Математички факултет, Универзитет у Београду
Анализа 2 (Р смер) - први поправак првог колоквијума
12.6.2024.

1. Нека је функција $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дефинисана са:

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y|, & [x] = [y]; \\ \ln(1 + |[x] - [y]|), & [x] \neq [y], \end{cases}$$

где је $[x]$ ознака за цео део (највећи цео број не већи од x).

а) [3] Доказати да је d метрика на $\mathbb{R}$.

б) [4] Скицирати отворене кугле $B\left(0, \ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)$ и $B\left(3, 2\right)$.

в) [3] Наћи $\operatorname{diam} A$, где је $A = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}, 2\right)$.

г) [3] Испитати конвергенцију низа $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ у простору $(\mathbb{R}, d)$.

д) [3] Испитати комплетност и компактност простора $(\mathbb{R}, d)$

2. Нека је функција $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дата са

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 \sqrt[3]{x^2+y^2+y}}{x^2+(y+1)^2}, & (x,y) \neq (0,-1); \\ a, & (x,y) = (0,-1). \end{cases}$$

а) [3] Наћи константу $a \in \mathbb{R}$ такву да функција g буде непрекидна на $\mathbb{R}^2$.

б) [7] Испитати у којим тачкама је тако добијена функција диференцијабилна.

3. Дата је функција $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ са $f(x,y,z) = xy + yz + zx$.

а) [3] Наћи локалне екстремуме функције f.

б) [3] Наћи условне екстремуме функције f при услову $x + y + z = 3$.

в) [8] Наћи слику $f(D)$, где је $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z \leqslant 3,\ 0 \leqslant z \leqslant 1 \leqslant x, y\}$.

4. [10] Израчунати интеграл $\iiint\limits_T (y^2 - x^2)\, dxdydz$, где је тело $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 \leqslant 1,$ $x^2 + y^2 + 10z \leqslant 40,\ \left|\sqrt{3}y\right| \geqslant x,\ z \geqslant 0\}$.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.