

1. Израчунати следеће интеграле

$$(1) \int \frac{x \ln x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

$$(2) \int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[6]{x+2}},$$

$$(3) \int_0^{2023 \frac{\pi}{2}} \frac{dx}{|\sin x| + |\cos x|}.$$

2. Испитати конвергенцију следећих интеграла

$$(1) \int_0^4 \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{\ln(1 + 4\sqrt{x}) \sqrt[4]{16 - x^2}} dx,$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(e+x) \operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^5 + x^2}} dx.$$

3. а) Испитати конвергенцију следећих редова

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n^2} \right),$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)^{n+e}},$$

где је $(2n)!! = 2n \cdot (2n-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2$ за све $n \in \mathbb{N}$.

б) Одредити област конвергенције реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n} (x+1)^n$.

4. Дат је низ функција $f_n(x) = x^n(1 + \ln x)$ за $n \in \mathbb{N}$.

а) Испитати равномерну конвергенцију овог низа на скупу $(0, 1]$.

б) Испитати равномерну конвергенцију овог низа на скупу $(0, \frac{9}{10}]$.

5. Развити функцију $f(x) = -4x^2 - 7$ у Фуријеов ред на $[-\pi, \pi]$ и израчунати суме $A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos \frac{2n}{5}}{n^2}$
и $B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

(Писмени испит укупно вреди 50 поена. Време за рад је 3 сата.)