Математички факултет, Универзитет у Београду
Анализа 2 (Р смер) - други колоквијум
31.5.2024.

1. Дате су површи $S_1 : x^2 + y^2 = z - \frac{1}{4}$ и $S_2 : y - z = -1$. Означимо са A и B тачке из координатне равни Oxz које припадају и S_1 и S_2, при чему је $x-$координата тачке A негативна.

   а) [4] Израчунати

   $$\int_\gamma \left(xe^{2x+\sqrt{3}} + y^2 z\right) dx + \left(x + \frac{1}{y^{2024}+1} + e^{z^2}\right) dy + \left(2x + \operatorname{arctg}\left(z^3\right)\right) dz,$$

   где је γ дуж чија је почетна тачка A, а крајња B.

   б) [10] Израчунати

   $$\int_\ell \left(xe^{2x+\sqrt{3}} + y^2 z\right) dx + \left(x + \frac{1}{y^{2024}+1} + e^{z^2}\right) dy + \left(2x + \operatorname{arctg}\left(z^3\right)\right) dz,$$

   где је је ℓ део пресека површи S_1 и S_2 који се налази у полупростору $y \geqslant 0$ оријентисан од тачке A до тачке B.

   в) [2] Да ли је форма $w = \left(xe^{2x+\sqrt{3}} + y^2 z\right) dx + \left(x + \frac{1}{y^{2024}+1} + e^{z^2}\right) dy + \left(2x + \operatorname{arctg}\left(z^3\right)\right) dz$ тачна?

2. Нека су површи $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $S_2 : x^2 + y^2 = 1$ и $S_3 : \sqrt{x^2 + y^2} = z + 2$.

   а) [6] Израчунати

   $$\iint_{S'} (x+y)dydz + (y+z^2)dzdx + \left(\ln(x^6 + y^2 + 1) + z\right) dxdy,$$

   где је S' спољни део површи S_2 који се налази унутар површи S_1, а изнад површи S_3.

   б) [10] Израчунати

   $$\iint_{S''} (x+y)dydz + (y+z^2)dzdx + \left(\ln(x^6 + y^2 + 1) + z\right) dxdy,$$

   где је S'' унија спољних делова површи S_1 и S_3 који се налазе унутар површи S_2.

3. а) [4] Испитати равномерну конвергенцију низа функција $f_n(x) = n \sin^n x \cos^2 x$ на сегменту $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

   б) [6] Развити у Фуријеов ред функцију $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ задату са $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi, 0); \\ 1 - \cos 2x, & x \in [0, \pi]. \end{cases}$

   в) [4] Испитати равномерну конвергенцију Фуријеовог реда функције f на сегменту $[-\pi, \pi]$.

   г) [4] Наћи суме $A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$ и $B = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2(2n+3)^2(2n+5)^2}$.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.