln 2 - 1}{2} + \frac{1}{2}(\ln |2| - \ln |1|) = \frac{\ln 2 - 1}{2} + \frac{\ln 2}{2} = \ln 2 - \frac{1}{2},$$

а затим је

$$I_2 = 4 \int_1^5 x dx = 4 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_1^5 = 2 \cdot (25 - 1) = 48.$$

Коначно, имамо да је

$$\int_0^5 f(x) dx = I_1 + I_2 = \ln 2 - \frac{1}{2} + 48 = \ln 2 + \frac{95}{2}.$$

6. Израчунати $\int_{\frac{1}{2}}^{10} [x] dx$, где је са $[x]$ означен цео део реалног броја x.

Решење: Поделимо интервал интеграције $\left[\frac{1}{2}, 10\right]$ на интервале $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$, ..., $[9, 10]$ који су погоднији за функцију цео део. На овим интервалима функција $[x]$ редом узима вредности $0, 1, 2, ..., 9$ па, имамо

$$\int_{\frac{1}{2}}^{10} [x] dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} [x] dx + \int_1^2 [x] dx + \int_2^3 [x] dx + \int_3^4 [x] dx + \cdots + \int_9^{10} [x] dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} 0 dx + \int_1^2 1 dx + \int_2^3 2 dx + \int_3^4 3 dx + \cdots + \int_9^{10} 9 dx =$$

$$= 0 \cdot \int_{\frac{1}{2}}^{1} dx + \int_1^2 dx + 2 \int_2^3 dx + 3 \int_3^4 dx + \cdots + 9 \int_9^{10} dx = x\Big|_1^2 + 2x\Big|_2^3 + 3x\Big|_3^4 + \cdots + 9x\Big|_9^{10} =$$

$$= 2 - 1 + 2 \cdot (3 - 2) + 3 \cdot (4 - 3) + \cdots + 9 \cdot (10 - 9) = 1 + 2 + 3 + \cdots + 9 = \frac{9 \cdot (9 + 1)}{2} = 45.$$

Напоменимо да, на пример, на интервалу $[4, 5]$ функција $[x]$ није идентички једнака 4 пошто је $[5] = 5$. Међутим, она се само у једној тачки (тачки 5) разликује од константне функције која је једнака 4, па је зато $\int_4^5 [x] dx = \int_4^5 4 dx$ на основу једне од ранијих теорема. То важи и за остале интервале на које смо поделили почетни интервал.

Навешћемо сада неколико корисних тврђења са предавања, а тичу се парних, непарних и периодичних функција.

Теорема: Нека је $a > 0$ реалан број и функција $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ Риман-интеграбилна и парна тј. важи $f(-x) = f(x)$ за све $x \in [-a, a]$. Тада је $\int_{-a}^{a} f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

Теорема: Нека је $a > 0$ реалан број и функција $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ Риман-интеграбилна и непарна тј. важи $f(-x) = -f(x)$ за све $x \in [-a, a]$. Тада је $\int_{-a}^{a} f(x) dx = 0$.

Теорема: Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрекидна и периодична функција са периодом $T > 0$. Тада за свако $a \in \mathbb{R}$ важи $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$.

Ова теорема говори да ако рачунамо интеграл функције f на било ком интервалу дужине T, увек ћемо добити исту вредност независно од интервала. У таквим ситуацијама се најчешће пребацујемо на основни интервал $[0, T]$, а некад и на интервал $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ уколико је функција парна или непарна.

Пример: Знамо да је

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos 0) = -(1-1) = 0,$$

али то можемо да утврдимо и на следећи начин: функција $\sin x$ је 2π-периодична, па је њен интеграл на $[0, 2\pi]$ једнак њеном интегралу на $[-\pi, \pi]$, јер су оба дужине 2π. Дакле, важи

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx.$$

Међутим, функција $\sin x$ је и непарна, па је њен интеграл на симетричном интервалу $[-\pi, \pi]$ једнак нули и зато је

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = 0.$$

Помоћу претходне теореме извешћемо још два корисна тврђења везана за интеграле периодичних функција.

Теорема: Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрекидна и периодична функција са периодом $T > 0$. Тада за све $a, b \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$ важи:

1) $\int_a^{a+nT} f(x)dx = n\int_0^T f(x)dx,$

2) $\int_{a+nT}^{b+nT} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$

Доказ: 1) Поделићемо интервал $[a, a+nT]$ на интервале $[a, a+T],\ [a+T, a+2T],\ \ldots,\ [a+(n-1)T, a+nT]$ и пошто је сваки од њих дужине T, интеграл функције f по сваком је једнак њеном интегралу по $[0, T]$. Зато је

$$\int_a^{a+nT} f(x)dx = \int_a^{a+T} f(x)dx + \int_{a+T}^{a+2T} f(x)dx + \cdots + \int_{a+(n-1)T}^{a+nT} f(x)dx =$$

$$= \int_0^T f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \cdots + \int_0^T f(x)dx = n\int_0^T f(x)dx.$$

Дакле, вредност интеграла функције f на интервалу чија је дужина једнака n периода од f је n пута већа од вредности интеграла те функције на интервалу дужине једног периода.

2) Користећи да је $f(s + nT) = f(s)$ пошто је T период функције f имамо

$$\int_{a+nT}^{b+nT} f(x)dx = \begin{pmatrix} s = x - nT, & x = a + nT \Rightarrow s = a,\ x = b + nT \Rightarrow s = b \\ & ds = dx \end{pmatrix} = \int_a^b f(s + nT)ds =$$

$$= \int_a^b f(s)ds = \int_a^b f(x)dx.$$

Дакле, вредност интеграла периодичне функције се не мења ако се интервал по коме се интеграл рачуна транслира за nT, где је n произвољан природан број.

Пре него што пређемо на задатке, навешћемо још неколико једноставних тврђења о збиру и производу парних и непарних функција која немају директне везе са интегралима, али ће нам ипак бити корисна у наредним задацима и нека од њих ћемо доказати ради илустрације.

Теорема:

1) Збир две парне функције је парна функција.

2) Збир две непарне функције је непарна функција.

3) Производ две парне функције је парна функција.

4) Производ две непарне функције је парна функција.

5) Производ једне парне и једне непарне функције је непарна функција.

Доказ: 2) Нека су f и g две непарне функције. Тада је

$$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) + (-g(x)) = -(f(x) + g(x)) = -(f+g)(x)$$

за свако x, па је $f+g$ заиста непарна функција.
5) Нека је функција f парна, а функција g непарна. Тада је

$$(f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot (-g(x)) = -\left(f(x) \cdot g(x)\right) = -(f \cdot g)(x),$$

па је функција $f \cdot g$ непарна.

Када је реч о збиру или производу више од две (не)парне функције, узастопном применом претходног тврђења можемо извести закључак о (не)парности одговарајуће функције. Зато су збир и производ коначно много парних функција опет парне функције, док је збир коначно много непарних функција опет непарна функција. Производ непарног броја непарних функција је непарна функција, а производ парног броја непарних функција је парна функција.

Пример: Израчунајмо интеграл $\int_{-10}^{10} (5\sin x + x^3 e^{x^2} + \operatorname{arctg}(\sqrt[3]{x}))dx.$

Ако са f означимо подинтегралну функцију, лако видимо да је она непарна, јер за свако $x \in [-10, 10]$ важи

$$f(-x) = 5\sin(-x) + (-x)^3 e^{(-x)^2} + \operatorname{arctg}(\sqrt[3]{-x}) = 5 \cdot (-\sin x) + (-x^3) \cdot e^{x^2} + \operatorname{arctg}(-\sqrt[3]{x}) =$$

$$= -5\sin x - x^3 e^{x^2} - \operatorname{arctg}(\sqrt[3]{x}) = -(5\sin x + x^3 e^{x^2} + \operatorname{arctg}(\sqrt[3]{x})) = -f(x).$$

Одатле једноставно следи да је $\int_{-10}^{10} f(x)dx = 0$, док би знатно тежи посао био израчунати примитивну функцију функције f. Зато је важно уочавати специјална својства подинтегралне функције тј. њену парност, непарност и/или периодичност како би се што једноставније могао израчунати њен интеграл (наравно, уз претпоставку да се ради на симетричном интервалу).

7. Израчунати $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x + x + 3}{1 + |x|} dx.$

Решење: Функције $\frac{\sin x}{1+|x|}$ и $\frac{x}{1+|x|}$ су непарне, а функција $\frac{3}{1+|x|}$ парна, јер је

$$\frac{\sin(-x)}{1+|-x|}=\frac{-\sin x}{1+|x|}=-\frac{\sin x}{1+|x|},\quad \frac{-x}{1+|-x|}=-\frac{x}{1+|x|}\quad \text{и}\quad \frac{3}{1+|-x|}=\frac{3}{1+|x|}\quad \text{за све}\quad x\in\mathbb{R}.$$

Зато је

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin x+x+3}{1+|x|}dx=\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin x}{1+|x|}dx}_{0}+\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x}{1+|x|}dx}_{0}+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{3}{1+|x|}dx=2\int_{0}^{\pi}\frac{3}{1+|x|}dx=6\int_{0}^{\pi}\frac{dx}{1+x}=$$

$$=\begin{pmatrix}t=1+x,\quad x=0\Rightarrow t=1,\ x=\pi\Rightarrow t=1+\pi\\ dt=dx\end{pmatrix}=6\int_{1}^{1+\pi}\frac{dt}{t}=6\ln|t|\,\Big|_{1}^{1+\pi}=6\ln|1+\pi|-6\ln|1|=6\ln(1+\pi).$$

8. Израчунати $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x+\sin 4x\cos 3x+\cos x}{|\sin x|+\cos^2 x}dx.$

Решење: Приметимо да су функције $\frac{x}{|\sin x|+\cos^2 x}$ и $\frac{\sin 4x\cos 3x}{|\sin x|+\cos^2 x}$ непарне, а функција $\frac{\cos x}{|\sin x|+\cos^2 x}$ парна пошто важи

$$\frac{-x}{|\sin(-x)|+(\cos(-x))^2}=-\frac{x}{|-\sin x|+(\cos x)^2}=-\frac{x}{|\sin x|+\cos^2 x},\quad \frac{\sin(-4x)\cos(-3x)}{|\sin(-x)|+(\cos(-x))^2}=$$

$$=\frac{-\sin 4x\cos 3x}{|-\sin x|+(\cos x)^2}=-\frac{\sin 4x\cos 3x}{|\sin x|+\cos^2 x}\quad \text{и}\quad \frac{\cos(-x)}{|\sin(-x)|+(\cos(-x))^2}=\frac{\cos x}{|-\sin x|+(\cos x)^2}=\frac{\cos x}{|\sin x|+\cos^2 x}.$$

Зато је

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x+\sin 4x\cos 3x+\cos x}{|\sin x|+\cos^2 x}dx=\underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{|\sin x|+\cos^2 x}dx}_{0}+\underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 4x\cos 3x}{|\sin x|+\cos^2 x}dx}_{0}+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{|\sin x|+\cos^2 x}dx=$$

$$=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{|\sin x|+\cos^2 x}dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x dx}{\sin x+\cos^2 x}.$$

Приметимо да смо под интегралом добили рационалну функцију по $\sin x$ и $\cos x$ која је непарна по $\cos x$, па ћемо увести смену $t=\sin x$. Имамо да је

$$2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x dx}{\sin x+\cos^2 x}=\begin{pmatrix}t=\sin x,\quad x=0\Rightarrow t=0,\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1\\ dt=\cos x dx,\ \cos^2 x=1-t^2\end{pmatrix}=2\int_{0}^{1}\frac{dt}{t+1-t^2}=2\int_{0}^{1}\frac{dt}{-(t^2-t-1)}=$$

$$=-2\int_{0}^{1}\frac{dt}{t^2-t-1}=-2\int_{0}^{1}\frac{dt}{t^2-2\cdot t\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{5}{4}}=-2\int_{0}^{1}\frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}=$$

$$=\begin{pmatrix}s=t-\frac{1}{2},\quad t=0\Rightarrow s=-\frac{1}{2},\ t=1\Rightarrow s=\frac{1}{2}\\ ds=dt\end{pmatrix}=-2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\underbrace{\frac{ds}{s^2-\frac{5}{4}}}_{\text{парна}}=-4\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{ds}{s^2-\frac{5}{4}}=-4\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{ds}{s^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}=$$

$$=-4\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}}\ln\left|\frac{s-\frac{\sqrt{5}}{2}}{s+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right|\Bigg|_{0}^{\frac{1}{2}}=-\frac{4}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right|+\frac{4}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{0-\frac{\sqrt{5}}{2}}{0+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right|=-\frac{4}{\sqrt{5}}\ln\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}+\frac{4}{\sqrt{5}}\ln 1=-\frac{4}{\sqrt{5}}\ln\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}.$$

9. Израчунати $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x \ln \frac{1+x}{1-x} dx.$

Решење: За функцију $\cos x$ одмах знамо да је парна, а онда видимо да је

$$\ln \frac{1+(-x)}{1-(-x)} = \ln \frac{1-x}{1+x} = \ln(1-x) - \ln(1+x) = -(\ln(1+x) - \ln(1-x)) = -\ln \frac{1+x}{1-x},$$

па је функција $\ln \frac{1+x}{1-x}$ непарна. Зато је подинтегрална функција, као производ једне парне и једне непарне функције, непарна па је тражени интеграл једнак 0.

10. Израчунати $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \ln(x^2+1) + \cos^3 x}{4|\sin x| + \cos^2 x - 5} dx.$

Решење: Пошто је

$$\frac{-x \ln((-x)^2+1)}{4|\sin(-x)| + (\cos(-x))^2 - 5} = \frac{-x \ln(x^2+1)}{4|-\sin x| + (\cos x)^2 - 5} = -\frac{x \ln(x^2+1)}{4|\sin x| + \cos^2 x - 5} \quad \text{и}$$

$$\frac{(\cos(-x))^3}{4|\sin(-x)| + (\cos(-x))^2 - 5} = \frac{(\cos x)^3}{4|-\sin x| + (\cos x)^2 - 5} = \frac{\cos^3 x}{4|\sin x| + \cos^2 x - 5},$$

то је

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \ln(x^2+1) + \cos^3 x}{4|\sin x| + \cos^2 x - 5} dx = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{x \ln(x^2+1)}{4|\sin x| + \cos^2 x - 5}}_{\text{непарна}} dx + \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{\cos^3 x}{4|\sin x| + \cos^2 x - 5}}_{\text{парна}} dx =$$

$$= 0 + 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{4|\sin x| + \cos^2 x - 5} dx = 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{4\sin x + \cos^2 x - 5} dx.$$

Добијена подинтегрална функција је рационална по $\sin x$ и $\cos x$ и непарна по $\cos x$, па уводимо смену $t = \sin x$ и добијамо

$$2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{4\sin x + \cos^2 x - 5} dx = 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x \cdot \cos x dx}{4\sin x + \cos^2 x - 5} = \begin{pmatrix} t = \sin x, & x = 0 \Rightarrow t = 0,\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \\ dt = \cos x dx,\ \cos^2 x = 1 - t^2 \end{pmatrix} =$$

$$= 2\int\limits_{0}^{1} \frac{1-t^2}{4t+1-t^2-5} dt = 2\int\limits_{0}^{1} \frac{1-t^2}{-t^2+4t-4} dt = 2\int\limits_{0}^{1} \frac{t^2-1}{t^2-4t+4} dt = 2\int\limits_{0}^{1} \left(1 + \frac{4t-5}{t^2-4t+4}\right) dt = 2\int\limits_{0}^{1} dt +$$

$$+2\int\limits_{0}^{1} \frac{4t-5}{(t-2)^2} dt = 2t\Big|_0^1 + 2\int\limits_{0}^{1} \frac{4t-5}{(t-2)^2} dt = 2 + 2\int\limits_{0}^{1} \frac{4t-5}{(t-2)^2} dt = \begin{pmatrix} s = t-2 \Rightarrow t = s+2 \\ ds = dt \end{pmatrix} =$$

$$= 2 + 2\int\limits_{-2}^{-1} \frac{4(s+2)-5}{s^2} ds = 2 + 2\int\limits_{-2}^{-1} \frac{4s+3}{s^2} ds = 2 + 8\int\limits_{-2}^{-1} \frac{ds}{s} + 6\int\limits_{-2}^{-1} \frac{ds}{s^2} = 2 + 8\ln|s|\,\Big|_{-2}^{-1} - \frac{6}{s}\Big|_{-2}^{-1} =$$

$$= 2 + 8(\ln|-1| - \ln|-2|) - 6\left(\frac{1}{-1} - \frac{1}{-2}\right) = 2 - 8\ln 2 - 6 \cdot \frac{-1}{2} = 5 - 8\ln 2.$$

11. Израчунати $\int\limits_{0}^{30\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\ dx.$

Решење: Лако видимо да је

$$\int_0^{30\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\, dx = \int_0^{30\pi} \sqrt{1-(\cos^2 x - \sin^2 x)}\, dx = \int_0^{30\pi} \sqrt{(1-\cos^2 x)+\sin^2 x}\, dx =$$

$$= \int_0^{30\pi} \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 x}\, dx = \int_0^{30\pi} \sqrt{2\sin^2 x}\, dx = \sqrt{2}\int_0^{30\pi} \sqrt{\sin^2 x}\, dx = \sqrt{2}\int_0^{30\pi} |\sin x| dx.$$

Један начин како можемо завршити задатак је да у складу са знаком функције $\sin x$ поделимо интервал $[0, 30\pi]$ на $[0,\pi],\ [\pi, 2\pi], ...,\ [29\pi, 30\pi]$, међутим, ипак можемо и краће.
Подинтегрална функција $f(x) = |\sin x|$ је свакако 2π-периодична (јер је синусна функција 2π-периодична), а због апсолутне вредности можемо посумњати да она има и неки мањи период. И заиста, за свако $x \in \mathbb{R}$ важи

$$f(x+\pi) = |\sin(x+\pi)| = |\sin x\cos\pi + \cos x \sin\pi| = |\sin x\cdot(-1) + \cos x\cdot 0| = |-\sin x| = |\sin x| = f(x),$$

па је функција f π-периодична. Зато можемо поједноставити поступак рачунања датог интеграла тако што искористимо раније наведена тврђења везана за интеграле периодичних функција, те имамо да је

$$\sqrt{2}\int_0^{30\pi} |\sin x| dx = \sqrt{2}\int_0^{0+30\cdot\pi} |\sin x| = 30\sqrt{2}\int_0^{\pi} |\sin x| dx = 30\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sin x dx = 30\sqrt{2}\cdot(-\cos x)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= 30\sqrt{2}(-\cos\pi - (-\cos 0)) = 30\sqrt{2}(-(-1)+1) = 60\sqrt{2}.$$

12. Израчунати $\displaystyle\int_0^{2025\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{|\sin x| + |\cos x|}$.

Решење: Размишљајући слично као у претходном задатку – било би добро уколико бисмо испитали периодичност подинтегралне функције и помоћу тога поједноставили почетни интеграл тако што се ослободимо апсолутних вредности. Чини се да је подинтегрална функција $f(x) = \frac{1}{|\sin x| + |\cos x|}$ свакако 2π-периодична (због синусне и косинусне функције), а могуће и π-периодична, јер смо видели у претходном задатку како апсолутна вредност може синусној и косинусној функцији преполовити период. Међутим, ако одемо корак даље и покушамо са периодом $\frac{\pi}{2}$ (што нам је на неки начин сугерисано бројем у горњој граници интеграла), добићемо

$$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)| + |\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)|} = \frac{1}{\left|\sin x\cos\frac{\pi}{2} + \cos x\sin\frac{\pi}{2}\right| + \left|\cos x\cos\frac{\pi}{2} - \sin x\sin\frac{\pi}{2}\right|} =$$

$$= \frac{1}{|\sin x\cdot 0 + \cos x\cdot 1| + |\cos x\cdot 0 - \sin x\cdot 1|} = \frac{1}{|\cos x| + |-\sin x|} = \frac{1}{|\cos x| + |\sin x|} = f(x).$$

Значи, функција f стварно јесте $\frac{\pi}{2}$-периодична и зато са почетног интервала интеграције $\left[0, 2025\frac{\pi}{2}\right]$ можемо прећи на интервал $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ на коме нам апсолутне вредности нису потребне, јер су обе функције $\sin x$ и $\cos x$ ненегативне на њему. Другим речима,

$$\int_0^{2025\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{|\sin x| + |\cos x|} = 2025\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{|\sin x| + |\cos x|} = 2025\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x + \cos x}.$$

Дошли смо до рационалне функције по $\sin x$ и $\cos x$ која нема ниједно од својстава парности односно непарности, па уводимо смену $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Тада је $\sin x = \frac{2t}{t^2+1}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1}$, $dx = \frac{2dt}{t^2+1}$, а границе новог интеграла су $\operatorname{tg}\frac{0}{2} = 0$ и $\operatorname{tg}\frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, па је

$$2025\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x + \cos x} = 2025\int_0^1 \frac{\frac{2dt}{t^2+1}}{\frac{2t}{t^2+1} + \frac{1-t^2}{t^2+1}} = 2025\int_0^1 \frac{\frac{2dt}{t^2+1}}{\frac{2t+1-t^2}{t^2+1}} = 2025\int_0^1 \frac{2dt}{-t^2+2t+1} = -4050\int_0^1 \frac{dt}{t^2-2t-1} =$$

$$= -4050\int_0^1 \frac{dt}{t^2-2t+1-2} = -4050\int_0^1 \frac{dt}{(t-1)^2-2} = \begin{pmatrix} s=t-1 \\ ds=dt \end{pmatrix} = -4050\int_{-1}^0 \frac{ds}{s^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} =$$

$$= -4050\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{s-\sqrt{2}}{s+\sqrt{2}}\right|\Bigg|_{-1}^0 = -\frac{2025}{\sqrt{2}}\left(\ln\left|\frac{0-\sqrt{2}}{0+\sqrt{2}}\right| - \ln\left|\frac{-1-\sqrt{2}}{-1+\sqrt{2}}\right|\right) = -\frac{2025}{\sqrt{2}}\left(\ln 1 - \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) =$$

$$\frac{2025}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{2025}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}\right) = \frac{2025}{\sqrt{2}}\ln\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1} = \frac{2025}{\sqrt{2}}\cdot 2\ln(\sqrt{2}+1) = 2025\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1).$$

13. Израчунати $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{4}} \frac{|\sin 2x|}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx.$

Решење: Иако бисмо полазни интервал $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{4}\right]$ могли да поделимо на више интервала и тако се ослободимо апсолутне вредности, покушаћемо да скратимо поступак и пронаћемо неки период подинтегралне функције $f(x)=\frac{|\sin 2x|}{\cos^4 x+\sin^4 x}$. Није тешко доказати да је она периодична и са периодом 2π и са периодом π, па ћемо испитати да ли је и $\frac{\pi}{2}$-периодична. Користећи једноставне адиционе формуле $\sin(\alpha+\pi)=-\sin\alpha,\ \sin(\alpha+\frac{\pi}{2})=\cos\alpha,\ \cos(\alpha+\frac{\pi}{2})=-\sin\alpha$ имамо да је

$$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{|\sin 2(x+\frac{\pi}{2})|}{\cos^4(x+\frac{\pi}{2})+\sin^4(x+\frac{\pi}{2})} = \frac{|\sin(2x+\pi)|}{(-\sin x)^4+(\cos x)^4} = \frac{|-\sin 2x|}{\sin^4 x+\cos^4 x} = \frac{|\sin 2x|}{\cos^4 x+\sin^4 x} = f(x),$$

па је f заиста $\frac{\pi}{2}$-периодична. Зато ћемо интервал $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{4}\right]$ поделити на интервал $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$, који је дужине $4\cdot\frac{\pi}{2}$ тј. дужине четири периода функције f и на интервал $\left[\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{4}\right]$ који можемо транслирати за три периода и приликом интеграције га заменити интервалом $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$. Дакле,

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{4}} \frac{|\sin 2x|}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{|\sin 2x|}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{4}} \frac{|\sin 2x|}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}+4\cdot\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin 2x|}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx +$$

$$+\int_{0+3\cdot\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}+3\cdot\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin 2x|}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin 2x|}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{|\sin 2x|}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx =$$

$$= \underbrace{4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx}_{I_2},$$

јер је функција $\sin 2x$ ненегативна на интервалима $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ и $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$. Остаје још да израчунамо интеграле I_1 и I_2 што није компликовано. Штавише, то смо већ урадили у лекцији *Интеграција рационалних функција по синусу и косинусу*, али као неодређени интеграл, па ћемо сада на исти начин решити и одређене.

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x\cos x dx}{\cos^4 x+\sin^4 x} = \begin{pmatrix} t=\sin x,\ \ x=0\Rightarrow t=0,\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1 \\ dt=\cos x dx,\ \cos^2 x=1-t^2 \end{pmatrix} = \int_0^1 \frac{2tdt}{(1-t^2)^2+t^4} = \int_0^1 \frac{2tdt}{2t^4-2t^2+1} =$$

$$\begin{pmatrix} s=t^2,\ \ t=0\Rightarrow s=0,\ t=1\Rightarrow s=1 \\ ds=2tdt \end{pmatrix} = \int_0^1 \frac{ds}{2s^2-2s+1} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{ds}{s^2-s+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{ds}{\left(s^2-2\cdot s\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{ds}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}} = \begin{pmatrix} u=s-\frac{1}{2} \\ du=ds \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \underbrace{\frac{du}{u^2+\frac{1}{4}}}_{\text{парна}} = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{du}{u^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{2}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\frac{1}{2}}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = 2\operatorname{arctg}(2u)\Big|_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2\text{arctg}1 - 2\text{arctg}0 = 2 \cdot \frac{\pi}{4} - 2 \cdot 0 = \frac{\pi}{2}, \quad \text{и потпуно слично је и}$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin x \cos x dx}{\cos^4 x + \sin^4 x} = \begin{pmatrix} t = \sin x, & x = 0 \Rightarrow t = 0,\ x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ dt = \cos x dx,\ \cos^2 x = 1 - t^2 & \end{pmatrix} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{2tdt}{(1-t^2)^2 + t^4} =$$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{2tdt}{2t^4 - 2t^2 + 1} = \begin{pmatrix} s = t^2, & t = 0 \Rightarrow s = 0,\ t = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow s = \frac{1}{2} \\ ds = 2tdt & \end{pmatrix} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{ds}{2s^2 - 2s + 1} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{ds}{s^2 - s + \frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{ds}{\left(s^2 - 2 \cdot s \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{ds}{\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} = \begin{pmatrix} u = s - \frac{1}{2} \\ du = ds \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{du}{u^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \text{arctg} \frac{u}{\frac{1}{2}} \Big|_{-\frac{1}{2}}^{0} = \text{arctg}(2u) \Big|_{-\frac{1}{2}}^{0} = \text{arctg}0 - \text{arctg}(-1) = 0 - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Зато је коначно

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{4}} \frac{|\sin 2x|}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx = 4I_1 + I_2 = 4 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}.$$

14. Израчунати $\int_{-\frac{\pi}{7}}^{\frac{6\pi}{7}} \frac{\sin^2 x + |\sin 2x|}{|\cos x| + |\sin x|} dx.$

Решење: Вођени идејама из претходних задатака, приметимо да је подинтегрална функција $f(x) = \frac{\sin^2 x + |\sin 2x|}{|\cos x| + |\sin x|}$ π-периодична и парна, јер је

$$f(x + \pi) = \frac{\sin^2(x+\pi) + |\sin 2(x+\pi)|}{|\cos(x+\pi)| + |\sin(x+\pi)|} = \frac{(-\sin x)^2 + |\sin(2x + 2\pi)|}{|-\cos x| + |-\sin x|} = \frac{\sin^2 x + |\sin 2x|}{|\cos x| + |\sin x|} = f(x) \quad \text{и}$$

$$f(-x) = \frac{(\sin(-x))^2 + |\sin(2 \cdot (-x))|}{|\cos(-x)| + |\sin(-x)|} = \frac{(-\sin x)^2 + |\sin(-2x)|}{|\cos x| + |-\sin x|} = \frac{\sin^2 x + |-\sin 2x|}{|\cos x| + |\sin x|} =$$

$$= \frac{\sin^2 x + |\sin 2x|}{|\cos x| + |\sin x|} = f(x).$$

Зато прво интервал $\left[-\frac{\pi}{7}, \frac{6\pi}{7}\right]$ дужине једног периода функције f можемо заменити интервалом $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ исте дужине, а њега потом свести на интервал $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ користећи парност функције f. Дакле,

$$I = \int_{-\frac{\pi}{7}}^{\frac{6\pi}{7}} \frac{\sin^2 x + |\sin 2x|}{|\cos x| + |\sin x|} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x + |\sin 2x|}{|\cos x| + |\sin x|} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x + |\sin 2x|}{|\cos x| + |\sin x|} dx =$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x + \sin 2x}{\cos x + \sin x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x + 2\sin x \cos x}{\cos x + \sin x} dx,$$

при чему претпоследња једнакост важи, јер су функције $\sin x$, $\cos x$ и $\sin 2x$ ненегативне на интервалу $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Сада ћемо мало упростити подинтегралну функцију и додатно поједноставити интеграл који рачунамо на следећи начин:

$$I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x + 2\sin x \cos x}{\cos x + \sin x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin^2 x + \sin x \cos x) + \sin x \cos x}{\cos x + \sin x} dx =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x(\sin x + \cos x)}{\cos x + \sin x} + \frac{\sin x \cos x}{\cos x + \sin x} \right) dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x + \frac{\sin x \cos x}{\cos x + \sin x} \right) dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx +$$

$$+2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{\cos x + \sin x} dx = 2 \cdot (-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{\cos x + \sin x} dx = 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{\cos x + \sin x} dx.$$

Стигли смо до интеграла рационалне функције по $\sin x$ и $\cos x$ која нема ниједно од одговарајућих својстава парности односно непарности, па ћемо увести смену $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Тада је

$$2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{\cos x + \sin x} dx = \begin{pmatrix} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, & x = 0 \Rightarrow t = 0,\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1 \\ \sin x = \frac{2t}{t^2+1},\ \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1},\ dx = \frac{2dt}{t^2+1} & \end{pmatrix} = 2 + 2\int_0^1 \frac{\frac{2t}{t^2+1} \cdot \frac{1-t^2}{t^2+1}}{\frac{1-t^2}{t^2+1} + \frac{2t}{t^2+1}} \cdot \frac{2dt}{t^2+1} =$$

$$= 2 + 2\int_0^1 \frac{\frac{2t(1-t^2)}{(t^2+1)^2}}{\frac{1-t^2+2t}{t^2+1}} \cdot \frac{2dt}{t^2+1} = 2 + 8\int_0^1 \frac{t(1-t^2)}{(t^2+1)^2(-t^2+2t+1)} dt = 2 + 8\int_0^1 \frac{t(t^2-1)}{(t^2+1)^2(t^2-2t-1)} dt.$$

Након што нађемо нуле полинома $t^2 - 2t - 1$ и раставимо га као $(t - 1 + \sqrt{2})(t - 1 - \sqrt{2})$, подинтегралну рационалну функцију можемо записати као збир проостих сабирака

$$\frac{t^3 - t}{(t^2+1)^2(t-1+\sqrt{2})(t-1-\sqrt{2})} = \frac{At+B}{t^2+1} + \frac{Ct+D}{(t^2+1)^2} + \frac{E}{t-1+\sqrt{2}} + \frac{F}{t-1-\sqrt{2}},$$

где су $A = 0,\ B = -\frac{1}{4},\ C = \frac{1}{2},\ D = \frac{1}{2},\ E = -\frac{1}{8\sqrt{2}},\ F = \frac{1}{8\sqrt{2}}$. Зато је

$$I = 2 + 8\int_0^1 \left(\frac{-\frac{1}{4}}{t^2+1} + \frac{\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}}{(t^2+1)^2} + \frac{-\frac{1}{8\sqrt{2}}}{t-1+\sqrt{2}} + \frac{\frac{1}{8\sqrt{2}}}{t-1-\sqrt{2}} \right) dt = 2 - 2\int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} + 4\int_0^1 \frac{tdt}{(t^2+1)^2} + 4\int_0^1 \frac{dt}{(t^2+1)^2}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{dt}{t-1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{dt}{t-1-\sqrt{2}} = 2 - 2\operatorname{arctg} t\Big|_0^1 + 4 \cdot \frac{-1}{2(t^2+1)}\Big|_0^1 + 4\left(\frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{\operatorname{arctg} t}{2} \right)\Big|_0^1$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \ln|t - 1 + \sqrt{2}|\Big|_0^1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln|t - 1 - \sqrt{2}|\Big|_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2} + 1 + 1 + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2}) + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2} - 1) +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2}) - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2} + 1) = 4 + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 4 + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} \right) =$$

$$= 4 + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2} - 1)^2 = 4 + \sqrt{2} \ln(\sqrt{2} - 1).$$

Некада се можемо сусрести са одређеним интегралима функција чије се примитивне функције не могу представити помоћу елементарних функција или је то доста компликовано урадити, али се погодним сменама које „замењују места границама" рачунање полазног интеграла може знатно поједноставити. Урадићемо пар таквих примера да бисмо илустровали ову технику.

15. Израчунати $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \sin^2 x} dx$.

Решење: Једна идеја за решавање овог задатка би била парцијална интеграција и логичан одабир $u = x$ и $dv = \frac{\sin x dx}{1+\sin^2 x}$. Међутим, у том случају је интеграл $\int v du$ нерешив, односно не може се изразити помоћу елементарних функција, па ћемо задатак решавати на други начин. Циљ је елиминисати моном x из

подинтегралне функције како би се добила само рационална функција по синусу и косинусу. Увешћемо неку смену која замењује места границама и једна таква погодна је $t=\pi-x$. Тада је

$$I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\sin^2 x}dx=\begin{pmatrix}t=\pi-x,\quad x=0\Rightarrow t=\pi,\ x=\pi\Rightarrow t=0\\ dt=-dx\Rightarrow dx=-dt\end{pmatrix}=\int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\sin^2(\pi-t)}\cdot(-dt)=$$

$$=-\int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\sin^2 t}dt=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\sin^2 t}dt=\int_0^{\pi}\frac{\pi\sin t-t\sin t}{1+\sin^2 t}dt=\int_0^{\pi}\frac{\pi\sin t}{1+\sin^2 t}dt-\underbrace{\int_0^{\pi}\frac{t\sin t}{1+\sin^2 t}dt}_{I}=$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\sin^2 t}dt-I.$$

Дакле, важи $I=\pi\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\sin^2 t}dt-I$, па је $2I=\pi\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\sin^2 t}dt$ и зато је $I=\dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\sin^2 t}dt$, те смо успели у својој намери – у подинтегралној функцији више нема монома x односно t, већ је то само рационална функција по $\sin t$ и $\cos t$. Она је непарна по $\sin t$, па можемо увести смену $u=\cos t$. Имамо

$$I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\sin^2 t}dt=\begin{pmatrix}u=\cos t,\quad t=0\Rightarrow u=1,\ t=\pi\Rightarrow u=-1\\ du=-\sin t dt,\ \sin^2 t=1-u^2\end{pmatrix}=\frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{-du}{1+1-u^2}=\frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{du}{u^2-2}=$$

$$=-\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\underbrace{\frac{du}{u^2-2}}_{\text{парна}}=-\pi\int_0^{1}\frac{du}{u^2-(\sqrt{2})^2}=-\pi\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{2}}{u+\sqrt{2}}\right|\Bigg|_0^1=-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(\ln\left|\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right|-\ln\left|\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right|\right)=$$

$$=-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}-\ln 1\right)=-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}\right)=-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}-1)^2=-\frac{\pi}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}-1).$$

16. Израчунати $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{(1+|\cos x|)^2}dx$.

Решење: Покушаћемо и овде да елиминишемо моном x из подинтегралне функције помоћу смене $t=\pi-x$ која „окреће границе”:

$$I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{(1+|\cos x|)^2}dx=\begin{pmatrix}t=\pi-x,\quad x=0\Rightarrow t=\pi,\ x=\pi\Rightarrow t=0\\ dt=-dx\Rightarrow dx=-dt\end{pmatrix}=\int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{(1+|\cos(\pi-t)|)^2}\cdot(-dt)=$$

$$=-\int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)\sin t}{(1+|-\cos t|)^2}dt=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-t)\sin t}{(1+|\cos t|)^2}dt=\int_0^{\pi}\frac{\pi\sin t-t\sin t}{(1+|\cos t|)^2}dt=\int_0^{\pi}\frac{\pi\sin t}{(1+|\cos t|)^2}dt$$

$$=-\underbrace{\int_0^{\pi}\frac{t\sin t}{(1+|\cos t|)^2}dt}_{I}=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{(1+|\cos t|)^2}dt-I.$$

Одатле је $I=\pi\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{(1+|\cos t|)^2}dt-I$, па је $I=\dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{(1+|\cos t|)^2}dt$. Сада можемо увести смену $u=\cos t$, јер се њен диференцијал $du=-\sin t dt$ појављује у бројиоцу претходног интеграла, па је

$$I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{(1+|\cos t|)^2}dt=\begin{pmatrix}u=\cos t,\quad t=0\Rightarrow u=1,\ t=\pi\Rightarrow u=-1\\ du=-\sin t dt\Rightarrow \sin t dt=-du\end{pmatrix}=\frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{-du}{(1+|u|)^2}=$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\underbrace{\frac{du}{(1+|u|)^2}}_{\text{парна}} = \pi\int_{0}^{1}\frac{du}{(1+u)^2} = \begin{pmatrix} s=1+u \\ ds=du \end{pmatrix} = \pi\int_{1}^{2}\frac{du}{u^2} = \pi\cdot\frac{-1}{u}\Big|_1^2 = \pi\left(-\frac{1}{2}+1\right) = \frac{\pi}{2}.$$

17. Израчунати $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{x\sin^2 x}{1+|\sin x|}dx$.

Решење: Кренућемо и овде од линеарне смене $t = 2\pi - x$ која замењује места границама, па је

$$I = \int_0^{2\pi}\frac{x\sin^2 x}{1+|\sin x|}dx = \begin{pmatrix} t=2\pi-x, & x=0\Rightarrow t=2\pi,\ x=2\pi\Rightarrow t=0 \\ dt=-dx & \end{pmatrix} = \int_{2\pi}^{0}\frac{(2\pi-t)\cdot(\sin(2\pi-t))^2}{1+|\sin(2\pi-t)|}\cdot(-dt)$$

$$= -\int_{2\pi}^{0}\frac{(2\pi-t)\cdot(-\sin t)^2}{1+|-\sin t|}dt = \int_0^{2\pi}\frac{(2\pi-t)\sin^2 t}{1+|\sin t|}dt = \int_0^{2\pi}\frac{2\pi\sin^2 t - t\sin^2 t}{1+|\sin t|}dt = \int_0^{2\pi}\frac{2\pi\sin^2 t}{1+|\sin t|}dt - \underbrace{\int_0^{2\pi}\frac{t\sin^2 t}{1+|\sin t|}dt}_{I}$$

$$= 2\pi\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 t}{1+|\sin t|}dt - I.$$

Дакле, важи $I = 2\pi\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 t}{1+|\sin t|}dt - I$, па је $I = \pi\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 t}{1+|\sin t|}dt$, те смо заиста успели у циљу да елиминишемо моном x (односно t) из подинтегралне функције и дођемо до интеграла рационалне функције по $\sin t$ и $\cos t$. Да бисмо га решили што ефикасније и ослободили се апсолутне заграде из ње, детаљније ћемо осмотрити подинтегралну функцију $f(t) = \frac{\sin^2 t}{1+|\sin t|}$. Пошто је

$$f(t+\pi) = \frac{(\sin(t+\pi))^2}{1+|\sin(t+\pi)|} = \frac{(-\sin t)^2}{1+|-\sin t|} = \frac{\sin^2 t}{1+|\sin t|} = f(t) \quad \text{и}$$

$$f(-t) = \frac{(\sin(-t))^2}{1+|\sin(-t)|} = \frac{(\sin t)^2}{1+|-\sin t|} = \frac{\sin^2 t}{1+|\sin t|} = f(t),$$

функција f је и парна и π-периодична. Зато се можемо са интервала $[0, 2\pi]$, који је дужине два периода, пребацити на интервал $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ дужине једног периода, а потом са њега и на интервал $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ користећи парност функције f. Значи, важи

$$I = \pi\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 t}{1+|\sin t|}dt = \pi\cdot 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t}{1+|\sin t|}dt = \pi\cdot 2\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t}{1+|\sin t|}dt = 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t}{1+\sin t}dt.$$

Сада ћемо увести смену $s = \operatorname{tg}\frac{t}{2}$, јер подинтегрална функција (која је рационална по $\sin t$ и $\cos t$) нема одговарајућа својства ни парности ни непарности. Имамо да је

$$I = \begin{pmatrix} s=\operatorname{tg}\frac{t}{2}, & t=0\Rightarrow s=0,\ t=\frac{\pi}{2}\Rightarrow s=1 \\ \sin t=\frac{2s}{s^2+1},\ dt=\frac{2ds}{s^2+1} & \end{pmatrix} = 4\pi\int_0^1\frac{\frac{4s^2}{(s^2+1)^2}}{1+\frac{2s}{s^2+1}}\cdot\frac{2ds}{s^2+1} = 4\pi\int_0^1\frac{\frac{8s^2}{(s^2+1)^2}}{s^2+1+2s}ds =$$

$$= 32\pi\int_0^1\frac{s^2}{(s+1)^2(s^2+1)^2}ds = 32\pi\int_0^1\left(\frac{A}{s+1}+\frac{B}{(s+1)^2}+\frac{Cs+D}{s^2+1}+\frac{Es+F}{(s^2+1)^2}\right)ds,$$

где непосредно налазимо коефицијенте $A=0,\ B=\frac{1}{4},\ C=0,\ D=-\frac{1}{4},\ E=\frac{1}{2},\ F=0$. Зато је

$$I=32\pi\int_0^1\left(\frac{\frac{1}{4}}{(s+1)^2}+\frac{-\frac{1}{4}}{s^2+1}+\frac{\frac{1}{2}s}{(s^2+1)^2}\right)ds=8\pi\int_0^1\frac{ds}{(s+1)^2}-8\pi\int_0^1\frac{ds}{s^2+1}+16\pi\int_0^1\frac{sds}{(s^2+1)^2}=$$

$$=8\pi\cdot\frac{-1}{s+1}\Big|_0^1-8\pi\mathrm{arctg}s\Big|_0^1+16\pi\cdot\frac{-1}{2(s^2+1)}\Big|_0^1=8\pi\cdot\frac{1}{2}-8\pi\cdot\frac{\pi}{4}+16\pi\cdot\frac{1}{4}=8\pi-2\pi^2=2\pi(4-\pi).$$

18. Израчунати $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2025}x}{\sin^{2025}x+\cos^{2025}x}dx.$

Решење: Нећемо трошити речи на то колико је подинтегрална функција компликована за интеграцију иако је типска (рационална по синусу и косину, али сувише високог степена да бисмо је решавали стандардним алгоритмом), већ ћемо одмах покушати са сменом $t=\frac{\pi}{2}-x$ која мења места границама. Имамо да је

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2025}x}{\sin^{2025}x+\cos^{2025}x}dx=\begin{pmatrix}t=\frac{\pi}{2}-x,\quad x=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{2},\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=0\\ dt=-dx\end{pmatrix}=$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)^{2025}}{\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)^{2025}+\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)^{2025}}\cdot(-dt)=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{(\cos t)^{2025}}{(\cos t)^{2025}+(\sin t)^{2025}}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2025}t}{\cos^{2025}t+\sin^{2025}t}dt.$$

Пошто ознака променљиве у подинтегралној функцији не утиче на вредност интеграла, доказали смо заправо да је $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2025}x}{\cos^{2025}x+\sin^{2025}x}dx$. Ни овај интеграл није ништа једноставнији од почетног, али та два интеграла заједно у комбинацији ће нас већ довести до врло једноставног интеграла. Наиме, важи

$$2I=I+I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2025}x}{\sin^{2025}x+\cos^{2025}x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2025}x}{\cos^{2025}x+\sin^{2025}x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2025}x+\cos^{2025}x}{\sin^{2025}x+\cos^{2025}x}dx=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2},\quad\text{па је}\quad I=\frac{\pi}{4}.$$

19. Израчунати $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{dx}{(1+e^x)(1+x^2)}.$

Решење: Пошто подинтегрална функција није неког посебног типа, и овде ћемо увести смену која окреће границе тј. $t=-x$. Имамо да је

$$I=\int_{-1}^1\frac{dx}{(1+e^x)(1+x^2)}=\begin{pmatrix}t=-x,\quad x=-1\Rightarrow t=1,\ x=1\Rightarrow t=-1\\ dt=-dx\end{pmatrix}=\int_1^{-1}\frac{-dt}{(1+e^{-t})(1+(-t)^2)}=$$

$$=-\int_1^{-1}\frac{dt}{(1+e^{-t})(1+t^2)}=\int_{-1}^1\frac{e^tdt}{(e^t+1)(1+t^2)},$$

где смо на крају подинтегралну функцију проширили са e^t. Када поново означимо променљиву у подинтегралној функцији са x, видимо да је $I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{e^x dx}{(e^x+1)(1+x^2)}$, а онда као у претходном задатку имамо

$$2I = I + I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(1+e^x)(1+x^2)} + \int\limits_{-1}^{1} \frac{e^x dx}{(e^x+1)(1+x^2)} = \int\limits_{-1}^{1} \frac{(1+e^x)dx}{(1+e^x)(1+x^2)} = \int\limits_{-1}^{1} \underbrace{\frac{dx}{1+x^2}}_{\text{парна}} =$$

$$= 2\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = 2\text{arctg}x\Big|_0^1 = 2\cdot(\text{arctg}1 - \text{arctg}0) = 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}, \quad \text{а одатле одмах и} \quad I = \frac{\pi}{4}.$$