

1. Израчунати следеће интеграле

$$(1) \int (\sin(\ln x) + x \ln x) dx,$$

$$(2) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(1+2x^2)},$$

$$(3) \int_0^{25\pi} \frac{\sin x}{2 - \sin^2 x + \cos x} dx.$$

2. а) Испитати конвергенцију интеграла $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(x+1)^2} dx$ и израчунати његову вредност ако конвергира.

б) Испитати конвергенцију интеграла $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\arcsin\left(\frac{2}{\pi}x\right) \cos x}}.$

3. Испитати апсолутну и условну конвергенцију следећих редова

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{3n+4} \sqrt[3]{2023n} \cos \frac{100}{\sqrt{n+1}},$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{n^9}}} - 1}{\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}},$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi) \ln \frac{n^2 + n + 17}{n^2 + 17}.$$

4. а) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2023}}{8^n}.$

б) Испитати равномерну конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{2023} e^{-nx} n x \sin(6nx)}{8^n (nx+5)}$ на $[0, +\infty).$

в) Израчунати $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{2023} e^{-nx} n x \sin(6nx)}{8^n (nx+5)}.$

5. Развити функцију $f(x) = 4 - \cos \frac{x}{3}$ у Фуријеов ред на $[-\pi, \pi]$ и израчунати суму $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{9n^2 - 1}.$

(Писмени испит укупно вреди 50 поена. Време за рад је 3 сата.)