Математички факултет, Универзитет у Београду
Анализа 2 (P смер) - први колоквијум
10.3.2026.

1. Дато је пресликавање $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ са

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \min\{|x_1 - x_2|, 1\} + |y_1 - y_2|.$$

   а) [4] Доказати да је d метрика на $\mathbb{R}^2$.

   б) [4] Описати отворене лопте $B_d((1, 2); r)$ за све $r > 0$.

   в) [2] Нека је $d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ еуклидска метрика на $\mathbb{R}^2$. Доказати да за сваку отворену лопту метричког простора $(\mathbb{R}^2, d)$ постоји отворена лопта метричког простора $(\mathbb{R}^2, d_2)$ садржана у њој, и обратно, да за сваку отворену лопту метричког простора $(\mathbb{R}^2, d_2)$ постоји отворена лопта метричког простора $(\mathbb{R}^2, d)$ која је садржана у њој.

   г) [3] Испитати повезаност простора $(\mathbb{R}^2, d)$.

   д) [4] Испитати компактност отворених лопти $B_d((1, 2); r)$ за све $r > 0$. Да ли је простор $(\mathbb{R}^2, d)$ компактан?

   ђ) [3] Испитати комплетност простора $(\mathbb{R}^2, d)$.

2. Дата је функција $f(x, y) = \dfrac{e^{xy^3} - 1 + x^2y^2}{x(x^2 + xy + y^2)}$.

   а) [2] Наћи домен D_f функције f.

   б) [5] Доказати да за сваку тачку $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus D_f$ постоји коначан $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ тј. да се функција f може додефинисати до непрекидне функције $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

   в) [5] Наћи парцијалне изводе функције g у свим тачкама скупа $\mathbb{R}^2$.

   г) [3] Испитати диференцијабилност функције g у тачкама $(1, 1)$ и $(0, 1)$.

3. Дата је функција $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дефинисана са $f(x, y) = x^4 + 8y^4 - x^2 - y^2 - 2xy$ и скуп $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^4}{8} + y^4 \leqslant 1,\ x + y \geqslant 0\right\}$.

   а) [4] Одредити локалне екстремуме функције f.

   б) [4] Одредити $\lim\limits_{\rho\to+\infty} f(x, y)$, где је $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ и директну слику $f(\mathbb{R}^2)$.

   в) [7] Доказати да је скуп D компактан и повезан, па наћи директну слику $f(D)$.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 135 минута.