

Математички факултет
Универзитет у Београду
Одабрани задаци из Анализе 2 (И смер)

Златко Лазовић

18. октобар 2023.

верзија 3.1

Садржај

1	Неодређени интеграли	2
1.1	Метода смене	4
1.2	Парцијална интеграција	16
1.3	Интеграција рационалних функција	28
1.4	Интеграција ирационалних функција	33
1.5	Интеграција тригонометријских функција	40
1.6	Интеграција трансцендентних функција	42
1.7	Разни задаци	43
2	Одређени интеграли	47
3	Несвојствени интеграли	73
4	Примене интеграла	87
5	Нумерички редови	90
5.1	Појам и својства бројног реда	90
5.2	Редови с позитивним члановима	94
5.3	Редови с произвољним члановима	101

1 Неодређени интеграли

Дефиниција 1.1. Нека је дата функција $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Функција $F: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ је примитивна функција функције f ако је диференцијабилна и важи $F'(x) = f(x)$ за свако $x \in (a, b)$.

Став 1.1. а) Ако је $F: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ примитивна функција функције $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, онда је и $F(x) + C$ примитивна функција функције f , за сваку константу C .

б) Ако су F_1 и F_2 примитивне функције функције f на неком интервалу (a, b) , онда се оне разликују за константу, то јест $F_1(x) - F_2(x) = C$ за свако $x \in (a, b)$.

Дефиниција 1.2. Скуп свих примитивних функција функције $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ се назива неодређени интеграл функције f и означава са

$$\int f(x)dx.$$

У изразу $\int f(x)dx$ функција $f(x)$ се назива подинтегралном функцијом а $f(x)dx$ подинтегралним изразом. Ако је $F(x)$ примитивна функција функције $f(x)$ на неком интервалу, онда се на основу претходног става може записати

$$\int f(x)dx = \{F(x) + C | C \in \mathbb{R}\},$$

односно само

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Став 1.2. Нека је $F(x)$ примитивна функција функције $f(x)$ на неком интервалу. Тада је

а) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$

б) $\int dF(x) = F(x) + C;$

в) $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$

г) $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$, где су f и g дефинисане на неком интервалу.

Таблица неодређених интеграла

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$

2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

3. $\int e^x dx = e^x + C$

$$4. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$6. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$7. \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$8. \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$9. \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$10. \int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$$

$$11. \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C$$

$$12. \int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$$

ЗАДАТАК 1.1. Решити интеграл $\int (2x^3 + 5x + \sqrt{3}) dx$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int (2x^3 + 5x + \sqrt{3}) dx &= 2 \int x^3 dx + 5 \int x dx + \sqrt{3} \int dx = 2 \cdot \frac{x^4}{4} + 5 \cdot \frac{x^2}{2} + \sqrt{3}x + C \\ &= \frac{x^4}{2} + \frac{5}{2}x^2 + \sqrt{3}x + C. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.2. Решити интеграл $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} dx$.

Решење.

$$\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} dx = \int x^{\frac{7}{8}} dx = \frac{8}{15}x^{\frac{15}{8}} + C.$$

△

ЗАДАТАК 1.3. Решити интеграл $\int \frac{(1+\sqrt{x})(2-x)}{x^2} dx$.

Решење.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(1 + \sqrt{x})(2 - x)}{x^2} dx = \int \left(\frac{2}{x^2} - \frac{x}{x^2} + \frac{2\sqrt{x}}{x^2} - \frac{x\sqrt{x}}{x^2} \right) dx \\ &= 2 \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{1}{x} dx + 2 \int \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx - \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx = -\frac{2}{x} - \ln|x| + 2 \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C \\ &= -\frac{2}{x} - \ln|x| - \frac{4}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.4. Израчунати интеграл $\int (2 - \sqrt{x})^2 dx$.

Решење.

$$I = \int (2 - \sqrt{x})^2 dx = \int (4 - 4\sqrt{x} + x) dx = 4x - \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} + C.$$

△

ЗАДАТАК 1.5. Израчунати интеграл $\int \frac{x^4 + 2x^2}{x^2 + 1} dx$.

Решење.

$$\int \frac{x^4 + 2x^2}{x^2 + 1} dx = \int \frac{(x^2 + 1)^2 - 1}{x^2 + 1} dx = \int \left(x^2 + 1 - \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{x^3}{3} + x - \frac{1}{2} \arctg x + C.$$

△

ЗАДАТАК 1.6. Израчунати интеграл $\int \frac{x^2 + x + 1}{x} dx$.

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{x} dx = \int \left(x + 1 + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x| + C.$$

ЗАДАТАК 1.7. Израчунати интеграл $\int \frac{x - 2\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$.

1.1 Метода смене

Став 1.3. (Смена промелјиве) Нека је $F(x)$ примитивна функције $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ и нека је $\phi: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилна функција. Тада је

$$\int f(\phi(t))\phi'(t)dt = F(\phi(t)) + C$$

на интервалу (α, β) .

ЗАДАТАК 1.8. Решити интеграл $\int \sqrt[3]{1 - 3x} dx$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int \sqrt[3]{1-3x} \, dx &= \left(\begin{array}{l} 1-3x=t \\ -3dx=dt \end{array} \right) = \int \sqrt[3]{t} \frac{dt}{-3} = -\frac{1}{3} \int t^{\frac{1}{3}} dt = -\frac{1}{3} \frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C \\ &= -\frac{1}{4}(1-3x)^{\frac{4}{3}} + C.\end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.9. Израчунати интеграл $\int \operatorname{ch} x \, dx$.*Решење.*

$$\int \operatorname{ch} x \, dx = \int \frac{e^x + e^{-x}}{2} \, dx = \frac{1}{2} \left(\int \frac{e^x}{2} \, dx + \int \frac{e^{-x}}{2} \, dx \right) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) + C = \operatorname{sh} x + C.$$

△

ЗАДАТАК 1.10. Израчунати интеграл $\int \operatorname{sh} x \, dx$.*Решење.*

$$\int \operatorname{ch} x \, dx = \int \frac{e^x - e^{-x}}{2} \, dx = \frac{1}{2} \left(\int \frac{e^x}{2} \, dx - \int \frac{e^{-x}}{2} \, dx \right) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) + C = \operatorname{ch} x + C.$$

△

ЗАДАТАК 1.11. Израчунати интеграл $\int e^{3x+2} \, dx$.ЗАДАТАК 1.12. Израчунати интеграл $\int \cos(3x-2) \, dx$.ЗАДАТАК 1.13. Израчунати интеграл $\int (3x-5)^7 \, dx$.ЗАДАТАК 1.14. Израчунати интеграл $\int x^2 e^{-x^3} \, dx$.ЗАДАТАК 1.15. Израчунати интеграл $\int \frac{dx}{4x+7}$.ЗАДАТАК 1.16. Решити интеграл $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \, dx$, ($a > 0$).*Решење.*

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \, dx &= \frac{1}{a} \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} \, dx = \left(\begin{array}{l} \frac{x}{a}=t \\ \frac{1}{a} dx=dt \end{array} \right) = \frac{1}{a} \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} a \, dt \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \, dt = \arcsin t + C = \arcsin \frac{x}{a} + C.\end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.17. Решити интеграл $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \, dx$, ($a > 0$).

Решење.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx &= \frac{1}{a} \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm 1}} dx = \left(\frac{\frac{x}{a} = t}{\frac{1}{a} dx = dt} \right) = \frac{1}{a} \int \frac{1}{\sqrt{t^2 \pm 1}} a dt \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{t^2 \pm 1}} dt = \ln |t + \sqrt{t^2 \pm 1}| + C_1 = \ln \left| \frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm 1} \right| + C_1 \\ &= \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| - \ln |a| + C_1 = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C,\end{aligned}$$

где је $C = -\ln |a| + C_1$.

△

ЗАДАТАК 1.18. Решити интеграл $\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx$, ($a > 0$).

Решење.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx &= \frac{1}{a} \int \frac{1}{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx = \left(\frac{\frac{x}{a} = t}{\frac{1}{a} dx = dt} \right) = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{1 - t^2} a dt \\ &= \frac{1}{a} \int \frac{1}{1 - t^2} dt = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{1 + \frac{x}{a}}{1 - \frac{x}{a}} \right| + C \\ &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C.\end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.19. Решити интеграл $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx$, ($a > 0$).

Решење.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx &= \frac{1}{a} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx = \left(\frac{\frac{x}{a} = t}{\frac{1}{a} dx = dt} \right) = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{1 + t^2} a dt \\ &= \frac{1}{a} \int \frac{1}{1 + t^2} dt = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.\end{aligned}$$

△

У претходним задацима доказали смо да за $a > 0$ важе следећи интеграли

$$9'. \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$10'. \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$11'. \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

$$12'. \int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$

ЗАДАТАК 1.20. Решити интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - 3x^2}}$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{4}{3}-x^2}} = \left(\text{применом формуле 9', где је } a = \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{x}{\frac{2}{\sqrt{3}}} + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{\sqrt{3}x}{2} + C.\end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.21. Решити интеграл $\int \frac{dx}{2x^2+1}$.*Решење.*

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2x^2+1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+\frac{1}{2}} dx = \left(\text{применом формуле 10', где је } a = \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + C = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} (\sqrt{2}x) + C.\end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.22. Решити интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-5}}$.*Решење.*

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-5}} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{5}{3}}} = \left(\text{применом формуле 11', где је } a = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}}{x + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}} \right| + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{3}x - \sqrt{5}}{\sqrt{3}x + \sqrt{5}} \right| + C\end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.23. Решити интеграл $\int \frac{dx}{5-2x^2}$.*Решење.*

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{5-2x^2} &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\frac{5}{2}-x^2} = \left(\text{применом формуле 12', где је } a = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}} \ln \left| \frac{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}+x}{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}-x} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{10}} \ln \left| \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}x}{\sqrt{5}-\sqrt{2}x} \right| + C\end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.24. Решити интеграл $\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$.

Решење.

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)} &= \left(\begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \end{array} \right) = \int \frac{dt}{t \ln t} = \left(\begin{array}{l} \ln t = u \\ \frac{1}{t} dt = du \end{array} \right) \\
&= \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C = \ln |\ln t| + C = \ln |\ln(\ln x)| + C.
\end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.25. Израчунати интеграл $\int \cos^{\frac{2}{3}} x \sin^5 x dx$.*Решење.*

$$\begin{aligned}
\int \cos^{\frac{2}{3}} x \sin^5 x dx &= \int \cos^{\frac{2}{3}} x \sin^4 x \sin x dx = \left(\begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right) = - \int t^{\frac{2}{3}} (1 - t^2)^2 dt \\
&= - \int t^{\frac{2}{3}} (1 - 2t^2 + t^4) dt = - \int \left(t^{\frac{2}{3}} - 2t^{\frac{8}{3}} + t^{\frac{14}{3}} \right) dt \\
&= -\frac{3}{5} t^{\frac{5}{3}} + \frac{6}{11} t^{\frac{11}{3}} - \frac{3}{17} t^{\frac{17}{3}} + C \\
&= -\frac{3}{5} \cos^{\frac{5}{3}} x + \frac{6}{11} \cos^{\frac{11}{3}} x - \frac{3}{17} \cos^{\frac{17}{3}} x + C.
\end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.26. Решити интеграл $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx$.*Решење.*

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx &= \left(\begin{array}{l} \sin x - \cos x = t \\ (\sin x + \cos x) dx = dt \end{array} \right) = \int \frac{dt}{\sqrt[3]{t}} = \frac{t^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C \\
&= \frac{3}{2} (\sin x - \cos x)^{\frac{2}{3}} + C.
\end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.27. Решити интеграл $\int \frac{x dx}{4 + x^4}$.*Решење.*

$$\begin{aligned}
\int \frac{x dx}{4 + x^4} &= \left(\begin{array}{l} x^2 = t \\ 2x dx = dt \end{array} \right) = (\text{применом формуле 9'}) \\
&= \int \frac{\frac{dt}{2}}{4 + t^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \arctg \frac{t}{2} + C = \frac{1}{4} \arctg \frac{t}{2} + C \\
&= \frac{1}{4} \arctg \frac{x^2}{2} + C.
\end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.28. Решити интеграл $\int \frac{x^3 dx}{x^8 - 2}$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3 dx}{x^8 - 2} &= \left(\begin{array}{l} x^4 = t \\ 4x^3 dx = dt \end{array} \right) = \int \frac{\frac{dt}{4}}{t^2 - 2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} - t}{\sqrt{2} + t} \right| + C \\ &= \frac{1}{8\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} - x^4}{\sqrt{2} + x^4} \right| + C.\end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.29. Израчунати интеграл $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 2}}$.*Решење.*

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 2}} = \left(\begin{array}{l} x^2 - 2 = t \\ 2x dx = dt \end{array} \right) = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} + C = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{t} + C = \sqrt{x^2 - 2} + C.$$

△

ЗАДАТАК 1.30. Решити интеграл $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 + 1}} dx$.*Решење.*

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 + 1}} dx &= \int \frac{x dx}{x^2\sqrt{x^2 + 1}} = \left(\begin{array}{l} x^2 + 1 = t^2 \\ 2x dx = 2t dt \\ x^2 = t^2 - 1 \end{array} \right) = \int \frac{t dt}{(t^2 - 1)t} = \int \frac{dt}{t^2 - 1} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - t}{1 + t} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - \sqrt{x^2 + 1}}{1 + \sqrt{x^2 + 1}} \right| + C.\end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.31. Решити интеграл $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} dx$.*Решење.* $-\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ (сличан као задатак 1.30).

△

ЗАДАТАК 1.32. Израчунати интеграл $I = \int \sqrt{x^3 - 4x^2} dx$.*Решење.* На основу $x^3 - 4x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2(x - 4) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$ следи

$$\begin{aligned}I &= \int \sqrt{x^3 - 4x^2} dx = \int |x|\sqrt{x - 4} dx = \int x\sqrt{x - 4} dx = \left(\begin{array}{l} x - 4 = t^2, t \geq 0 \\ dx = 2t dt \end{array} \right) \\ &= 2 \int (t^2 + 4)t^2 dt = 2 \int (t^4 + 4t^2) dt \\ &= \frac{2}{5} t^5 + \frac{8}{3} t^3 + C = \frac{2}{5} (x - 4)^{\frac{5}{2}} + \frac{8}{3} (x - 4)^{\frac{3}{2}} + C.\end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.33. Решити интеграл $\int \operatorname{tg} x dx$.

Решење.

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg} x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left(\begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right) = \int \frac{-dt}{t} = -\ln |t| + C \\ &= -\ln |\cos x| + C.\end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.34. Решити интеграл $\int \operatorname{ctg} x dx$.*Решење.*

$$\begin{aligned}\int \operatorname{ctg} x dx &= \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \left(\begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right) = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C \\ &= \ln |\sin x| + C.\end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.35. Решити интеграл $\int \operatorname{tg}^2 x \sin 2x dx$.*Решење.*

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^2 x \sin 2x dx &= 2 \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \sin x \cos x dx = 2 \int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx = \left(\begin{array}{l} \cos x = t \\ \sin x dx = dt \end{array} \right) \\ &= 2 \int \frac{(1-t^2)(-dt)}{t} = -\ln |t| + 2 \cdot \frac{t^2}{2} + C = -2 \ln |\cos x| + \cos^2 x + C.\end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.36. Решити интеграл $\int \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx$.*Решење.*

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx &= \int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{x+1 - (x-1)} dx = \int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \sqrt{x+1} dx - \frac{1}{2} \int \sqrt{x-1} dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{1}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}} + C.\end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.37. Решити интеграл $\int \frac{x}{\sqrt[3]{1-3x}} dx$.*Решење.*

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt[3]{1-3x}} dx &= \left(\begin{array}{l} 1-3x = t \\ -3dx = dt \\ x = \frac{1-t}{3} \end{array} \right) = \int \frac{\frac{1-t}{3}}{\sqrt[3]{t}} \cdot \frac{dt}{-3} = -\frac{1}{9} \int \frac{1-t}{\sqrt[3]{t}} dt \\ &= -\frac{1}{9} \int \frac{1}{\sqrt[3]{t}} dt + \frac{1}{9} \int t^{\frac{2}{3}} dt = -\frac{1}{9} \cdot \frac{3}{2} t^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{5} t^{\frac{5}{3}} + C \\ &= -\frac{1}{6} (1-3x)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{15} (1-3x)^{\frac{5}{3}} + C.\end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.38. Решити интеграл $\int x^3 \sqrt[3]{1+x^2} dx$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int x^3 \sqrt[3]{1+x^2} dx &= \int x^2 \sqrt[3]{1+x^2} x dx = \left(\begin{array}{l} 1+x^2 = t \\ 2x dx = dt \\ x^2 = t-1 \end{array} \right) = \int (t-1) \sqrt[3]{t} \frac{dt}{2} \\ &= \frac{1}{2} \int (t^{\frac{4}{3}} - t^{\frac{1}{3}}) dt = \frac{3}{14} t^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{8} t^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{14} (1+x^2)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{8} (1+x^2)^{\frac{4}{3}} + C. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.39. Решити интеграл $\int \frac{\sqrt{2 \ln x + 3e}}{x} dx$.

Решење.

$$\int \frac{\sqrt{2 \ln x + 3e}}{x} dx = \left(\begin{array}{l} 2 \ln x + 3e = t \\ \frac{2}{x} dx = dt \end{array} \right) = \frac{1}{2} \int \sqrt{t} dt = \frac{1}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} (2 \ln x + 3e)^{\frac{3}{2}} + C.$$

△

ЗАДАТАК 1.40. Решити интеграл $\int \operatorname{sh}^3 x dx$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sh}^3 x dx &= \int \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^3 x dx = \frac{1}{8} \int (e^{3x} - 3e^x + 3e^{-x} - e^{-3x}) dx \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{3} e^{3x} - 3e^x - 3e^{-x} + \frac{1}{3} e^{-3x} \right) + C. \end{aligned}$$

△

Интеграл типа

$$\int \sin^n x dx \text{ и } \int \cos^n x dx, \quad n \in \{2, 3, 4, 5\}.$$

ЗАДАТАК 1.41. Решити интеграл $\int \sin^2 x dx$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2x + C \\ &= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.42. Решити интеграл $\int \cos^2 x dx$.

Решење. $\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$ (сличан као задатак 1.41).

△

ЗАДАТАК 1.43. Решити интеграл $\int \sin^3 x dx$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x dx &= \int \sin^2 x \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx = \left(\begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right) \\ &= - \int (1 - t^2) dt = -t + \frac{t^3}{3} + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.44. Решити интеграл $\int \cos^3 x dx$.

Решење. $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$ (сличан као задатак 1.43).

△

ЗАДАТАК 1.45. Решити интеграл $\int \sin^4 x dx$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x dx &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx \\ &= \frac{1}{4} \left(x - \sin 2x + \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx \right) = \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{32} \sin 4x + C \\ &= \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.46. Решити интеграл $\int \cos^4 x dx$.

Решење. $\frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C$ (сличан као задатак 1.45).

△

ЗАДАТАК 1.47. Решити интеграл $\int \sin^5 x dx$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int \sin^5 x dx &= \int \sin^4 x \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x dx = \left(\begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right) \\ &= - \int (1 - t^2)^2 dt = - \int (1 - 2t^2 + t^4) dt = -t + \frac{2}{3} t^3 - \frac{1}{5} t^5 + C \\ &= -\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + C. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.48. Решити интеграл $\int \cos^5 x dx$.

Решење. $\sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + C$ (сличан као задатак 1.47).

△

ЗАДАТАК 1.49. Решити интеграл $\int \operatorname{tg}^2 x dx$.

Решење. Користећи тригонометријску формулу $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ имамо

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

△

ЗАДАТАК 1.50. Решити интеграл $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx &= \left(\begin{array}{l} 2-x=t^2, t \geq 0 \\ -dx=2tdt \\ x=2-t^2 \end{array} \right) = - \int \frac{(2-t^2)^2}{t} 2tdt \\ &= -2 \int (4-4t^2+t^4) dt = -8t + 8 \cdot \frac{t^3}{3} - 2 \cdot \frac{t^5}{5} + C \\ &= -8\sqrt{2-x} + \frac{8}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}(2-x)^{\frac{5}{2}} + C. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.51. Решити интеграл $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int \frac{x^4 x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left(\begin{array}{l} 1-x^2=t^2, t \geq 0 \\ -2x dx = 2t dt \\ x^2 = 1-t^2 \end{array} \right) = - \int \frac{(1-t^2)^2 t dt}{t} \\ &= - \int (1-2t^2+t^4) dt = -t + 2 \cdot \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C \\ &= -\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}(1-x^2)^{\frac{5}{2}} + C. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.52. Решити интеграл $\int x^5(2-5x^3)^{\frac{2}{3}} dx$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int x^5(2-5x^3)^{\frac{2}{3}} dx &= \int x^3(2-5x^3)^{\frac{2}{3}} x^2 dx = \left(\begin{array}{l} 2-5x^3=t \\ -15x^2 dx = dt \\ x^3 = \frac{1}{5}(2-t) \end{array} \right) = \int \frac{1}{5}(2-t)t^{\frac{2}{3}} \frac{dt}{-15} \\ &= -\frac{1}{75} \int (2t^{\frac{2}{3}} - t^{\frac{5}{3}}) dt = -\frac{2}{75} \cdot \frac{t^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + \frac{1}{75} \cdot \frac{t^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} + C \\ &= -\frac{2}{125} \cdot (2-5x^3)^{\frac{5}{3}} + \frac{1}{200} \cdot (2-5x^3)^{\frac{8}{3}} + C. \end{aligned}$$

△

Интеграл типа

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx$$

ЗАДАТАК 1.53. Решити интеграл $\int \frac{dx}{3x^2 + 2x - 2}$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3x^2 + 2x - 2} &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}} = \\ &= \left(x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} = \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} - \frac{2}{3} = \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{7}{9} \right) \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{7}{9}} = \left(x + \frac{1}{3} = t \right) \frac{dx}{dt} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2 - \frac{7}{9}} \\ &= \frac{1}{3} \frac{1}{2\sqrt{\frac{7}{9}}} \ln \left| \frac{\frac{\sqrt{7}}{3} - t}{\frac{\sqrt{7}}{3} + t} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{7}} \ln \left| \frac{\frac{\sqrt{7}}{3} - x - \frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{7}}{3} + x + \frac{1}{3}} \right| + C \\ &= \frac{1}{2\sqrt{7}} \ln \left| \frac{\sqrt{7} - 3x - 1}{\sqrt{7} + 3x + 1} \right| + C. \end{aligned}$$

△

Интеграл типа

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

ЗАДАТАК 1.54. Решити интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{3 + 2x - 2x^2}}$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{3 + 2x - 2x^2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{3}{2} + x - x^2}} \\ &= \left(\frac{3}{2} + x - x^2 = -(x^2 - x - \frac{3}{2}) = -\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - \frac{3}{2}\right] = -\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{4}\right] = \frac{7}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{7}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} = \left(x - \frac{1}{2} = t \right) \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{7}{4} - t^2}} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2t}{\sqrt{7}} + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{2x - 1}{\sqrt{7}} + C. \end{aligned}$$

△

Интеграл типа

$$\int \frac{ax + b}{cx^2 + dx + e} dx$$

ЗАДАТАК 1.55. Решити интеграл $\int \frac{3x + 2}{2x^2 - 3x - 1} dx$.

Решење. Потребно је да трансформишемо линеарну функцију $3x + 2$ у функцију $4x - 3$ (извод квадратне функције $2x^2 - 3x - 1$).

$$\begin{aligned} \int \frac{3x + 2}{2x^2 - 3x - 1} dx &= 3 \int \frac{x + \frac{2}{3}}{2x^2 - 3x - 1} dx = \frac{3}{4} \int \frac{4x + \frac{8}{3}}{2x^2 - 3x - 1} dx = \frac{3}{4} \int \frac{4x - 3 + 3 + \frac{8}{3}}{2x^2 - 3x - 1} dx \\ &= \frac{3}{4} \left(\underbrace{\int \frac{4x - 3}{2x^2 - 3x - 1} dx}_{I_1} + \frac{17}{3} \underbrace{\int \frac{dx}{2x^2 - 3x - 1}}_{I_2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{4x-3}{2x^2-3x-1} dx = \left(\begin{array}{l} 2x^2-3x-1=t \\ (4x-3)dx=dt \end{array} \right) = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C \\ &= \ln|2x^2-3x-1| + C, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{dx}{2x^2-3x-1} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}} \\ &= \left[x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} - \frac{1}{2} = \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{17}{16} \right] \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{17}{16}} = \left(\begin{array}{l} x - \frac{3}{4} = t \\ dx = dt \end{array} \right) = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 - \frac{17}{16}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{\sqrt{17}}{4}} \ln \left| \frac{\frac{\sqrt{17}}{4} - t}{\frac{\sqrt{17}}{4} + t} \right| + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{17}} \ln \left| \frac{\sqrt{17} - 4x + 3}{\sqrt{17} + 4x - 3} \right| + C, \end{aligned}$$

$$\int \frac{3x+2}{2x^2-3x-1} dx = \frac{3}{4} \ln|2x^2-3x-1| + \frac{\sqrt{17}}{4} \ln \left| \frac{\sqrt{17} - 4x + 3}{\sqrt{17} + 4x - 3} \right| + C.$$

△

Интеграл типа

$$\int \frac{\mathbf{ax} + \mathbf{b}}{\sqrt{\mathbf{cx}^2 + \mathbf{dx} + \mathbf{e}}} dx$$

ЗАДАТАК 1.56. Решити интеграл $\int \frac{4-2x}{\sqrt{1-3x-4x^2}} dx$.

Решење. Потребно је да трансформишемо израз $4-2x$ у $-3-8x$.

$$\begin{aligned} \int \frac{4-2x}{\sqrt{1-3x-4x^2}} dx &= -2 \int \frac{-2+x}{\sqrt{1-3x-4x^2}} dx = \frac{-2}{-8} \int \frac{16-8x}{\sqrt{1-3x-4x^2}} dx \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{-8x-3+3+16}{\sqrt{1-3x-4x^2}} dx = \frac{1}{4} \left(\underbrace{\int \frac{-8x-3}{\sqrt{1-3x-4x^2}} dx}_{I_1} + 19 \underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x-4x^2}}}_{I_2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{-8x-3}{\sqrt{1-3x-4x^2}} dx = \left(\begin{array}{l} 1-3x-4x^2=t \\ (-8x-3)dx=dt \end{array} \right) = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C \\ &= 2\sqrt{1-3x-4x^2} + C, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{dx}{\sqrt{1-3x-4x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{3}{4}x - x^2}} \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}x - x^2 = -(x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}) = -\left((x + \frac{3}{8})^2 - \frac{9}{64} - \frac{1}{4}\right) = \frac{25}{64} - (x + \frac{3}{8})^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{64} - (x + \frac{3}{8})^2}} = \left(\begin{array}{l} x + \frac{3}{8} = t \\ dx = dt \end{array} \right) = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{\frac{25}{64} - t^2}} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{t}{\frac{5}{8}} + C \\ &= \frac{1}{2} \arcsin \frac{8}{5}t + C = \frac{1}{2} \arcsin \frac{8x+3}{5} + C, \end{aligned}$$

$$\int \frac{4-2x}{\sqrt{1-3x-4x^2}} dx = \frac{1}{4} \left(2\sqrt{1-3x-4x^2} + \frac{19}{2} \arcsin \frac{8x+3}{5} \right) + C.$$

△

Интеграл типа

$$\int \cos(ax+b)\cos(cx+d) dx,$$

$$\int \sin(ax+b)\cos(cx+d) dx,$$

$$\int \sin(ax+b)\sin(cx+d) dx$$

Интеграле овог типа решавамо помоћу тригонометријских идентичности

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)].$$

ЗАДАТАК 1.57. Решити интеграл $\int \cos 3x \cos 4x dx$.*Решење.* Коришћењем тригонометријске формуле

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

добивамо

$$\int \cos 3x \cos 4x dx = \int \frac{1}{2} (\cos 7x + \cos x) dx = \frac{1}{14} \sin 7x + \frac{1}{2} \sin 2x + C.$$

△

1.2 Парцијална интеграција

Став 1.4. (Парцијална интеграција) Нека су $u, v: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилне функције и нека постоји примитивна функција функције $u'(x)v(x)$. Тада постоји примитивна функција функције $u(x)v'(x)$ и важи

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

(Краћи запис је $\int u dv = uv - \int v du$.)ЗАДАТАК 1.58. Решити интеграл $I = \int x^2 \arccos x dx$.

Решење.

$$\begin{aligned} I &= \int x^2 \arccos x dx = \left(\begin{array}{l} u = \arccos x \Rightarrow du = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = x^2 dx \Rightarrow v = \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \end{array} \right) \\ &= \frac{1}{3}x^3 \arccos x + \frac{1}{3} \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \left(\begin{array}{l} 1-x^2 = t \\ -2x dx = dt \\ x^2 = 1-t \end{array} \right) = \int \frac{(1-t)^{\frac{dt}{-2}}}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} + \frac{1}{2} \int \sqrt{t} dt \\ &= -\sqrt{t} + \frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = -\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C, \end{aligned}$$

$$I = \frac{1}{3}x^3 \arccos x - \frac{1}{3}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{9}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

△

ЗАДАТАК 1.59. Решити интеграл $I = \int x \arccos x dx$.

Решење. $\frac{1}{2} \arcsin x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$.

△

ЗАДАТАК 1.60. Решити интеграл $I = \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$.

Решење.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx = \left(\begin{array}{l} u = \arcsin x \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ dv = \frac{1}{x^2} dx \Rightarrow v = -\frac{1}{x} \end{array} \right) \\ &= -\frac{1}{x} \arcsin x + \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{x dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} \left(\begin{array}{l} 1-x^2 = t^2, t \geq 0 \\ -2x dx = 2t dt \end{array} \right) \\ &= \int \frac{-t dt}{(1-t^2)t} = -\int \frac{dt}{1-t^2} = -\ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} \right| + C, \end{aligned}$$

$$I = -\frac{\arcsin x}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} \right| + C.$$

△

ЗАДАТАК 1.61. Решити интеграл $I = \int \arctg \sqrt{x} dx$.

Решење.

$$\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx = \left(\begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{dx}{2\sqrt{x}(1+x)} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right) = x \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{1}{2} \int \frac{xdx}{\sqrt{x}(1+x)},$$

$$\begin{aligned} \int \frac{xdx}{\sqrt{x}(1+x)} &= \left(\begin{array}{l} x = t^2, t \geq 0 \\ dx = 2tdt \end{array} \right) = \int \frac{2t^3 dt}{t(1+t^2)} = 2 \int \frac{t^2 dt}{1+t^2} = 2 \int \frac{t^2 + 1 - 1}{1+t^2} dt \\ &= 2 \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2} \right) dt = 2t - 2 \operatorname{arctg} t + C = 2\sqrt{x} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C, \end{aligned}$$

$$I = x \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C.$$

△

ЗАДАТАК 1.62. Израчунати $I = \int x^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx$.

Решење.

$$\begin{aligned} I &= \int x^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx = \left(\begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \Rightarrow du = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = -\frac{dx}{x^2+1} \\ dv = x^2 dx \Rightarrow v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right) \\ &= \frac{x^3}{3} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \int \frac{x^3}{3} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x^3}{3} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \int \frac{x^3 dx}{x^2+1} = \frac{x^3}{3} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \frac{1}{3} I_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{x^3 dx}{x^2+1} = \left(\begin{array}{l} x^2+1 = t \\ 2x dx = dt \end{array} \right) = \frac{1}{2} \int \frac{(t-1)dt}{t} = \frac{1}{2} (t - \ln |t|) + C \\ &= \frac{1}{2} (x^2+1 - \ln |x^2+1|) + C, \end{aligned}$$

$$I = \frac{1}{3} x^3 \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \frac{1}{6} (x^2+1) - \frac{1}{6} \ln(x^2+1) + C.$$

△

ЗАДАТАК 1.63. Решити интеграл $I = \int (\arcsin x)^2 dx$.

Решење.

$$\begin{aligned} I &= \int (\arcsin x)^2 dx = \left(\begin{array}{l} u = (\arcsin x)^2 \Rightarrow du = 2 \arcsin x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right) \\ &= x(\arcsin x)^2 - 2 \int x \arcsin x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = x(\arcsin x)^2 - \int \arcsin x \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \left(\begin{array}{l} u = \arcsin x \Rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow v = \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \left(\begin{array}{l} 1-x^2 = t \\ -2xdx = dt \end{array} \right) = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\sqrt{1-x^2} \end{array} \right) \\ &= x(\arcsin x)^2 - 2 \left(-\sqrt{1-x^2} \arcsin x + \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx \right) \\ &= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x + C. \end{aligned}$$

△

Интеграл типа

$$I = \int P_n(x) \sin(ax + b) dx,$$

$$I = \int P_n(x) \cos(ax + b) dx,$$

$$I = \int P_n(x) e^{ax} dx$$

Ови интеграли се решавају парцијалном интеграцијом тако што изаберемо $u = P_n(x)$.

ЗАДАТАК 1.64. Решити интеграл $I = \int (x^2 + 3x - 4) \sin 2x dx$.

Решење.

$$\begin{aligned} I &= \int (x^2 + 3x - 4) \sin 2x dx = \left(\begin{array}{l} u = x^2 + 3x - 4 \Rightarrow du = (2x + 3)dx \\ dv = \sin 2x dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array} \right) \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 + 3x - 4) \cos 2x + \frac{1}{2} \int (2x + 3) \cos 2x dx = \left(\begin{array}{l} u = 2x + 3 \Rightarrow du = 2dx \\ dv = \cos 2x \Rightarrow v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right) \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 + 3x - 4) \cos 2x + \frac{1}{4}(2x + 3) \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 + 3x - 4) \cos 2x + \frac{1}{4}(2x + 3) \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.65. Израчунати интеграл $\int e^{\sqrt{x}} dx$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int e^{\sqrt{x}} dx &= \left(\begin{array}{l} x = t^2, t \geq 0 \\ dx = 2t dt \end{array} \right) = 2 \int t e^t dt = \left(\begin{array}{l} u = t \Rightarrow du = dt \\ dv = e^t dt \Rightarrow v = e^t \end{array} \right) = 2te^t - 2 \int e^t dt \\ &= 2te^t - 2e^t + C = 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + C. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.66. Израчунати интеграл $\int \sin \sqrt{1+x} dx$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int \sin \sqrt{1+x} dx &= \left(\begin{array}{l} 1+x = t^2, t \geq 0 \\ dx = 2t dt \end{array} \right) = 2 \int t \sin t dt \\ &= \left(\begin{array}{l} u = t \Rightarrow du = dt \\ dv = \sin t dt \Rightarrow v = -\cos t \end{array} \right) = -2t \cos t + 2 \int \cos t dt \\ &= -2t \cos t + 2 \sin t + C = -2\sqrt{1+x} \cos \sqrt{1+x} + 2 \sin \sqrt{1+x} + C \end{aligned}$$

△

Интеграл типа

$$\int f(x) \ln(g(x)) dx$$

Покушати са избором $u = \ln(g(x))$ и $dv = f(x)dx$.

ЗАДАТАК 1.67. Решити интеграл $I = \int \ln(2x^2)dx$.

Решење.

$$\begin{aligned} I &= \int \ln(2x^2)dx = \left(\begin{array}{l} u = \ln(2x^2) \Rightarrow du = \frac{1}{2x^2} \cdot 4x dx = \frac{2}{x} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right) \\ &= x \ln(2x^2) - \int \frac{2x dx}{x} = x \ln(2x^2) - 2x + C. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.68. Решити интеграл $\int x \ln(1+x^2)dx$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int x \ln(1+x^2)dx &= \left(\begin{array}{l} u = \ln(1+x^2) \Rightarrow du = \frac{2x}{1+x^2} dx \\ dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right) \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln(1+x^2) - \int \frac{x^3}{1+x^2} dx. \end{aligned}$$

Важи

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{1+x^2} dx &= \left(\begin{array}{l} x^2 = t, t \geq 0 \\ 2x dx = dt \end{array} \right) = \frac{1}{2} \int \frac{t dt}{1+t} = \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+t} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} (t - \ln|1+t|) + C = \frac{1}{2} (x^2 - \ln(1+x^2)) + C, \end{aligned}$$

па је интеграл једнак

$$I = \frac{1}{2}x^2 \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} (x^2 - \ln(1+x^2)) + C = \frac{1}{2}x^2 \ln(1+x^2) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

△

ЗАДАТАК 1.69. Решити интеграл $I = \int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

Решење.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx = \left(\begin{array}{l} u = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ dv = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx \Rightarrow v = \sqrt{1+x^2} \end{array} \right) \\ &= \sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \int dx = \sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - x + C. \end{aligned}$$

△

Интеграл типа

$$\int \sin^n x dx \quad \text{и} \quad \int \cos^n x dx, n \geq 2$$

ЗАДАТАК 1.70. Доказати једнакости

$$I_n = \frac{1}{n} (-\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)I_{n-2}) + C,$$

$$J_n = \frac{1}{n} (\cos^{n-1} x \sin x + (n-1)J_{n-2}) + C,$$

где је $I_n = \int \sin^n x dx, J_n = \int \cos^n x dx, n \geq 2$.

Решење.

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int \sin^{n-1} x \sin x \, dx = \left(\begin{array}{l} u = \sin^{n-1} x \Rightarrow du = (n-1) \sin^{n-2} \cos x \, dx \\ dv = \sin x \, dx \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right) \\
 &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx \\
 &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx \\
 &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \, dx - (n-1) \int \sin^n x \, dx \\
 &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n.
 \end{aligned}$$

Добили смо

$$I_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n,$$

одакле је

$$I_n = \frac{1}{n} (-\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) I_{n-2}) + C.$$

Слично доказујемо и другу једнакост.

$$\begin{aligned}
 J_n &= \int \cos^{n-1} x \cos x \, dx = \left(\begin{array}{l} u = \cos^{n-1} x \Rightarrow du = -(n-1) \cos^{n-2} x \sin x \, dx \\ dv = \cos x \, dx \Rightarrow v = \sin x \end{array} \right) \\
 &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \sin^2 x \, dx \\
 &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x (1 - \cos^2 x) \, dx \\
 &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \, dx - (n-1) \int \cos^n x \, dx \\
 &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) J_{n-2} - (n-1) J_n.
 \end{aligned}$$

Добили смо

$$J_n = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) J_{n-2} - (n-1) J_n,$$

одакле је

$$J_n = \frac{1}{n} (\cos^{n-1} x \sin x + (n-1) J_{n-2}) + C.$$

△

ЗАДАТАК 1.71. Решити интеграле $I_1 = \int e^{ax} \cos bx \, dx$ и $I_2 = \int e^{ax} \sin bx \, dx$.

Решење.

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int e^{ax} \cos bx \, dx = \left(\begin{array}{l} u = \cos bx \Rightarrow du = -b \sin bx \, dx \\ dv = e^{ax} \Rightarrow v = \frac{1}{a} e^{ax} \end{array} \right) \\
 &= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx \, dx = \left(\begin{array}{l} u = \sin bx \Rightarrow du = b \cos bx \, dx \\ dv = e^{ax} \Rightarrow v = \frac{1}{a} e^{ax} \end{array} \right) \\
 &= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \left(\frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \int \cos bx e^{ax} \, dx \right) \\
 &= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx - \frac{b^2}{a^2} \int \cos bx e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx - \frac{b^2}{a^2} I_1.
 \end{aligned}$$

Добили смо да је

$$I_1 = \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

На сличан начин се добија

$$I_2 = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

△

ЗАДАТАК 1.72. Решити интеграл $I = \int e^{2x} \sin^2 x dx$.

Решење.

$$\begin{aligned} I &= \int e^{2x} \sin^2 x dx = \int e^{2x} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int e^{2x} dx - \frac{1}{2} \int e^{2x} \cos 2x dx \\ &= (\text{задатак 1.71}) = \frac{1}{4} e^{2x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{2x}(2 \cos 2x + 2 \sin 2x)}{8} + C = \frac{1}{8} e^{2x} (2 - \cos 2x - \sin 2x) + C. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.73. Решити интеграл $I = \int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$.

Решење. Први начин.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \left(\begin{array}{l} u = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow du = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx \\ dv = \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx \Rightarrow v = e^{\operatorname{arctg} x} \end{array} \right) \\ &= \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \left(\begin{array}{l} u = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow du = -\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx \\ dv = \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx \Rightarrow v = e^{\operatorname{arctg} x} \end{array} \right) \\ &= \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx \\ &= \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - I. \end{aligned}$$

Добили смо да важи $I = \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} - I$, односно

$$I = \frac{1}{2} \frac{(x-1)e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

Други начин.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \left(\begin{array}{l} \operatorname{arctg} x = t \\ \frac{dx}{1+x^2} = dt \end{array} \right) = \int \frac{e^t \operatorname{tg} t}{\frac{1}{|\cos t|}} dt = \int \frac{e^t \operatorname{tg} t}{\frac{1}{\cos t}} dt = \int e^t \sin t dt \\ &= (\text{задатак 1.71}) = \frac{e^t(\sin t - \cos t)}{2} + C = \frac{e^{\operatorname{arctg} x}(\sin(\operatorname{arctg} x) - \cos(\operatorname{arctg} x))}{2} + C. \end{aligned}$$

Из једнакости $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ и $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ имамо

$$\cos x = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}} \quad \text{и} \quad \sin x = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 x}},$$

па је

$$\cos(\arctg x) = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\arctg x)}} = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}},$$

$$\sin(\arctg x) = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2(\arctg x)}} = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}}} = \pm \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + 1}} = \pm \frac{|x|}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Искористили смо то да из $-\frac{\pi}{2} < \arctg x < \frac{\pi}{2}$ следи $\cos(\arctg x) > 0$, $\sin(\arctg x) > 0$ за $x > 0$ и $\sin(\arctg x) < 0$ за $x < 0$.

$$\text{Према томе, } I = \frac{1}{2} e^{\arctg x} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) + C = \frac{1}{2} \frac{(x-1)e^{\arctg x}}{\sqrt{1+x^2}} + C. \quad \triangle$$

ЗАДАТАК 1.74. Решити интеграле $I_1 = \int \sin(\ln x) dx$, $I_2 = \int \cos(\ln x) dx$.

Решење.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \sin(\ln x) dx = \left(\begin{array}{l} u = \sin(\ln x) \Rightarrow du = \frac{\cos(\ln x)}{x} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right) \\ &= x \sin(\ln x) - \int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx = x \sin(\ln x) - I_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \cos(\ln x) dx = \left(\begin{array}{l} u = \cos(\ln x) \Rightarrow du = -\frac{\sin(\ln x)}{x} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right) \\ &= x \cos(\ln x) + \int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx = x \cos(\ln x) + I_1. \end{aligned}$$

Добили смо $I_1 + I_2 = x \sin(\ln x)$, $I_2 - I_1 = x \cos(\ln x)$, одакле је

$$I_1 = \frac{x}{2} (\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C, \quad I_2 = \frac{x}{2} (\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) + C.$$

$\triangle$

Интеграл типа

$$I = \int \sqrt{ax^2 + c} dx$$

ЗАДАТАК 1.75. Решити интеграл $I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx$, ($a > 0$).

Решење. Први начин.

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left(\begin{array}{l} u = \sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow du = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right) \\ &= x \sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = x \sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{a^2 - x^2 - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \\ &= x \sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx + \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = x \sqrt{a^2 - x^2} - I + a^2 \arcsin \frac{x}{a} + C. \end{aligned}$$

Одавде је

$$I = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

Други начин.

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left(\begin{array}{l} x = a \sin t, t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ dx = a \cos t dt \end{array} \right) = a^2 \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt \\ &= a^2 \int |\cos t| \cos t dt = a^2 \int \cos^2 t dt = a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2}a^2 t + \frac{a^2}{4} \sin 2t + C \\ &= \frac{1}{2}a^2 \arcsin \frac{x}{a} + \frac{a^2}{4} \sin \left(2 \arcsin \frac{x}{a} \right) + C. \end{aligned}$$

Имамо тригонометријску једнакост

$$\sin \left(2 \arcsin \frac{x}{a} \right) = 2 \sin \left(\arcsin \frac{x}{a} \right) \cos \left(\arcsin \frac{x}{a} \right).$$

Из $\sin(\arcsin \alpha) = \alpha$, следи да је $\sin \left(\arcsin \frac{x}{a} \right) = \frac{x}{a}$, а из $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$, следи да је $\cos \left(\arcsin \frac{x}{a} \right) = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$. С обзиром да је $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin \frac{x}{a} \leq \frac{\pi}{2}$, важи $\cos \left(\arcsin \frac{x}{a} \right) \geq 0$, одакле је $\cos \left(\arcsin \frac{x}{a} \right) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$.

Према томе,

$$\sin \left(2 \arcsin \frac{x}{a} \right) = 2 \cdot \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{2}{a^2} x \sqrt{a^2 - x^2}$$

и

$$I = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

△

ЗАДАТАК 1.76. Решити интеграл $I = \int \sqrt{x^2 + a^2} dx$, $a > 0$.

Решење. Први начин.

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \left(\begin{array}{l} u = \sqrt{x^2 + a^2} \Rightarrow du = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right) \\ &= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx \\ &= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \sqrt{x^2 + a^2} dx + \int \frac{a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx \\ &= x\sqrt{x^2 + a^2} - I + a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C. \end{aligned}$$

Одавде је

$$I = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C.$$

Други начин. Задатак се може урадити сменом $x = a \operatorname{tg} t$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

△

ЗАДАТАК 1.77. Решити интеграл $I = \int \sqrt{x^2 - a^2} dx$, $(a > 0)$.

Решење. Први начин.

$$\begin{aligned}
 I &= \int \sqrt{x^2 - a^2} \, dx = \left(\begin{array}{l} u = \sqrt{x^2 - a^2} \Rightarrow du = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \, dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right) \\
 &= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} \, dx = x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2 - a^2 + a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} \, dx \\
 &= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \sqrt{x^2 - a^2} \, dx - \int \frac{a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} \, dx \\
 &= x\sqrt{x^2 - a^2} - I - a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C.
 \end{aligned}$$

Одавде је

$$I = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C.$$

Други начин. Задатак се може урадити сменом $x = a \cosh t$.

△

Интеграл типа

$$I = \int \sqrt{ax^2 + bx + c} \, dx$$

ЗАДАТАК 1.78. Решити интеграл $I = \int \sqrt{2x^2 - x + 1} \, dx$.

Решење.

$$\begin{aligned}
 I &= \int \sqrt{2x^2 - x + 1} \, dx = \sqrt{2} \int \sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}} \, dx \\
 &= \left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} + \frac{1}{2} = \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16} \right) = \sqrt{2} \int \sqrt{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}} \, dx \\
 &= \left(\begin{array}{l} x - \frac{1}{4} = t \\ dx = dt \end{array} \right) = \sqrt{2} \int \sqrt{t^2 + \frac{7}{16}} \, dt = (\text{задатак 1.76}) \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} t \sqrt{t^2 + \frac{7}{16}} + \frac{\sqrt{2} \cdot \frac{7}{16}}{2} \ln \left| t + \sqrt{t^2 + \frac{7}{16}} \right| + C \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{1}{4}\right) \sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}} + \frac{7\sqrt{2}}{32} \ln \left| x - \frac{1}{4} + \sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}} \right| + C \\
 &= \frac{1}{8} (4x - 1) \sqrt{2x^2 - x + 1} + \frac{7\sqrt{2}}{128} \ln \left| 4x - 1 + \sqrt{16x^2 - 8x + 8} \right| + C
 \end{aligned}$$

△

Интеграл типа

$$I = \int (ax + b) \sqrt{cx^2 + ex + f} \, dx$$

ЗАДАТАК 1.79. Решити интеграл $\int (3x + 1) \sqrt{2x^2 + x - 1} \, dx$.

Интеграл типа

$$I = \int x^2 \sqrt{a^2 + x^2} \, dx$$

ЗАДАТАК 1.80. Решити интеграл $I = \int x^2 \sqrt{a^2 + x^2} dx$.

Решење. Први начин.

$$\begin{aligned}
 I &= \int x^2 \sqrt{a^2 + x^2} dx \\
 &= \left(\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = x \sqrt{a^2 + x^2} dx \Rightarrow v = \int x \sqrt{a^2 + x^2} dx = \left(\begin{array}{l} a^2 + x^2 = t^2 \\ 2x dx = 2t dt \end{array} \right) = \frac{1}{3}(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} \end{array} \right) \\
 &= \frac{1}{3}x(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \int (a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} dx \\
 &= \frac{1}{3}x(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \int x^2(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} dx - \frac{a^2}{3} \int (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} dx \\
 &= \frac{1}{3}x(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \int x^2(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} dx - \frac{a^2}{3} \left[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| \right].
 \end{aligned}$$

Добили смо

$$I = \frac{1}{3}x(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}I - \frac{a^2}{6}x\sqrt{x^2 + a^2} - \frac{a^4}{6} \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}|,$$

одакле је

$$I = \frac{1}{4}x(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{a^2}{8}x\sqrt{x^2 + a^2} - \frac{a^4}{8} \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C.$$

Други начин. Задатак се може урадити сменом $x = a \operatorname{tg} t$.

△

Интеграл типа

$$\mathbf{I} = \int (\mathbf{b}\mathbf{x}^2 + \mathbf{c}\mathbf{x} + \mathbf{d})\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{x}^2} d\mathbf{x}$$

ЗАДАТАК 1.81. Решити интеграл $I = \int (2x^2 + 3x + 1)\sqrt{4 + x^2} dx$.

Интеграл типа

$$\mathbf{I}_n = \int \frac{1}{(\mathbf{x}^2 + \mathbf{a}^2)^n} d\mathbf{x}, \quad (\mathbf{n} \in \mathbb{N}, \mathbf{n} \geq 2)$$

ЗАДАТАК 1.82. Решити интеграл $I_2 = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx$.

Решење.

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C,$$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \left(\begin{array}{l} u = \frac{1}{x^2 + a^2} \Rightarrow du = \frac{-2xdx}{(x^2 + a^2)^2} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right) = \frac{x}{x^2 + a^2} + 2 \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^2} dx \\
 &= \frac{x}{x^2 + a^2} + 2 \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{x}{x^2 + a^2} + 2 \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx - 2a^2 \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx \\
 &= \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{2}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - 2a^2 I_2.
 \end{aligned}$$

Добили смо

$$\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} = \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{2}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - 2a^2 I_2,$$

одакле је

$$I_2 = \frac{1}{2a^2} \left[\frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right] + C.$$

△

ЗАДАТАК 1.83. Решити интеграл $I_n = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx$, ($n \geq 2$).

Решење.

$$\begin{aligned} I_{n-1} &= \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n-1}} dx = \left(\begin{array}{l} u = \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n-1}} \Rightarrow du = (1-n) \frac{2xdx}{(x^2 + a^2)^n} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right) \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} - 2(1-n) \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^n} \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} - 2(1-n) \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{(x^2 + a^2)^n} dx \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} - 2(1-n) \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + 2(1-n)a^2 \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} - 2(1-n)I_{n-1} + 2(1-n)a^2 I_n. \end{aligned}$$

Одавде је

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)a^2} \left[\frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1} \right].$$

△

Интеграл типа

$$\mathbf{I} = \int \frac{1}{(\mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c})^n} d\mathbf{x}$$

ЗАДАТАК 1.84. Решити интеграл $I = \int \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2} dx$.

Решење.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2} dx = \left(x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \right) \\ &= \int \frac{1}{[(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}]^2} dx = \left(\begin{array}{l} x + \frac{1}{2} = t \\ dx = dt \end{array} \right) = \int \frac{1}{(t^2 + \frac{3}{4})^2} dt = (\text{задатак 1.82}) \\ &= \frac{1}{\frac{3}{2}} \left[\frac{t}{t^2 + \frac{3}{4}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} \right] + C = \frac{2}{3} \left[\frac{x + \frac{1}{2}}{x^2 + x + 1} + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} \right] + C. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.85. Решити интеграл $I = \int \frac{3x - 1}{(x^2 + x + 2)^2} dx$.

Решење.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3x - 1}{(x^2 + x + 2)^2} dx = 3 \int \frac{x - \frac{1}{3}}{(x^2 + x + 2)^2} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x - \frac{2}{3}}{(x^2 + x + 2)^2} dx \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{2x + 1 - \frac{5}{3}}{(x^2 + x + 2)^2} dx = \frac{3}{2} \underbrace{\int \frac{2x + 1}{(x^2 + x + 2)^2} dx}_{I_1} - \frac{5}{2} \underbrace{\int \frac{1}{(x^2 + x + 2)^2} dx}_{I_2}, \end{aligned}$$

$$I_1 = \int \frac{2x+1}{(x^2+x+2)^2} dx = \left(\begin{array}{l} x^2+x+2=t \\ (2x+1)dx=dt \end{array} \right) = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{x^2+x+2} + C$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{1}{(x^2+x+2)^2} dx = \left(x^2+x+2 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 2 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \right) \\ &= \int \frac{1}{\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\right)^2} dx = \left(\begin{array}{l} x+\frac{1}{2}=t \\ dx=dt \end{array} \right) = \int \frac{1}{(t^2+\frac{7}{4})^2} dt = (\text{погледати задатак 1.83}) \\ &= \frac{1}{\frac{7}{2}} \left(\frac{t}{t^2+\frac{7}{4}} + \int \frac{1}{t^2+\frac{7}{4}} dt \right) = \frac{2}{7} \left(\frac{t}{t^2+\frac{7}{4}} + \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{7}} \right) + C \\ &= \frac{2}{7} \left(\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+2} + \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{7}} \right) + C \end{aligned}$$

Одавде је

$$I = \frac{3}{2}I_1 - \frac{5}{2}I_2 = -\frac{3}{2(x^2+x+2)} - \frac{5}{14} \frac{2x+1}{x^2+x+2} - \frac{10}{7\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{7}} + C.$$

△

1.3 Интеграција рационалних функција

Представимо рационалну функцију $R(x)$ у облику

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

где је $T(x)$ полином и степен полинома $P_1(x)$ мањи од степена полинома $Q(x)$ ($d^\circ P_1(x) < d^\circ Q(x)$).

Затим, рационалну функцију $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ можемо представити на следећи начин

$$\begin{aligned} \frac{P_1(x)}{Q(x)} &= \frac{P_1(x)}{A(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2} \cdots (x-a_p)^{k_p}(x^2+b_1x+c_1)^{l_1} \cdots (x^2+b_qx+c_q)^{l_q}} \\ &= \left[\frac{A_{1,1}}{x-a_1} + \frac{A_{1,2}}{(x-a_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1,k_1}}{(x-a_1)^{k_1}} \right] + \left[\frac{A_{2,1}}{x-a_2} + \frac{A_{2,2}}{(x-a_2)^2} + \cdots + \frac{A_{2,k_2}}{(x-a_2)^{k_2}} \right] \\ &\quad + \cdots + \left[\frac{A_{p,1}}{x-a_p} + \frac{A_{p,2}}{(x-a_p)^2} + \cdots + \frac{A_{p,k_p}}{(x-a_p)^{k_p}} \right] \\ &\quad + \left[\frac{B_{1,1}x+C_{1,1}}{x^2+b_1x+c_1} + \frac{B_{1,2}x+C_{1,2}}{(x^2+b_1x+c_1)^2} + \cdots + \frac{B_{1,l_1}x+C_{1,l_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{l_1}} \right] \\ &\quad + \left[\frac{B_{2,1}x+C_{2,1}}{x^2+b_2x+c_2} + \frac{B_{2,2}x+C_{2,2}}{(x^2+b_2x+c_2)^2} + \cdots + \frac{B_{2,l_2}x+C_{2,l_2}}{(x^2+b_2x+c_2)^{l_2}} \right] \\ &\quad + \cdots + \left[\frac{B_{q,1}x+C_{q,1}}{x^2+b_qx+c_q} + \frac{B_{q,2}x+C_{q,2}}{(x^2+b_qx+c_q)^2} + \cdots + \frac{B_{q,l_q}x+C_{q,l_q}}{(x^2+b_qx+c_q)^{l_q}} \right], \end{aligned}$$

при чему су квадратни триноми $x^2+b_ix+c_i$ нерастављиви ($b_i^2-4a_ic_i < 0$). Сабирке на десној страни једнакости назваћемо простим разломцима.

ЗАДАТАК 1.86. Решити интеграл $I = \int \frac{x}{x^3-3x+2} dx$.

Решење. Представљањем рационалне функције преко простих разломака добијамо

$$\frac{x}{x^3 - 3x + 2} = \frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2},$$

одакле множењем и леве и десне једнакости са $(x-1)^2(x+2)$ имамо

$$x \equiv A(x^2 + x - 2) + B(x + 2) + C(x^2 - 2x + 1),$$

односно за свако x важи

$$x \equiv x^2(A + C) + x(A + B - 2C) + (-2A + 2B + C).$$

Изједначавањем коефицијената уз исте степене имамо систем

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ A + B - 2C &= 1 \\ -2A + 2B + C &= 0, \end{aligned}$$

чије је решење $A = \frac{2}{9}, B = \frac{1}{3}, C = -\frac{2}{9}$. Сада интеграл можемо израчунати

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x}{(x-1)^2(x+2)} dx = \int \left(\frac{\frac{2}{9}}{x-1} + \frac{\frac{1}{3}}{(x-1)^2} - \frac{\frac{2}{9}}{x+2} \right) dx \\ &= \frac{2}{9} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{2}{9} \ln|x+2| + C. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.87. Решити интеграл $I = \int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx$.

Решење. Запишимо интеграл у следећем облику

$$I = \int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx = \int \left(1 + \frac{5x^2 - 6x + 1}{x(x-2)(x-3)} \right) dx.$$

Рационалну функцију запишимо преко простих разломака

$$\frac{5x^2 - 6x + 1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3},$$

одакле множењем са $x(x-2)(x-3)$ добијамо да за свако x важи

$$5x^2 - 6x + 1 \equiv x^2(A + B + C) + x(-5A - 3B - 2C) + 6A.$$

Одавде имамо систем

$$\begin{aligned} A + B + C &= 5, \\ -5A - 3B - 2C &= -6, \\ 6A &= 1, \end{aligned}$$

чије је решење $A = \frac{1}{6}, B = -\frac{9}{2}, C = \frac{28}{3}$. Према томе,

$$I = \int \left(1 + \frac{\frac{1}{6}}{x} + \frac{-\frac{9}{2}}{x-2} + \frac{\frac{28}{3}}{x-3} \right) dx = x + \frac{1}{6} \ln|x| - \frac{9}{2} \ln|x-2| + \frac{28}{3} \ln|x-3| + C.$$

△

ЗАДАТАК 1.88. Решити интеграл $I = \int \frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3} dx$.

Решење. Множењем израза

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{x+3} + \frac{E}{(x+3)^2} + \frac{F}{(x+3)^3}$$

са $(x+1)(x+2)^2(x+3)^3$ добијамо

$$1 \equiv A(x+2)^2(x+3)^3 + B(x+1)(x+3)^3 + C(x+1)(x+3)^3(x+2) + D(x+1)(x+2)^2 + E(x+1)(x+2)^2(x+3) + F(x+1)(x+2)^2(x+3)^2.$$

Замењујући x редом са $-1, -2, -3$, налазимо да је $A = \frac{1}{8}, B = -1, D = -\frac{1}{2}$. Затим, изједначавањем коефицијената уз x^5, x^4, x^3 добијамо систем једначина:

$$\begin{aligned} 0 &= A + C + F, \\ 0 &= 13A + B + 12C + E + 11F, \\ 0 &= 67A + 10B + 56C + D + 8E + 47F. \end{aligned}$$

Из прве једначине је $F = -C - \frac{1}{8}$. Заменом у другу и трећу добијамо

$$C + E = \frac{3}{4}, \quad 9C + 8E = 8,$$

па је $C = 2, E = -\frac{5}{4}$ и $F = -\frac{17}{8}$. Сада можемо израчунати интеграл

$$I = \frac{1}{8} \ln|x+1| + \frac{1}{x+2} + 2 \ln|x+2| + \frac{1}{4} \frac{1}{(x+3)^2} + \frac{5}{4(x+3)} - \frac{17}{8} \ln|x+3| + C.$$

△

ЗАДАТАК 1.89. Решити интеграл $I = \int \frac{1}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 5)} dx$.

Решење. Представљањем подинтегралне функције у облику

$$\frac{1}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 5)} = \frac{1}{(x-2)^2(x^2 - 4x + 5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 - 4x + 5}$$

добијамо да за свако x важи

$$1 \equiv A(x-2)(x^2 - 4x + 5) + B(x^2 - 4x + 5) + (Cx + D)(x-2)^2,$$

односно

$$x^3(A + C) + x^2(-4C - 6A + D + B) + x(4C - 4D + 13A - 4B) + 4D - 10A + 5B = 1.$$

Одавде имамо систем

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ -6A + B - 4C + D &= 0 \\ 13A - 4B + 4C - 4D &= 0 \\ -10A + 4D + 5B &= 1, \end{aligned}$$

чије је решење $A = 0, B = 1, C = 0, D = -1$, па је интеграл једнак

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 5)} = \int \frac{dx}{(x - 2)^2(x^2 - 4x + 5)} \\ &= \int \frac{dx}{(x - 2)^2} - \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 5} = \frac{1}{2 - x} - \operatorname{arctg}(2 - x) + C. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.90. Решити интеграл $I = \int \frac{1}{x^4 + 1} dx$.

Решење. Растављењем следећег полинома

$$x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$$

имамо

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{1}{(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}.$$

Из идентитета

$$1 \equiv (Ax + B)(x^2 - x\sqrt{2} + 1) + (Cx + D)(x^2 + x\sqrt{2} + 1)$$

добивамо систем једначина

$$\begin{aligned} 0 &= A + C, \\ 0 &= -\sqrt{2}A + B + \sqrt{2}C + D, \\ 0 &= A - \sqrt{2}B + C + \sqrt{2}D, \\ 1 &= B + D, \end{aligned}$$

чија су решења $A = \frac{1}{2\sqrt{2}}, C = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, B = D = \frac{1}{2}$. Одатле,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x + \sqrt{2}}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} dx - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x - \sqrt{2}}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} dx \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} \right| + \frac{1}{2\sqrt{2}} (\operatorname{arctg}(x\sqrt{2} + 1) + \operatorname{arctg}(x\sqrt{2} - 1)) + C. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.91. Решити интеграл $I = \int \frac{1}{x^6 + 1} dx$.

Решење. Растављењем полинома

$$\begin{aligned} x^6 + 1 &= (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) = (x^2 + 1)(x^4 + 2x^2 + 1 - 3x^2) = (x^2 + 1)((x^2 + 1)^2 - 3x^2) \\ &= (x^2 + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1) \end{aligned}$$

имамо

$$\frac{1}{x^6 + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 + \sqrt{3}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 - \sqrt{3}x + 1} + \frac{Ex + F}{x^2 + 1},$$

одакле добијамо

$$1 \equiv x^5(A + C + E) + x^4(-\sqrt{3}A + B + \sqrt{3}C + D + F) + x^3(2A - \sqrt{3}B + 2C + \sqrt{3}D - E) + x^2(-\sqrt{3}A + 2B + \sqrt{3}C + 2D - F) + x(A - \sqrt{3}B + C + \sqrt{3}D + E) + B + D + F.$$

Систем је

$$\begin{aligned} A + C + E &= 0, \\ -\sqrt{3}A + B + \sqrt{3}C + D + F &= 0, \\ 2A - \sqrt{3}B + 2C + \sqrt{3}D - E &= 0, \\ -\sqrt{3}A + 2B + \sqrt{3}C + 2D - F &= 0, \\ A - \sqrt{3}B + C + \sqrt{3}D + E &= 0, \\ B + D + F &= 1 \end{aligned}$$

и има решење $A = \frac{\sqrt{3}}{6}, B = \frac{1}{3}, C = -\frac{\sqrt{3}}{6}, D = \frac{1}{3}, E = 0, F = \frac{1}{3}$. Дакле,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{1}{3}}{x^2 + \sqrt{3}x + 1} dx + \int \frac{-\frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{1}{3}}{x^2 - \sqrt{3}x + 1} dx + \int \frac{\frac{1}{3}}{x^2 + 1} dx \\ &= \frac{1}{12} \left(\sqrt{3} \ln \frac{x^2 + \sqrt{3}x + 1}{x^2 - \sqrt{3}x + 1} - 2 \operatorname{arctg}(\sqrt{3} - 2x) + 2 \operatorname{arctg}(2x + \sqrt{3}) + 4 \operatorname{arctg} x \right) + C. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.92. Решити интеграл $I = \int \frac{x^3}{(x-1)^{100}} dx$.

Решење.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^3}{(x-1)^{100}} dx = \left(\begin{array}{l} x-1=t \\ dx=dt \end{array} \right) = \int \frac{(t+1)^3}{t^{100}} dt = \int \frac{t^3 + 3t^2 + 3t + 1}{t^{100}} dt \\ &= \int \frac{dt}{t^{97}} + 3 \int \frac{dt}{t^{98}} + 3 \int \frac{dt}{t^{99}} + \int \frac{dt}{t^{100}} = -\frac{1}{96t^{96}} - \frac{3}{97t^{97}} - \frac{3}{98t^{98}} - \frac{1}{99t^{99}} + C \\ &= -\frac{1}{96(x-1)^{96}} - \frac{3}{97(x-1)^{97}} - \frac{3}{98(x-1)^{98}} - \frac{1}{99(x-1)^{99}} + C. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.93. Решити интеграл $I = \int \frac{x^4 - 3}{x(x^8 + 3x^4 + 2)} dx$.

Решење.

$$\int \frac{x^4 - 3}{x(x^8 + 3x^4 + 2)} dx = \int \frac{x^3(x^4 - 3)dx}{x^4(x^8 + 3x^4 + 2)} = \left(\begin{array}{l} x^4=t \\ 4x^3dx=dt \end{array} \right) = \frac{1}{3} \int \frac{(t-3)dt}{t(t^2 + 3t + 2)}$$

Множењем израза

$$\frac{(t-3)dt}{t(t^2 + 3t + 2)} = \frac{(t-3)dt}{t(t+2)(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+2} + \frac{C}{t+1}$$

са $t(t+2)(t+1)$ добијамо

$$t-3 \equiv A(t+2)(t+1) + Bt(t+1) + Ct(t+2).$$

Узимајући редом $t = 0, -1, -2$, добијамо $A = -\frac{3}{2}, B = -\frac{5}{2}, C = 4$. Одавде је

$$I = -\frac{3}{8} \ln |t| + \ln |t+1| - \frac{5}{8} \ln |t+2| + C = -\frac{3}{8} \ln |x^4| + \ln |x^4+1| - \frac{5}{8} \ln |x^4+2| + C.$$

△

ЗАДАТАК 1.94. Решити интеграл $I = \int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1} dx$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1} dx &= \int \frac{x^n x^{n-1} dx}{x^n+1} = \left(\begin{array}{l} x^n = t \\ nx^{n-1} dx = dt \end{array} \right) = \frac{1}{n} \int \frac{t dt}{t+1} \\ &= \frac{1}{n} \int \left(1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = \frac{1}{n} (t - \ln |t+1|) + C = \frac{1}{n} (x^n - \ln |x^n+1|) + C. \end{aligned}$$

△

1.4 Интеграција ирационалних функција

Интеграл типа

$$I = \int \mathbf{R}(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx$$

решавамо сменом $\sqrt[n]{ax+b} = t$.

ЗАДАТАК 1.95. Решити интеграл $I = \int \frac{x \sqrt[3]{2+x}}{x + \sqrt[3]{2+x}} dx$.

Решење.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x \sqrt[3]{2+x}}{x + \sqrt[3]{2+x}} dx = \left(\begin{array}{l} 2+x = t^3 \\ dx = 3t^2 dt \end{array} \right) = \int \frac{3t^3(t^3-2)}{t^3-2+t} dx = \\ &= 3 \int \frac{t^6-2t^3}{t^3-2+t} dx = 3 \int \left(t^3 - t + \frac{t^2-2t}{t^3-2+t} \right) dx. \end{aligned}$$

Представљањем рационалне функције помоћу простих разломака добијамо

$$\frac{t^2-2t}{t^3-2+t} = \frac{t^2-2t}{(t-1)(t^2+t+2)} = \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+t+2},$$

одакле множењем једнакости са $(t-1)(t^2+t+2)$ и изједначавањем коефицијената имамо систем

$$\begin{aligned} 1 &= A + B, \\ -2 &= A - B + C, \\ 0 &= 2A - C, \end{aligned}$$

чије је решење $A = -\frac{1}{4}, B = \frac{5}{4}, C = -\frac{1}{2}$.

Према томе,

$$\begin{aligned} I &= 3 \int \left(t^3 - t + \frac{t^2-2t}{t^3-2+t} \right) dx = \frac{3}{4} t^4 - \frac{3}{2} t^2 - \frac{3}{4} \int \frac{dt}{t-1} + \frac{15}{4} \int \frac{t - \frac{2}{5}}{t^2+t+2} dt \\ &= -\frac{3}{4} \ln |t-1| + \frac{15}{8} \ln |t^2+t+2| - \frac{27}{4\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{7}} + C \\ &= \frac{3}{4} (2+x)^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{2} (2+x)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{4} \ln |\sqrt[3]{2+x} - 1| + \frac{15}{8} \ln |(2+x)^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{2+x} + 2| \\ &\quad - \frac{27}{4\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{2+x}+1}{\sqrt{7}} + C. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.96. Израчунати $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}} dx$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}} dx &= \left(\begin{array}{l} x+1=t^2 \\ dx=2tdt \end{array} \right) = \int \frac{t+2}{t^4-t} 2tdt = 2 \int \frac{t+2}{t^3-1} dt \\ &= 2 \int \left(\frac{1}{t-1} + \frac{-t-1}{t^2+x+1} \right) dt = -\ln(t^2+t+1) + 2\ln(1-t) - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C \\ &= -\ln(2x+2) + 2\ln(1-\sqrt{x+1}) - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}} + C \end{aligned}$$

△

Интеграл типа

$$\int \mathbf{R} \left(\mathbf{x}, \sqrt[n]{\frac{\mathbf{ax} + \mathbf{b}}{\mathbf{cx} + \mathbf{d}}} \right) d\mathbf{x}$$

решавамо сменом $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$.

ЗАДАТАК 1.97. Решити интеграл $I = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}, \quad (a > 0)$.

Решење. Подинтегрална функција је дефинисана за $x \in (0, a)$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4 \cdot \frac{a-x}{x}}} = \int \frac{dx}{|x| \sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}} \stackrel{x>0}{=} \int \frac{dx}{x \sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}} = \left(\begin{array}{l} \frac{a-x}{x} = t^4, t \geq 0 \\ x = \frac{a}{1+t^4} \\ dx = -\frac{4at^3}{(1+t^4)^2} dt \end{array} \right) \\ &= - \int \frac{4at^3}{\frac{a}{1+t^4} t (1+t^4)^2} dt = - \int \frac{4at^3}{at(1+t^4)} dt = -4 \int \frac{t^2}{1+t^4} dt \\ &= (\text{интеграл рационалне функције}) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{t^2 - \sqrt{2}t + 1}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} + \sqrt{2} \operatorname{arctg}(1 - \sqrt{2}t) - \sqrt{2} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}t + 1) + C \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{\frac{a-x}{x}} - \sqrt{2} \sqrt[4]{\frac{a-x}{x}} + 1}{\sqrt{\frac{a-x}{x}} + \sqrt{2} \sqrt[4]{\frac{a-x}{x}} + 1} + \sqrt{2} \operatorname{arctg} \left(1 - \sqrt{2} \sqrt[4]{\frac{a-x}{x}} \right) \\ &\quad - \sqrt{2} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{2} \sqrt[4]{\frac{a-x}{x}} + 1 \right) + C \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{a-x} - \sqrt{2} \sqrt[4]{x(a-x)} + \sqrt{x}}{\sqrt{a-x} + \sqrt{2} \sqrt[4]{x(a-x)} + \sqrt{x}} + \sqrt{2} \operatorname{arctg} \left(1 - \sqrt{2} \sqrt[4]{\frac{a-x}{x}} \right) \\ &\quad - \sqrt{2} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{2} \sqrt[4]{\frac{a-x}{x}} + 1 \right) + C. \end{aligned}$$

△

Интеграл типа

$$\int \frac{\mathbf{P}_n(\mathbf{x})}{\sqrt{\mathbf{ax}^2 + \mathbf{bx} + \mathbf{c}}} d\mathbf{x}$$

се може решити методом Остроградског за ирационалне функције тако што интеграл представимо у следећем облику

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

ЗАДАТАК 1.98. Решити интеграл $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}} dx$.

Решење. Нека постоје константе A, B, C, λ тако да је

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}} dx = (Ax^2 + Bx + C)\sqrt{1+2x-x^2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}.$$

Диференцирањем добијамо

$$\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}} = (2Ax + B)\sqrt{1+2x-x^2} + (Ax^2 + Bx + C)\frac{1-x}{\sqrt{1+2x-x^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1+2x-x^2}},$$

а одавде множењем са $\sqrt{1+2x-x^2}$ имамо

$$x^3 = (2Ax + B)(1+2x-x^2) + (Ax^2 + Bx + C)(1-x) + \lambda,$$

односно

$$x^3 = x^3(-3A) + x^2(5A - 2B) + x(2A + 3B - C) + (B + C + \lambda).$$

Из система

$$\begin{aligned} -3A &= 1, \\ 5A - 2B &= 0, \\ 2A + 3B - C &= 0, \\ B + C + \lambda &= 0, \end{aligned}$$

добијамо константе $A = -\frac{1}{3}, B = -\frac{5}{6}, C = -\frac{19}{3}, \lambda = 4$. Дакле, интеграл је једнак

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}} dx &= \left(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x - \frac{19}{3}\right)\sqrt{1+2x-x^2} + 4 \int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} \\ &= \left(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x - \frac{19}{3}\right)\sqrt{1+2x-x^2} + 4 \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{2}} + C. \end{aligned}$$

△

Интеграл типа

$$\int \mathbf{R}(\mathbf{x}, \sqrt{a\mathbf{x}^2 + b\mathbf{x} + c}) d\mathbf{x}$$

Овакви интеграли се могу решити следећим Ојлеровим сменама:

- 1) Ако је $a > 0$, онда ћемо узети прву Ојлерову смену $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{ax} + t$;
- 2) Ако је $c > 0$, онда ћемо узети другу Ојлерову смену $\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c}$;
- 3) Ако је $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, онда ћемо узети трећу Ојлерову смену $\sqrt{ax^2 + bx + c} = a(x - x_1)t$.

ЗАДАТАК 1.99. Решити интеграл $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} &= \left(\begin{array}{l} a = 1 > 0, c = 1 > 0 \\ \sqrt{x^2 + x + 1} = \pm x + t \text{ прва Ојлерова смена} \\ \sqrt{x^2 + x + 1} = tx \pm 1 \text{ друга Ојлерова смена} \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{l} \text{изабраћемо прву Ојлерову смену } x + \sqrt{x^2 + x + 1} = -x + t \\ x^2 + x + 1 = x^2 - 2xt + t^2 \\ x(1 + 2t) = t^2 - 1 \\ x = \frac{t^2 - 1}{1 + 2t} \\ dx = \frac{2t(1 + 2t) - 2(t^2 - 1)}{(1 + 2t)^2} dt = \frac{2t^2 + 2t + 2}{(1 + 2t)^2} dt \end{array} \right) \\ &= \int \frac{2t^2 + 2t + 2}{t(1 + 2t)^2} dt. \end{aligned}$$

Разлагање подинтегралне функције тражимо у облику

$$\frac{2t^2 + 2t + 2}{t(1 + 2t)^2} = \frac{A}{(1 + 2t)^2} + \frac{B}{1 + 2t} + \frac{C}{t}.$$

За одређивање непознатих A, B и C добијамо систем

$$\begin{aligned} 2 &= 2B + 4C \\ 2 &= A + B + 4C \\ 2 &= C, \end{aligned}$$

чија су решења $A = -3, B = -3, C = 2$. Одавде је

$$\begin{aligned} \int \frac{2t^2 + 2t + 2}{t(1 + 2t)^2} dt &= -3 \int \frac{dt}{(1 + 2t)^2} - 3 \int \frac{dt}{1 + 2t} + 2 \int \frac{dt}{t} \\ &= \frac{3}{2(1 + 2t)} + \frac{1}{2} \ln \frac{t^4}{|1 + 2t|^3} + C \\ &= \frac{3}{2(1 + 2x + 2\sqrt{x^2 + x + 1})} + \frac{1}{2} \ln \frac{(x + \sqrt{x^2 + x + 1})^4}{|1 + 2x + 2\sqrt{x^2 + x + 1}|^3} + C. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.100. Решити интеграл $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}} &= \left(\begin{array}{l} c = 1 > 0, \text{ друга Ојлерова смена} \\ \sqrt{1 - 2x - x^2} = xt - 1 \\ x = \frac{2t - 2}{1 + t^2}, dx = \frac{2(1 + t^2) - (2t - 2)2t}{(1 + t^2)^2} dt = \frac{-2t^2 + 4t + 2}{(1 + t^2)^2} dt \end{array} \right) \\ &= \int \frac{\frac{-t^2 + 2t + 1}{(1 + t^2)^2}}{\frac{t - 1}{1 + t^2} t} dt = \int \frac{-t^2 + 2t + 1}{t(t - 1)(1 + t^2)} dt. \end{aligned}$$

Разлагањем подинтегралне функције функције на просте разломке, имамо

$$\frac{-t^2 + 2t + 1}{t(t-1)(1+t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{Ct + D}{1+t^2},$$

одакле следи

$$-t^2 + 2t + 1 \equiv A(t^3 - t^2 + t - 1) + B(t^3 + t) + (Ct + D)(t^2 - t)$$

и систем који се добија изједначавањем коефицијената уз исте степене

$$\begin{aligned} 0 &= A + B + C, \\ -1 &= -A - C + D, \\ 2 &= A + B - D, \\ 1 &= -A. \end{aligned}$$

Решење система је $A = -1, B = 1, C = 0$ и $D = 2$. Следи

$$\begin{aligned} I &= -\int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{t-1} + 2 \int \frac{dt}{t^2+1} = \ln \left| \frac{t-1}{t} \right| + 2 \operatorname{arctg} t + C \\ &= \ln \left| \frac{1 + \sqrt{1-2x-x^2}-x}{1 + \sqrt{1-2x-x^2}} \right| + 2 \operatorname{arctg} \frac{1 + \sqrt{1-2x-x^2}}{x} + C. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.101. Решити интеграл $\int \frac{x - \sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}} dx$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int \frac{x - \sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}} dx &= \left(\begin{array}{l} x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2), \text{ трећа Ојлерова смена} \\ \sqrt{x^2 + 3x + 2} = t(x+1) \\ x = \frac{2-t^2}{t^2-1}, dx = -\frac{2tdt}{(t^2-1)^2} \end{array} \right) \\ &= -\int \frac{\frac{2-t^2}{t^2-1} - t(\frac{2-t^2}{t^2-1} + 1)}{\frac{2-t^2}{t^2-1} + t(\frac{2-t^2}{t^2-1} + 1)} \cdot \frac{2tdt}{(t^2-1)^2} = \int \frac{-2t^2 - 4t}{(t-2)(t-1)(t+1)^3} dt. \end{aligned}$$

Разлагањем подинтегралне функције функције на просте разломке добијамо

$$\frac{-2t^2 - 4t}{(t-2)(t-1)(t+1)^3} = \frac{A}{(t+1)^3} + \frac{B}{(t+1)^2} + \frac{C}{t+1} + \frac{D}{t-1} + \frac{E}{t-2},$$

одакле, изједначавањем коефицијената уз исте степене и решавањем система, имамо $A = \frac{1}{3}, B = \frac{5}{18}, C = -\frac{17}{108}, D = \frac{3}{4}$ и $E = -\frac{16}{27}$. Следи

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{6(t+1)^2} - \frac{5}{18(t+1)} - \frac{17}{108} \ln |t+1| + \frac{3}{4} \ln |t-1| - \frac{16}{27} \ln |t-2| + C \\ &= -\frac{1}{6(\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1} + 1)^2} - \frac{5}{18(\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1} + 1)} - \frac{17}{108} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1} + 1 \right| \\ &\quad + \frac{3}{4} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1} - 1 \right| - \frac{16}{27} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1} - 2 \right| + C. \end{aligned}$$

△

Интеграл типа

$$\int \mathbf{x}^m (\mathbf{a} + \mathbf{bx}^n)^p dx$$

где је $m, n, p \in \mathbb{Q}$, своди се на интеграл рационалне функције у следећа три случаја:

- 1) Ако је $p \in \mathbb{Z}$, онда се уводи смена $x = t^{NZS\{imen(m), imen(n)\}}$, где су $imen(m), imen(n)$ имениоци бројева m и n .
- 2) Ако је $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, онда се уводи смена $a + bx^n = t^{imen(p)}$.
- 3) Ако је $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, онда се уводи смена $ax^{-n} + b = t^{imen(p)}$.

ЗАДАТАК 1.102. Решити интеграл $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2} dx$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2} dx &= \int x^{\frac{1}{2}} (1+x^{-\frac{2}{3}})^{-2} dx = \left(\begin{array}{l} m = \frac{1}{2}, n = -\frac{2}{3}, p = -2, a = 1, b = 1 \\ p \in \mathbb{Z} \\ x = t^{NZS\{2,3\}} = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right) \\ &= 6 \int \frac{t^8}{(1+t^2)^2} = 6 \int \left(t^4 - 2t^2 + 3 - \frac{4t^2+3}{(1+t^2)^2} \right) dt \\ &= \left(\frac{4t^2+3}{(1+t^2)^2} = \frac{4}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2} \right) \\ &= \frac{6}{5} t^5 - 4t^3 + 18t + \frac{3t}{1+t^2} - 21 \arctg t + C \\ &= \frac{6}{5} x^{\frac{5}{6}} - 4x^{\frac{1}{2}} + 18\sqrt[6]{x} + \frac{3\sqrt[6]{x}}{1+x^{\frac{1}{3}}} - 21 \arctg \sqrt[6]{x} + C. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.103. Решити интеграл $\int \sqrt{x^3+x^4} dx$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^3+x^4} dx &= \int \sqrt{x^4(x^{-1}+1)} dx = \int x^2 \sqrt{x^{-1}+1} dx \\ &= \left(\begin{array}{l} m = 2, n = -1, p = \frac{1}{2}, a = 1, b = 1 \\ \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z} \\ 1 + \frac{1}{x} = t^2, t \geq 0 \\ x = \frac{1}{t^2-1}, dx = \frac{-2tdt}{(t^2-1)^2} \end{array} \right) = -2 \int \frac{t^2}{(t^2-1)^4} dt \\ &= \left(\frac{t^2}{(t^2-1)^4} = \frac{-\frac{1}{32}}{t+1} + \frac{-\frac{1}{32}}{(t+1)^2} + \frac{\frac{1}{16}}{(t+1)^4} + \frac{\frac{1}{32}}{t-1} + \frac{-\frac{1}{32}}{(t-1)^2} + \frac{\frac{1}{16}}{(t-1)^4} \right) \\ &= \frac{1}{16} \left(\int \frac{dt}{t+1} + \int \frac{dt}{(t+1)^2} - 2 \int \frac{dt}{(t+1)^4} - \int \frac{dt}{t-1} + \int \frac{dt}{(t-1)^2} - 2 \int \frac{dt}{(t-1)^4} \right) + C \\ &= \frac{1}{16} \left(\ln|t+1| - \frac{1}{t+1} + \frac{2}{3} \frac{1}{(t+1)^3} - \ln|t-1| - \frac{1}{t-1} + \frac{2}{3} \frac{1}{(t-1)^3} \right) + C \\ &= \frac{1}{16} \left(\ln \left| \sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1 \right| - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} + \frac{2}{3} \frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1 \right)^3} - \ln \left| \sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1 \right| \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1} + \frac{2}{3} \frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1 \right)^3} \right) + C. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.104. Израчунати интеграл $\int \sqrt[3]{3x - x^3} dx$.

Решење.

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt[3]{3x - x^3} dx &= \int \sqrt[3]{x} \sqrt[3]{3 - x^2} dx = \int x^{\frac{1}{3}} (3 - x^2)^{\frac{1}{3}} dx \\
 &= \left(\begin{array}{l} m = \frac{1}{3}, n = 2, p = \frac{1}{3}, a = 3, b = -1 \\ \frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z} \\ 3x^{-2} - 1 = t^3, \\ x = \left(\frac{3}{t^3+1}\right)^{\frac{1}{2}}, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{t^3+1}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{-9t^2}{(t^3+1)^2} dt \end{array} \right) \\
 &= \int \left(\frac{3}{t^3+1}\right)^{\frac{1}{6}} \left(3 - \frac{3}{t^3+1}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} \left(\frac{3}{t^3+1}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{-9t^2}{(t^3+1)^2} dt \\
 &= \int \left(\frac{3}{t^3+1}\right)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{3t^3}{t^3+1}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} \left(\frac{3}{t^3+1}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{-9t^2}{(t^3+1)^2} dt \\
 &= -\frac{9}{2} \int \frac{t^3}{(t^3+1)^2} dt \\
 &= -\frac{9}{2} \int \left(\frac{1}{9} \cdot \frac{3-t}{t^2-t+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{t-1}{(t^2-t+1)^2} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{t+1} - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{(t+1)^2} \right) dt \\
 &= -\frac{1}{4} \left(-\frac{6t}{t^3+1} - \ln(t^2-t+1) + 2\ln(t+1) + 2\sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right) + C \\
 &= -\frac{1}{4} \left(-\frac{6(3x^{-2}-1)^{\frac{1}{3}}}{3x^{-2}} - \ln \left((3x^{-2})^{\frac{2}{3}} - (3x^{-2}-1)^{\frac{1}{3}} + 1 \right) \right. \\
 &\quad \left. + 2\ln \left((3x^{-2}-1)^{\frac{1}{3}} + 1 \right) + 2\sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2(3x^{-2}-1)^{\frac{1}{3}}-1}{\sqrt{3}} \right) + C.
 \end{aligned}$$

△

Интеграл типа

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{ax^2 + bx}} \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{(ax^2 + b)^{\frac{3}{2}}}$$

се ради сменом $x = \frac{1}{t}$

ЗАДАТАК 1.105. Решити интеграл $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{ax^2 + bx}}$.

Решење. Први начин.

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{ax^2 + bx}} = \left(\begin{array}{l} x = \frac{1}{t} \\ dx = -\frac{1}{t^2} \end{array} \right) = - \int \frac{tdt}{\sqrt{a+bt^2}} = -\frac{1}{b} \sqrt{a+bt^2} + C = -\frac{ax^2+b}{bx} + C.$$

Други начин. Интеграл се може урадити сменом $x = \frac{b}{a} \operatorname{tg} t$.

△

ЗАДАТАК 1.106. Решити интеграл $\int \frac{dx}{(ax^2 + b)^{\frac{3}{2}}}$.

Решење. Први начин.

$$\int \frac{dx}{(ax^2 + b)^{\frac{3}{2}}} = \left(\begin{array}{l} x = \frac{1}{t} \\ dx = -\frac{1}{t^2} \end{array} \right) = - \int \frac{tdt}{(a + bt^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{b} \frac{1}{\sqrt{a + bt^2}} + C = \frac{1}{b} \frac{x}{\sqrt{ax^2 + b}} + C.$$

Други начин. Интеграл се може урадити сменом $x = \frac{b}{a} \operatorname{tg} t$. △

ЗАДАТАК 1.107. Решити интеграл $\int \frac{x - \sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}} dx$.

1.5 Интеграција тригонометријских функција

Интеграл облика $\int R(\sin x, \cos x) dx$

- 1) Ако је $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, онда узети смену $\cos x = t$.
- 2) Ако је $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, онда узети смену $\sin x = t$.
- 3) Ако је $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, онда узети смену $\operatorname{tg} x = t$, при чему је $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$, $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$.
- 4) Универзална смена је $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ и узима се када не важи ниједна од претходних једнакости. Код ове смене важи $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

ЗАДАТАК 1.108. Решити интеграл $\int \frac{\sin x \cos x}{1 - \sin^2 x \cos^2 x} dx$.

Решење. С обзиром да је $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ увешћемо смену $\cos x = t$ и добијамо

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x \cos x}{1 - \sin^2 x \cos^2 x} dx &= - \int \frac{t}{1 - (1 - t^2)t^2} dt = - \int \frac{t}{1 - t^2 + t^4} dt = \left(\begin{array}{l} u = t^2 \\ du = 2t dt \end{array} \right) \\ &= - \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2 - u + 1} = - \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2 - u + 1} \\ &= - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2u - 1}{\sqrt{3}} \right) + C = - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2t^2 - 1}{\sqrt{3}} \right) + C \\ &= - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2 \cos^2 x - 1}{\sqrt{3}} \right) + C. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.109. Решити интеграл $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

Решење. С обзиром да је $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ узећемо смену $\operatorname{tg} x = t$ и

добивамо

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} &= \left(\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \end{array} \right) = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^4}{(1+t^2)^2} + \frac{1}{(1+t^2)^2}} \\
 &= \int \frac{(1+t^2)dt}{t^4+1} = \int \frac{(1+\frac{1}{t^2})dt}{t^2+\frac{1}{t^2}} = \int \frac{(1+\frac{1}{t^2})dt}{(t-\frac{1}{t})^2+2} = \left(\begin{array}{l} t-\frac{1}{t}=u \\ (1+\frac{1}{t^2})dt=du \end{array} \right) \\
 &= \int \frac{du}{u^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t-\frac{1}{t}}{\sqrt{2}} + C \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x - \frac{1}{\operatorname{tg} x}}{\sqrt{2}} + C.
 \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.110. Решити интеграл $\int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5}$.

Решење. С обзиром да је

$$R(-\sin x, \cos x) \neq -R(\sin x, \cos x),$$

$$R(\sin x, -\cos x) \neq -R(\sin x, \cos x),$$

$$R(-\sin x, -\cos x) \neq R(\sin x, \cos x),$$

узећемо смену $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5} &= \left(\begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right) = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{4t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} \\
 &= \int \frac{2dt}{4t-1+t^2+5(1+t^2)} = \int \frac{2dt}{6t^2+4t+4} = \int \frac{dt}{3t^2+2t+2} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3t+1}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + C.
 \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.111. Решити интеграл $\int \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^8 x + \cos^8 x} dx$.

Решење.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^8 x + \cos^8 x} dx &= \int \frac{\frac{1}{4} \sin^2 2x}{(\sin^4 x + \cos^4 x)^2 - 2 \sin^4 x \cos^4 x} dx \\
 &= \int \frac{\frac{1}{4} \sin^2 2x}{((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x)^2 - 2 \sin^4 x \cos^4 x} dx \\
 &= \int \frac{\frac{1}{4} \sin^2 2x}{(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x)^2 - \frac{1}{8} \sin^4 2x} dx = (2x = u) = \frac{1}{2} \int \frac{\frac{1}{4} \sin^2 u}{(1 - \frac{1}{2} \sin^2 u)^2 - \frac{1}{8} \sin^4 u} du \\
 &= \left(\operatorname{tg} u = t, du = \frac{dt}{1+t^2}, \sin^2 u = \frac{t^2}{1+t^2} \right) = \frac{1}{2} \int \frac{\frac{1}{4} \frac{t^2}{1+t^2}}{\left(1 - \frac{1}{2} \frac{t^2}{1+t^2}\right)^2 - \frac{1}{8} \frac{(t^2)^2}{(1+t^2)^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} \\
 &= \int \frac{t^2}{t^4 + 8t^2 + 8} dt = \frac{\sqrt{2}-2}{4\sqrt{2}-\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} + \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{2}-\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}} + C \\
 &= \frac{\sqrt{2}-2}{4\sqrt{2}-\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} + \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{2}-\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}} + C.
 \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.112. Решити интеграл $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx$.

Решење. $\frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} \tanh^{-1} \left(\frac{\operatorname{tg}(x/2)-1}{\sqrt{2}} \right) + C$

△

ЗАДАТАК 1.113. Решити интеграл $\int \frac{\sin x dx}{\cos x \sqrt{1 + \sin^2 x}}$.

Решење.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sin x dx}{\cos x \sqrt{1 + \sin^2 x}} &= \left(\begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right) = - \int \frac{dt}{t \sqrt{2 - t^2}} = - \int \frac{t dt}{t^2 \sqrt{2 - t^2}} \\
 &= \left(\begin{array}{l} 2 - t^2 = u^2, u \geq 0 \\ -2t dt = 2u du \end{array} \right) = \int \frac{u du}{(2 - u^2)u} = \int \frac{du}{2 - u^2} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{u + \sqrt{2}}{u - \sqrt{2}} + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{1 + \sin^2 x} + \sqrt{2}}{\sqrt{1 + \sin^2 x} - \sqrt{2}} + C.
 \end{aligned}$$

△

1.6 Интеграција трансцендентних функција

Интеграл типа

$$\int \mathbf{R}(e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \dots, e^{a_n x}) dx$$

се ради сменом $e^x = t$.

ЗАДАТАК 1.114. Решити интеграл $\int \frac{dx}{1 + e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{3}} + e^{\frac{x}{6}}}$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{3}} + e^{\frac{x}{6}}} &= \left(\begin{array}{l} e^x = t \\ dx = \frac{dt}{t} \end{array} \right) = \int \frac{dt}{t(1 + \sqrt{t} + \sqrt[3]{t} + \sqrt[6]{t})} = \left(\begin{array}{l} t = u^6 \\ dt = 6u^5 du \end{array} \right) \\ &= \int \frac{6u^5 du}{u^6(1 + u^3 + u^2 + u)} = 6 \int \frac{du}{u(u^2 + 1)(u + 1)}. \end{aligned}$$

Представљањем последње подинтегралне функције помоћу простих разломака

$$\int \frac{du}{u(u^2 + 1)(u + 1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u + 1} + \frac{Cu + D}{u^2 + 1}$$

и множењем са $u(u^2 + 1)(u + 1)$ имамо

$$1 \equiv A + B + (A + D)x + (A + B + C + D)x^2 + (A + C)x^3,$$

одакле је $A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}, C = -\frac{1}{2}, D = -\frac{1}{2}$. Према томе,

$$\begin{aligned} I &= 6 \left(\frac{\frac{1}{2}}{u} - \frac{\frac{1}{2}}{u + 1} + \frac{-\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}}{u^2 + 1} \right) \\ &= -3 \operatorname{arctg} u + 6 \ln |u| - 3 \ln |1 + u| - \frac{3}{2} \ln(1 + u^2) + C \\ &= -3 \sqrt[6]{t} + \ln |t| - 3 \ln |1 + \sqrt[6]{t}| - \frac{3}{2} \ln(1 + \sqrt[3]{t}) + C \\ &= -3 \operatorname{arctg} e^{\frac{x}{6}} + x - 3 \ln |1 + e^{\frac{x}{6}}| - \frac{3}{2} \ln(1 + e^{\frac{x}{3}}) + C. \end{aligned}$$

△

1.7 Разни задаци

ЗАДАТАК 1.115. Решити интеграл $\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1} dx$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} dx &= \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{(x - \frac{1}{x})^2 + 2 + 1} dx = \left(\begin{array}{l} x - \frac{1}{x} = t \\ (1 - \frac{1}{x^2}) dx = dt \end{array} \right) \\ &= \int \frac{dt}{t^2 + 3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{3}x} + C. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.116. Израчунати интеграл $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1} dx$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1} dx &= \int \frac{x^2 (1 + \frac{1}{x^2})}{x^2 (x^2 - 1 + \frac{1}{x^2})} dx = \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{(x - \frac{1}{x})^2 + 1} dx \\ &= \left(\begin{array}{l} x - \frac{1}{x} = t \\ (1 + \frac{1}{x^2}) dx = dt \end{array} \right) = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg} \left(x - \frac{1}{x} \right) + C. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.117. Решити интеграл $I = \int \frac{\arcsin x}{x^2} \cdot \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Решење.

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2} \cdot \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left(\frac{\arcsin x = t}{\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt} \right) = \int \frac{t(1+\sin^2 t)}{\sin^2 t} dt = \int t dt + \int \frac{t}{\sin^2 t} dt.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{t}{\sin^2 t} dt &= \left(\begin{array}{l} u = t \Rightarrow du = dt \\ dv = \frac{1}{\sin^2 t} dt \Rightarrow v = -\operatorname{ctg} t \end{array} \right) = -t \operatorname{ctg} t + \int \operatorname{ctg} t dt \\ &= -t \operatorname{ctg} t + \ln |\sin t| + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \int t dt + \int \frac{t}{\sin^2 t} dt = \frac{t^2}{2} - t \operatorname{ctg} t + \ln |\sin t| + C \\ &= \frac{(\arcsin x)^2}{2} - (\arcsin x) \operatorname{ctg} (\arcsin x) + \ln |x| + C \\ &= \frac{(\arcsin x)^2}{2} - (\arcsin x) \frac{\cos(\arcsin x)}{\sin(\arcsin x)} \operatorname{ctg} (\arcsin x) + \ln |x| + C \\ &= \frac{(\arcsin x)^2}{2} - (\arcsin x) \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \ln |x| + C. \end{aligned}$$

У последњој једнакости смо искористили $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$, па је $\cos(\arcsin x)$ ненегативан и важи $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$. $\triangle$

ЗАДАТАК 1.118. Решити интеграл $I = \int \frac{ax^2+b}{x^2+1} \operatorname{arctg} x dx$.

Решење.

$$\int \frac{ax^2+b}{x^2+1} \operatorname{arctg} x dx = \left(\frac{\operatorname{arctg} x = t}{\frac{dx}{1+x^2} = dt} \right) = \int (a \operatorname{tg}^2 t + b) t dt = \int a t \operatorname{tg}^2 t dt + \frac{bt^2}{2},$$

$$\begin{aligned} \int t \operatorname{tg}^2 t dt &= \left(\begin{array}{l} u = t \Rightarrow du = dt \\ dv = \operatorname{tg}^2 t dt \Rightarrow v = \int \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} dt = \int \frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t} dt = \operatorname{tg} t - t \end{array} \right) \\ &= t(\operatorname{tg} t - t) - \int (\operatorname{tg} t - t) dt = t \operatorname{tg} t - t^2 + \ln |\cos t| + \frac{t^2}{2} + C, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= a t \operatorname{tg} t - a t^2 + a \ln |\cos t| + \frac{at^2}{2} + \frac{bt^2}{2} + C \\ &= a x \operatorname{arctg} x + a \ln |\cos(\operatorname{arctg} x)| + \frac{(b-a)(\operatorname{arctg} x)^2}{2} + C \\ &= a x \operatorname{arctg} x - \frac{a}{2} \ln |1+x^2| + \frac{(b-a)(\operatorname{arctg} x)^2}{2} + C. \end{aligned}$$

$\triangle$

ЗАДАТАК 1.119. Решити интеграл $I = \int (2x^2 + 3x + 1) \sqrt{4+x^2} dx$.

Решење.

$$\begin{aligned}
 I &= \int (2x^2 + 3x + 1)\sqrt{4+x^2} dx = \left(\begin{array}{l} x = 2\operatorname{tg} t, t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ dx = \frac{2dt}{\cos^2 t} \end{array} \right) \\
 &= \int (4\operatorname{tg}^2 t + 6\operatorname{tg} t + 1) \frac{4dt}{\cos^3 t} = 16 \int \frac{\operatorname{tg}^2 t dt}{\cos^3 t} + 24 \int \frac{\operatorname{tg} t dt}{\cos^3 t} + 4 \int \frac{dt}{\cos^3 t} \\
 &= 8 \underbrace{\int \frac{\sin^2 t dt}{\cos^5 t}}_{I_1} + 12 \underbrace{\int \frac{\sin t dt}{\cos^4 t}}_{I_2} + 2 \underbrace{\int \frac{dt}{\cos^3 t}}_{I_3}.
 \end{aligned}$$

У интеграле I_1 и I_3 увести смену $u = \sin t$, а у интеграл I_2 смену $u = \cos t$.

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int \frac{\sin^2 t dt}{\cos^5 t} = \int \frac{\sin^2 t \cos t dt}{\cos^6 t} = \left(\begin{array}{l} u = \sin t, \\ du = \cos t dt \end{array} \right) \\
 &= \int \frac{u^2 du}{(1-u^2)^3} = \frac{1}{16} \left(\frac{2(u^3 + u)}{(u^2 - 1)^2} + \ln \frac{1-u}{1+u} \right) + C \\
 &= \frac{1}{16} \left(\frac{2(\sin^3 t + \sin t)}{(\sin^2 t - 1)^2} + \ln \frac{1 - \sin t}{1 + \sin t} \right) + C,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int \frac{\sin t dt}{\cos^4 t} = \left(\begin{array}{l} u = \cos t, \\ du = -\sin t dt \end{array} \right) \\
 &= \int \frac{-du}{u^4} = \frac{1}{3u^3} + C = \frac{1}{3\cos^3 t} + C,
 \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 1.120. Решити интеграл $I = \int \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x dx$.

Решење.

$$I = \int \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x dx = \int e^x dx - 4 \int \frac{e^x}{x} dx + 4 \int \frac{e^x}{x^2} dx.$$

Парцијалном интеграцијом у другом интегралу добијамо

$$\int \frac{e^x}{x} = \left(\begin{array}{l} u = \frac{1}{x} \Rightarrow du = -\frac{1}{x^2} dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{array} \right) = \frac{e^x}{x} + \int \frac{e^x}{x^2} dx$$

и заменом у првој једнакости имамо

$$I = e^x - 4 \left(\frac{e^x}{x} + \int \frac{e^x}{x^2} dx \right) dx + 4 \int \frac{e^x}{x^2} dx = e^x - \frac{4e^x}{x} + C = e^x \left(1 - \frac{4}{x}\right) + C.$$

△

ЗАДАТАК 1.121. Израчунати интеграл $\int (1 + 2x^2)e^{x^2} dx$.

Решење.

$$\int (1 + 2x^2)e^{x^2} dx = \underbrace{\int e^{x^2} dx}_{I_1} + \underbrace{\int 2x^2 e^{x^2} dx}_{I_2}.$$

$$I_2 = \int 2x^2 e^{x^2} dx = xe^{x^2} - \int e^{x^2} dx = xe^{x^2} - I_1.$$

Према томе,

$$\int (1 + 2x^2)e^{x^2} dx = xe^{x^2} + C.$$

△

2 Одређени интеграли

Уочимо сегмент $[a, b] \subset \mathbb{R}$ Коначан скуп тачака $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$, такав да је $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, назваћемо поделом сегмента $[a, b]$. Нека је $\mathbb{P}$ скуп свих подела сегмента. На овом скупу можемо посматрати релацију $\subset$,

$$P_1 \subset P_2 \quad (\text{подела } P_2 \text{ је финија од поделе } P_1).$$

У свакој подели P увешћемо ознаке $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$ и појам дијаметра поделе поделе $\lambda(P) = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$. На сваком сегменту $[x_{i-1}, x_i]$ можемо изабрати по тачку ξ_i . На овај начин добили смо поделу P са изабраним тачкама $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$, у ознаци (P, Ξ) .

Дефиниција 2.1. Нека је $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ и (P, Ξ) је нека подела сегмента $[a, b]$ са изабраним тачкама. Збир

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

се назива интегралном сумом функције f за дату поделу (P, Ξ) , у ознаци $\sigma(f, P, \Xi)$.

Ако бирамо тачке ξ_i као десне границе сегмента $[x_{i-1}, x_i]$ ($\xi_i = x_i$), онда добијемо десну Риманову суму $\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$, а ако бирамо као леву границу сегмента $\xi_i = x_{i-1}$, онда добијемо леву Риманову суму $\sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x_i$.

Дефиниција 2.2. За функцију $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ кажемо да је интеграбилна у Римановом смислу (или Риман интеграбилна) на сегменту $[a, b]$ ако постоји коначан лимес

$$\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sigma(f, P, \Xi) = I,$$

а то значи да постоји $I \in \mathbb{R}$ тако да за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ тако да за сваку поделу (P, Ξ) код које је $\lambda(P) < \delta$ важи $|\sigma(f, P, \Xi) - I| < \varepsilon$.

Дакле,

$$\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sigma(f, P, \Xi) = I \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall (P, \Xi))(\lambda(P) < \delta \Rightarrow |\sigma(f, P, \Xi) - I| < \varepsilon).$$

У том случају број I записаћемо као $I = \int_a^b f(x) dx$ и рећи ћемо да је Риманов интеграл функције f на сегменту $[a, b]$. Вредност a је доња граница, а вредност b је горња граница интеграла. Функција f је подинтегрална функција, а интеграциона променљива је x и она се може заменити било којим словом, то јест

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(m) dm$$

за Риман интеграбилну функцију f . Скуп свих интеграбилних функција у Римановом смислу на сегменту $[a, b]$ означаћемо са $R[a, b]$.

Дефиниција 2.3. Нека је $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена функција и нека је $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ подела. Горња Дарбуова сума функције f за поделу P је

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^n \sup_{\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i,$$

а доња Дарбуова сума је

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^n \inf_{\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

Означимо $M_i = \sup_{\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi_i)$ и $m_i = \inf_{\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi_i)$.

Дефиниција 2.4. Подела $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ сегмента a, b је равномерна ако је $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ за свако $i = 1, \dots, n$, то јест сви сегменти су исте дужине. У овом случају $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$ за свако $i = 1, \dots, n$.

Теорема 2.1. Нека је функција $f: [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна, а функција $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [A, B]$ има непрекидан извод и при томе је $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, $[a, b] \subset [A, B]$. Тада важи једнакост

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

ЗАДАТАК 2.1. Доказати да је константна функција $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = c$ Риман интеграбилна на $[a, b]$ и да важи $\int_a^b f(x) dx = c(b-a)$. Нека је (P, Ξ) произвољна подела сегмента $[a, b]$ са изабраним тачкама, $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ и $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$. Интегрална сума је једнака

$$\sigma(f, P, \Xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n c \Delta x_i = c \sum_{i=1}^n \Delta x_i = c(b-a).$$

За сваку поделу важи $\sigma(f, P, \Xi) = c(b-a)$, па је $\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sigma(f, P, \Xi) = c(b-a)$. Доказали смо $\int_a^b f(x) dx = c(b-a)$, а за $c = 1$ имамо $\int_a^b dx = b-a$.

ЗАДАТАК 2.2. Доказати да Дирихлеова функција $\chi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана са

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0, & x \in \mathbb{I} \cap [0, 1]. \end{cases}$$

није Риман интеграбилна на $[0, 1]$.

Нека је $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ произвољна подела. У сваком сегменту $[x_{i-1}, x_i]$ можемо изабрати тачку $\xi'_i \in \mathbb{Q}$, а можемо изабрати $\xi''_i \in \mathbb{I}$ (јер су скупови $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{I}$ густе у $\mathbb{R}$). Одавде

$$\sigma(f, P, \Xi') = \sum_{i=1}^n f(\xi'_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n 1 \cdot (x_i - x_{i-1}) = b-a,$$

$$\sigma(f, P, \Xi'') = \sum_{i=1}^n f(\xi''_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n 0 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0.$$

За сваку поделу (колико год да је уситњена) можемо изабрати Ξ' и Ξ'' тако да је $\sigma(f, P, \Xi') = b-a$ и $\sigma(f, P, \Xi'') = 0$. Одавде не постоји $\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sigma(f, P, \Xi)$, па Дирихлеова функција није Риман интеграбилна на $[0, 1]$.

ЗАДАТАК 2.3. Израчунати горњу Дарбуову суму $S(f, P)$ и доњу Дарбуову суму $s(f, P)$ за функцију $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ за равномерну поделу P на $2n$ једнаких делова.

Важи $x_i = -1 + i \cdot \frac{b-a}{2n} = -1 + \frac{i}{n}$ и $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{2n} = \frac{2}{2n} = \frac{1}{n}$. Функција је опадајућа на $[-1, 0]$, па је $M_i = f(x_{i-1})$ и $m_i = f(x_i)$ за $i = 1, \dots, n$. Функција је растућа на $[0, 1]$, па је $M_i = f(x_i)$ и $m_i = f(x_{i-1})$ за $i = n+1, \dots, 2n$. Одавде

$$\begin{aligned} S(f, P) &= \sum_{i=1}^{2n} M_i \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^n M_i \cdot \frac{1}{n} + \sum_{i=n+1}^{2n} M_i \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \cdot \frac{1}{n} + \sum_{i=n+1}^{2n} f(x_i) \cdot \frac{1}{n} \\ &= \sum_{i=1}^n f\left(-1 + \frac{i-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} + \sum_{i=n+1}^{2n} f\left(-1 + \frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} \\ &= \sum_{i=1}^n \left| -1 + \frac{i-1}{n} \right| \cdot \frac{1}{n} + \sum_{i=n+1}^{2n} \left| -1 + \frac{i}{n} \right| \cdot \frac{1}{n} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{i-1}{n} \right) \cdot \frac{1}{n} + \sum_{i=n+1}^{2n} \left(-1 + \frac{i}{n} \right) \cdot \frac{1}{n} = 1 - \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{n^2} - 1 + \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{i}{n^2} \\ &= \frac{1}{n^2} \left(-\sum_{i=1}^n (i-1) + \sum_{i=n+1}^{2n} i \right) = 1 + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

На сличан начин се покаже да је $s(f, P) = 1 - \frac{1}{n}$.

ЗАДАТАК 2.4. Израчунати граничну вредност

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \frac{n}{n^2+3^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right).$$

Решење. Важи

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \frac{n}{n^2+3^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} \end{aligned}$$

при чему је функција $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Ова сума је управо интегрална сума (десна Риманова сума) за функцију $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ при подели $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$, где је $x_k = \frac{k}{n}$ и за избор $\varepsilon_k = \frac{k}{n}$, $k = 1, 2, \dots, n$, па је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \frac{n}{n^2+3^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Прва једнакост следи на основу тога што је функција f непрекидна на $[0, 1]$, одакле је и Риман интегрална на $[0, 1]$ и важи

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sigma(f, P, \Xi).$$

Дакле, за било који низ подела са изабраним тачкама чији дијаметар тежи нули важи

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{\lambda(P_n) \rightarrow 0} \sigma(f, P_n, \Xi).$$

Ако изаберемо низ подела којег смо представили (низ десних Риманових сума) добијамо

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \frac{n}{n^2+3^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right).$$

△

Теорема 2.2. (Парцијална интеграција код одређеног интеграла) Нека функције $u(x)$ и $v(x)$ имају непрекидне изводе на $[a, b]$. Тада важи једнакост

$$\int_a^b u(x)dv(x) = [u(x)v(x)]\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x).$$

ЗАДАТАК 2.5. Израчунати $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x|dx$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x|dx &= \int_{\frac{1}{e}}^1 |\ln x|dx + \int_1^e |\ln x|dx = - \int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x dx + \int_1^e \ln x dx \\ &= \left(\begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right) = -x \ln x \Big|_{\frac{1}{e}}^1 + \int_{\frac{1}{e}}^1 dx + x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx \\ &= -\frac{1}{e} + \left(1 - \frac{1}{e}\right) + e - (e - 1) = 2 - \frac{2}{e}. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 2.6. Израчунати $\int_0^{\sqrt{3}} x \arctg x dx$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} x \arctg x dx &= \left(\begin{array}{l} u = \arctg x \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right) = \frac{x^2}{2} \arctg x \Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{1+x^2} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} (x - \arctg x) \Big|_0^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 2.7. Израчунати интеграл $I_n = \int_1^{n+1} \ln[x] dx, n \in \mathbb{N}$.

Решење.

$$\begin{aligned} I_n &= \int_1^{n+1} \ln[x] dx = \int_1^2 \ln[x] dx + \int_2^3 \ln[x] dx + \dots + \int_n^{n+1} \ln[x] dx \\ &= \ln 1 \int_1^2 dx + \ln 2 \int_2^3 dx + \dots + \ln n \int_n^{n+1} dx = \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n = \ln n!. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 2.8. Израчунати интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \operatorname{tg} 2x dx$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{8}} \operatorname{tg} 2x dx &= \left(\begin{array}{l} 2x = t \\ 2dx = dt \end{array} \right) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{\cos t} dt = -\frac{1}{2} \ln |\cos t| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\ln \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 \right) = \frac{1}{2} \ln \sqrt{2} = \frac{\ln 2}{4}. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 2.9. Израчунати интеграл $\int_0^e \frac{e^x + 1}{e^x + x} dx$.

Решење.

$$\int_0^e \frac{e^x + 1}{e^x + x} dx = \left(\begin{array}{l} e^x + x = t \\ (e^x + 1)dx = dt \end{array} \right) = \int_1^{e^e + e} \frac{dt}{t} = \ln |t| \Big|_1^{e^e + e} = \ln(e^e + 1).$$

△

ЗАДАТАК 2.10. Израчунати $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 4x + 3}}$.

Решење.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 4x + 3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + \frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2 + \frac{1}{2}}} \\ &= \left(\begin{array}{l} x+1 = t \\ dx = dt \end{array} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(t + \sqrt{t^2 + \frac{1}{2}} \right) \Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{2 + \sqrt{\frac{9}{2}}}{1 + \sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{2\sqrt{2} + 3}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln (2\sqrt{6} - 4 + 3\sqrt{3} - 3\sqrt{2}). \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 2.11. Израчунати интеграл $\int_1^4 \operatorname{arctg} \sqrt{\sqrt{x}-1} dx$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int_1^4 \operatorname{arctg} \sqrt{\sqrt{x}-1} dx &= \left(\begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} \sqrt{\sqrt{x}-1} \Rightarrow du = \frac{1}{1+\sqrt{x}-1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x}-1}} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{x}} \\ du = \frac{1}{2x} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{\sqrt{x}-1}} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right) \\ &= x \operatorname{arctg} \sqrt{\sqrt{x}-1} \Big|_1^4 - \frac{1}{4} \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}-1}} = 4 \operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{4} \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}-1}} \\ &= 4 \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}-1}} = \left(\frac{\sqrt{x}-1=t^2}{\frac{dx}{2\sqrt{x}}=2t dt} \right) = \pi - \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{4t(t^2+1)dt}{t} \\ &= \pi - \int_0^1 (t^2+1) = \pi - \frac{1}{3} t^3 \Big|_0^1 - t \Big|_0^1 = \pi - \frac{1}{3} - 1 = \pi - \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 2.12. Израчунати интеграл $\int_0^3 \ln(x^2+2) dx$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int_0^3 \ln(x^2+2) dx &= \left(\begin{array}{l} u = \ln(x^2+2) \Rightarrow du = \frac{2x}{x^2+2} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right) = x \ln(x^2+2) \Big|_0^3 - 2 \int_0^3 \frac{x^2}{x^2+2} dx \\ &= 3 \ln(11) - 2 \int_0^3 \left(1 - \frac{2}{x^2+2} \right) dx = 3 \ln(11) - 2 \left(3 - \frac{2}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} \Big|_0^3 \right) \\ &= 3 \ln(11) - 2 \left(3 - \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{3}{\sqrt{2}} \right) = 3 \ln(11) - 6 + 2\sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{3}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 2.13. Израчунати интеграл $\int_0^1 x^3 \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^3 \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx &= \left(\begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \Rightarrow du = -\frac{dx}{x^2+1} \\ dv = x^3 dx \Rightarrow v = \frac{x^4}{4} \end{array} \right) = \frac{x^4}{4} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \Big|_0^1 + \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{x^4 dx}{x^2+1} \\ &= \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{4} - 0 + \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{x^4 dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{16} + \frac{1}{4} \int_0^1 \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1} \right) dx \\ &= \frac{\pi}{16} + \frac{1}{4} \left(\frac{x^3}{3} \Big|_0^1 - x \Big|_0^1 + \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 \right) = \frac{\pi}{16} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \frac{\pi}{16} + \frac{1}{12} - \frac{1}{4} + \frac{\pi}{16} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 2.14. Израчунати интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{2x(x^2+1)} dx$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dx}{2x(x^2+1)} dx &= \int_1^2 \frac{x dx}{2x^2(x^2+1)} dx = \left(\begin{array}{l} x^2 = t, t \geq 0 \\ 2x dx = dt \end{array} \right) = \int_1^4 \frac{dt}{4t(t+1)} = \frac{1}{4} \int_1^4 \frac{dt}{t(t+1)} \\ &= \frac{1}{4} \left(\int_1^4 \frac{dt}{t} - \int_1^4 \frac{dt}{t+1} \right) = \frac{1}{4} (\ln 4 - (\ln 5 - \ln 2)) = \frac{1}{4} \ln \frac{8}{5}. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 2.15. Израчунати $I = \int_2^3 \frac{dx}{x^3+x^2-2}$.

Решење.

$$\int_2^3 \frac{dx}{x^3+x^2-2} = \int_2^3 \frac{dx}{(x-1)(x^2+2x+2)},$$

Множењем једнакости

$$\frac{1}{x^3+x^2-2} = \frac{1}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$$

са $(x+1)(x^2+2x+2)$ добијамо систем

$$A+B=0, \quad 2A-B+C=0, \quad 2A-C=1$$

чије је решење $A = \frac{1}{5}$, $B = -\frac{1}{5}$, $C = -\frac{3}{5}$. Према томе, интеграл је једнак

$$\int_2^3 \left(\frac{\frac{1}{5}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{5}x - \frac{3}{5}}{x^2+2x+2} \right) dx = \frac{1}{5} \int_2^3 \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{5} \int_2^3 \frac{x+3}{x^2+2x+2} dx = \frac{1}{5} I_1 - \frac{1}{5} I_2,$$

$$I_1 = \int_2^3 \frac{dx}{x-1} = \ln(x-1) \Big|_2^3 = \ln 2,$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_2^3 \frac{x+3}{x^2+2x+2} dx = \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{2x+6}{x^2+2x+2} dx = \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx + \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{4}{x^2+2x+2} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+2) \Big|_2^3 + 2 \int_2^3 \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \frac{1}{2} \ln \frac{17}{10} + 2 \arctg(x+1) \Big|_2^3 \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{17}{10} + 2 \arctg 4 - 2 \arctg 3. \end{aligned}$$

Добили смо

$$I = \frac{1}{5}I_1 - \frac{1}{5}I_2 = \frac{1}{5}\ln 2 - \frac{1}{10}\ln \frac{17}{10} - \frac{2}{5}\operatorname{arctg} 4 + \frac{2}{5}\operatorname{arctg} 3.$$

△

ЗАДАТАК 2.16. Израчунати интеграл $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx &= \left(\begin{array}{l} e^x - 1 = t^2, t \geq 0 \\ e^x dx = 2t dt \\ dx = \frac{2t dt}{1+t^2} \end{array} \right) = \int_0^2 \frac{(t^2 + 1)t}{t^2 + 4} \cdot \frac{2t dt}{1+t^2} = 2 \int_0^2 \frac{t^2 dt}{t^2 + 4} \\ &= 2 \left(\int_0^2 dt - 4 \int_0^2 \frac{dt}{t^2 + 4} \right) = 2 \left(2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} \Big|_0^2 \right) \\ &= 2(2 - \operatorname{arctg} 1) = 2 \left(2 - 2 \cdot \frac{\pi}{4} \right) = 4 - \pi. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 2.17. Израчунати интеграл $\int_{-1}^2 |xe^x| dx$.

Решење.

$$I = \int_{-1}^2 |xe^x| dx = \int_{-1}^0 |xe^x| dx + \int_0^2 |xe^x| dx = - \int_{-1}^0 xe^x dx + \int_0^2 xe^x dx.$$

$$I_1 = \int xe^x dx. \left(\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{array} \right) = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

$$\begin{aligned} I &= - \int_{-1}^0 xe^x dx + \int_0^2 xe^x dx = -(xe^x - e^x) \Big|_{-1}^0 + (xe^x - e^x) \Big|_0^2 \\ &= -(0 - 1 + e^{-1} + e^{-1}) + (2e^2 - e^2 + 1) = 1 - \frac{2}{e} + e^2 + 1 = e^2 - \frac{2}{e} + 2. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 2.18. Доказати да за непарну функцију f важи $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

Решење.

$$\begin{aligned} I &= \int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \left(\begin{array}{l} \text{уведемо смену у првом интегралу} \\ t = -x, \quad dt = -dx \end{array} \right) \\ &= - \int_a^0 f(-t) dt + \int_0^a f(x) dx = \left(\begin{array}{l} \text{Функција је непарна} \\ f(-x) = -f(x) \end{array} \right) = \int_a^0 f(t) dt + \int_0^a f(x) dx = 0. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 2.19. Доказати да за парну функцију f важи $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

Решење.

$$\begin{aligned} I &= \int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \left(\begin{array}{l} \text{уведемо смену у првом интегралу} \\ t = -x, \quad dt = -dx \end{array} \right) \\ &= - \int_a^0 f(-t) dt + \int_0^a f(x) dx = \left(\begin{array}{l} \text{Функција је парна} \\ f(-x) = f(x) \end{array} \right) = - \int_a^0 f(t) dt + \int_0^a f(x) dx \\ &= \int_0^a f(t) dt + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 2.20. Израчунати интеграл $\int_0^\pi \frac{\sin^3 x \cos x}{1 + \cos^2 x} dx$.

Решење.

$$\int_0^\pi \frac{\sin^3 x \cos x}{1 + \cos^2 x} dx = \left(\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{2} = t \\ dx = dt \end{array} \right) = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 t \sin t}{1 + \sin^2 t} dt = 0.$$

Подинтегрална функција $f(t) = \frac{\cos^3 t \sin t}{1 + \sin^2 t}$ је непарна на симетричном интервалу $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, па је интеграл једнак 0. △

ЗАДАТАК 2.21. Израчунати $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{13 + \operatorname{arctg} x + e^x \cos^2 x}{\cos x} dx$.

Решење. Важи

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{13 + \operatorname{arctg} x + e^x \cos^2 x}{\cos x} dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{13}{\cos x} + \frac{\operatorname{arctg} x}{\cos x} + e^x \cos x \right) dx \\ &= 13 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{arctg} x}{\cos x} dx + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e^x \cos x dx = I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned}$$

при чему је

$$\begin{aligned} I_1 &= 13 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = 13 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} = \left(\begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right) = 13 \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{1-t^2} = \frac{13}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \Big|_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= \frac{13}{2} \left(\ln \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} - \ln \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} \right) = \frac{13}{2} \left(\ln \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} - \ln \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \right) = 13 \ln \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

$$I_2 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{arctg} x}{\cos x} dx = 0.$$

Урадимо неодређени интеграл

$$\begin{aligned} I_3 &= \int e^x \cos x dx = \left(\begin{array}{l} u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx \\ dv = e^x \Rightarrow v = e^x \end{array} \right) \\ &= e^x \cos x + \int e^x \sin x dx = \left(\begin{array}{l} u = \sin x \Rightarrow du = \cos x \\ dv = e^x \Rightarrow v = e^x \end{array} \right) \\ &= e^x \cos x + \left(e^x \sin x - \int \cos x e^x \right) \\ &= e^x \cos x + e^x \sin x - \int \cos x e^x = e^x \cos x + e^x \sin x - I_3. \end{aligned}$$

Добили смо да је

$$I_3 = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C,$$

одакле је

$$I_3 = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{4}}.$$

Према томе,

$$I = 13 \ln \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{4}}.$$

△

ЗАДАТАК 2.22. Израчунати интеграл $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{arctg} x + x^5 + 3}{1+|x|} dx$.

Решење. Функција $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x + x^5}{1+|x|}$ је непарна на симетричном интервалу $(-\pi, \pi)$, па је интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{arctg} x + x^5}{1+|x|} dx$ једнак 0. Према томе,

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{arctg} x + x^5 + 3}{1+|x|} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{3}{1+|x|} dx.$$

Функција $f(x) = \frac{3}{1+|x|}$ је парна на $(-\pi, \pi)$, па је

$$I = 2 \int_0^{\pi} \frac{3}{1+|x|} dx = 6 \int_0^{\pi} \frac{1}{1+x} dx = 6 \ln(1+x) \Big|_0^{\pi} = 6 \ln(1+\pi).$$

△

ЗАДАТАК 2.23. Израчунати интеграл $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + \cos x}{3|\sin x| + 2\cos^2 x} dx$.

Решење. Функција $f(x) = \frac{x}{3|\sin x| + 2\cos^2 x}$ је непарна на симетричном интервалу $(-\pi, \pi)$, а функција $g(x) = \frac{\cos x}{3|\sin x| + 2\cos^2 x}$ је парна на $(-\pi, \pi)$, па је интеграл једнак

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + \cos x}{3|\sin x| + 2\cos^2 x} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{3|\sin x| + 2\cos^2 x} dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{3|\sin x| + 2\cos^2 x} dx \\ &= 0 + 6 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{3\sin x + 2\cos^2 x} dx = \left(\begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos dx = dt \end{array} \right) = 6 \int_0^1 \frac{dt}{3t + 2(1-t^2)} \\ &= 6 \int_0^1 \frac{dt}{-2t^2 + 3t + 2} = -6 \int_0^1 \frac{dt}{2t^2 - 3t - 2} = -6 \int_0^1 \frac{dt}{(2t+1)(t-2)} \\ &= -6 \int_0^1 \left(\frac{-\frac{2}{5}}{2t+1} + \frac{\frac{1}{5}}{t-2} \right) dt = \frac{12}{5} \cdot \frac{1}{2} \ln(2t+1) \Big|_0^1 - \frac{6}{5} \ln|t-2| \Big|_0^1 = \frac{6}{5} \ln 3 + \frac{6}{5} \ln 2 \\ &= \frac{6}{5} \ln 6. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 2.24. Израчунати позитиван број a , ако је

$$\int_{-a}^a \frac{\operatorname{arctg} x + 1009 + 2018x}{|x| + 2018} dx = \ln 2^{2018}.$$

Решење.

$$I = \int_{-a}^a \frac{\operatorname{arctg} x + 1009 + 2018x}{|x| + 2018} dx = \int_{-a}^a \frac{\operatorname{arctg} x + 2018x}{|x| + 2018} dx + \int_{-a}^a \frac{1009}{|x| + 2018} dx.$$

С обзиром да је $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x + 2018x}{|x| + 2018}$ непарна, а $g(x) = \frac{1009}{|x| + 2018}$ парна функција имамо

$$I = 2 \int_0^a \frac{1009}{x + 2018} = 2018 \int_0^a \frac{1}{x + 2018} = 2018 \ln(x + 2018) \Big|_0^a = 2018 \ln \left(\frac{a + 2018}{2018} \right).$$

Одавде важи

$$\ln 2^{2018} = 2018 \ln \left(\frac{a + 2018}{2018} \right),$$

односно $a = 2018$.

△

ЗАДАТАК 2.25. Нека је f непрекидна и периодична функција на $(-\infty, +\infty)$ са периодом T . Тада важи:

$$\text{а) } \int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx = \int_b^{b+T} f(x) dx, \text{ за свако } a, b \in \mathbb{R};$$

$$\text{б) } \int_a^{a+kT} f(x) dx = k \int_a^{a+T} f(x) dx, \text{ за свако } a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z};$$

$$\text{в) } \int_a^b f(x) dx = \int_{a+kT}^{b+kT} f(x) dx \text{ за свако } a, b \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}.$$

Решење. а) Важи

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx.$$

Ако у другом интегралу уведемо смену $x - T = t$ добијамо

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^T f(x) dx + \int_0^a f(t+T) dt = \int_a^T f(x) dx + \int_0^a f(t) dt = \int_0^T f(x) dx.$$

Ово важи за свако $a \in \mathbb{R}$, па одатле важи и једнакост $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_b^{b+T} f(x) dx$.

б)

$$\begin{aligned} \int_a^{a+kT} f(x) dx &= \int_a^{a+T} f(x) dx + \int_{a+T}^{a+2T} f(x) dx + \int_{a+2T}^{a+3T} f(x) dx + \dots + \int_{a+(k-1)T}^{a+kT} f(x) dx \\ &= \int_a^{a+T} f(x) dx + \dots + \int_a^{a+T} f(x) dx = k \int_a^{a+T} f(x) dx. \end{aligned}$$

в)

$$\int_a^b f(x) dx = \left(\begin{array}{l} t = x + kT \\ dx = dt \end{array} \right) = \int_{a+kT}^{b+kT} f(t - kT) dt = \int_{a+kT}^{b+kT} f(t) dt = \int_{a+kT}^{b+kT} f(x) dx.$$

△

ЗАДАТАК 2.26. Израчунати интеграл $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2 + \cos x)(3 + \cos x)}.$

Решење. Не можемо увести смену $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ јер $\pi \in (0, 2\pi)$.

Први начин је да раздвојимо на два интеграла $\int_0^\pi f(x)dx + \int_\pi^{2\pi} f(x)dx$ и у сваком уведемо смену $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Задатак ћемо урадити на други начин. Функција $f(x) = \frac{1}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$ је непрекидна на $[0, 2\pi]$, па је и Риман интеграбилна на $[0, 2\pi]$. Функција $f(x)$ је периодична (период је $T = 2\pi$) и парна, па важи

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)} &= (\text{погледати задатак 2.25 а)}) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)} \\ &= (\text{функција је парна}) = 2 \int_0^{\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)} \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{2dt}{(1+t^2)(2+\frac{1-t^2}{1+t^2})(3+\frac{1-t^2}{1+t^2})} = 4 \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2)dt}{(t^2+3)(2t^2+4)} \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \left(\frac{2}{t^2+3} - \frac{1}{t^2+2} \right) dt = 2 \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} \right) \Big|_0^{+\infty} \\ &= 2 \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} \right) - 0 = \pi \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 2.27. Израчунати $\int_0^{200\pi} \sqrt{1-\cos 2x} dx$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int_0^{200\pi} \sqrt{1-\cos 2x} dx &= 200 \int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos 2x} dx = 200 \int_0^{\pi} \sqrt{2\sin^2 x} dx = 200\sqrt{2} \int_0^{\pi} |\sin x| dx \\ &= 200\sqrt{2} \int_0^{\pi} \sin x dx = 200\sqrt{2}(-\cos x) \Big|_0^{\pi} = 400\sqrt{2}. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 2.28. Израчунати интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$.

Решење. Овај интеграл није Риманов, већ несвојствен.

Први начин:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)} &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = (\ln|x+1| - \ln|x+2|) \Big|_0^{+\infty} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln|x+1| - \ln|x+2|) - (0 - \ln 2) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \left| \frac{x+1}{x+2} \right| \right) + \ln 2 = \ln 2. \end{aligned}$$

Код овог начина не смомо раздвојити интеграл $\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) dx$, то јест није тачно

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x+1} dx - \int_0^{+\infty} \frac{1}{x+2} dx.$$

Касније ћемо доказати (када будемо радили несвојствене интеграле) да интеграл на десној страни не постоје.

Други начин:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)} &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_0^{\beta} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} (\ln|x+1| - \ln|x+2|) \Big|_0^{\beta} \\ &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} (\ln|\beta+1| - \ln|\beta+2|) - (0 - \ln 2) \\ &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(\ln \left| \frac{\beta+1}{\beta+2} \right| \right) + \ln 2 = \ln 2. \end{aligned}$$

Код овог начина смомо раздвојити интеграл $\int_0^{\beta} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) dx$ (особина Римановог интеграла), то јест тачно је

$$\int_0^{\beta} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) dx = \int_0^{\beta} \frac{1}{x+1} dx - \int_0^{\beta} \frac{1}{x+2} dx.$$

△

ЗАДАТАК 2.29. Израчунати интеграл $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

Решење. Не можемо увести смену $t = \operatorname{tg} x$ јер је $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \in (0, 2\pi)$.

Први начин је да раздвојимо на три интеграла $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f(x) dx$ и у сваком уведемо смену $t = \operatorname{tg} x$.

Задатак ћемо урадити на други начин. Функција $f(x) = \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x}$ је непрекидна на $[0, 2\pi]$, па је и Риман интегрална на $[0, 2\pi]$. Функција $f(x)$ задовољава следећу једнакост $f(x + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\sin^4(x + \frac{\pi}{2}) + \cos^4(x + \frac{\pi}{2})} = \frac{1}{\cos^4 x + \sin^4 x} = f(x)$, одакле закључујемо да је

периодична са периодом $\frac{\pi}{2}$ и важи

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} &= (\text{погледати задатак 2.25 б))} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} \\
 &= (f(x) \text{ је парна}) = 4 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = 4 \int_{-1}^1 \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^4}{(1+t^2)^2} + \frac{1}{(1+t^2)^2}} \\
 &= 4 \int_{-1}^1 \frac{t^2 + 1}{t^4 + 1} dt = 4 \int_{-1}^0 \frac{1+t^2}{1+t^4} dt + 4 \int_0^1 \frac{1+t^2}{1+t^4} dt \\
 &= \frac{4}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t^2-1}{\sqrt{2}t} \Big|_{-1}^0 + \frac{4}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t^2-1}{\sqrt{2}t} \Big|_0^1 \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0-} \frac{4}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t^2-1}{\sqrt{2}t} - 0 + 0 - \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{4}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t^2-1}{\sqrt{2}t} \\
 &= \frac{4\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{4\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{4\pi}{\sqrt{2}}.
 \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 2.30. Израчунати интеграл $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\operatorname{tg} x + \sin^2 x} dx$.

ЗАДАТАК 2.31. Израчунати интеграл $I = \int_{-\pi}^{\pi} (x \cos x - 2) \sqrt{\pi^2 - x^2} dx$.

Решење.

$$\int_{-\pi}^{\pi} (x \cos x - 2) \sqrt{\pi^2 - x^2} dx = \int_{-\pi}^{\pi} x \cos x \sqrt{\pi^2 - x^2} dx + 2 \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\pi^2 - x^2} dx.$$

Функција $f(x) = x \cos x \sqrt{\pi^2 - x^2}$ је непарна, одакле први интеграл једнак нули. Према томе,

$$I = 2 \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\pi^2 - x^2} dx = (\text{погледати задатак 1.75}) = \pi^3.$$

△

ЗАДАТАК 2.32. Израчунати интеграл $I = \int_0^{2019\pi} f(x) dx$, где је $f(x) = \max\{\sin x, \cos x\}$.

Решење. Функција $f(x) = \max\{\sin x, \cos x\}$ је 2π -периодична па важи

$$I = \int_0^{2019\pi} f(x) dx = \int_0^{2018\pi} f(x) dx + \int_{2018\pi}^{2019\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} f(x) dx + \int_0^{\pi} f(x) dx.$$

С обзиром да је $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [0, \pi/4] \cup [5\pi/4, 2\pi] \\ \sin x, & x \in (\pi/4, 5\pi/4) \end{cases}$ имамо

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/4} \cos x dx + \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \sin x dx + \int_{5\pi/4}^{2\pi} \cos x dx + \int_0^{\pi/4} \cos x dx + \int_{\pi/4}^{\pi} \sin x dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 + 3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 2.33. Израчунати $\int_{0.5}^{2019} (x) dx$, где је (x) растојање од x до њему најближег целог броја.

Решење. Функција (x) је периодична и основни период је $T = 1$

△

ЗАДАТАК 2.34. Ако је f непрекидна функција на $[0, 1]$, онда је

$$\begin{aligned} \text{а) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx; \\ \text{б) } \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx. \end{aligned}$$

Решење. а)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \left(\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{2} - x \\ dx = -dt \end{array} \right) = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\sin(\frac{\pi}{2} - t)) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t) dt.$$

б)

$$\begin{aligned} I = \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx &= \left(\begin{array}{l} t = \pi - x \\ dx = -dt \end{array} \right) = - \int_{\pi}^0 (\pi - t) f(\sin(\pi - t)) dt = \int_0^{\pi} (\pi - t) f(\sin t) dt \\ &= \pi \int_0^{\pi} f(\sin t) dt - \int_0^{\pi} t f(\sin t) dx = \pi \int_0^{\pi} f(\sin t) dt - I, \end{aligned}$$

одакле је $2I = \pi \int_0^{\pi} f(\sin t) dt$, односно

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$$

△

ЗАДАТАК 2.35. Израчунати интеграл $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$.

Решење.

$$\begin{aligned} I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx &= \left(\begin{array}{l} t = \pi - x \\ dx = -dt \end{array} \right) = - \int_{\pi}^0 \frac{(\pi - t) \sin(\pi - t)}{1 + \cos^2(\pi - t)} dt = - \int_{\pi}^0 \frac{(\pi - t) \sin t}{1 + \cos^2 t} dt \\ &= \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t) \sin t}{1 + \cos^2 t} dt = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt - \int_0^{\pi} \frac{t \sin t}{1 + \cos^2 t} dt. \end{aligned}$$

Одавде је

$$2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt = \left(\begin{array}{l} \cos t = u \\ -\sin t dt = du \end{array} \right) = \pi \int_{-1}^1 \frac{du}{1 + u^2} = \pi \operatorname{arctg} u \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi^2}{2}.$$

Добили смо да је $I = \frac{\pi^2}{4}$. △

ЗАДАТАК 2.36. Израчунати интеграл $\int_0^{\pi} \frac{x dx}{2 + 3 \sin x}$.

Решење.

$$\begin{aligned} I = \int_0^{\pi} \frac{x dx}{2 + 3 \sin x} &= \left(\begin{array}{l} t = \pi - x \\ dx = -dt \end{array} \right) = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t) dt}{2 + 3 \sin(\pi - t)} = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t) dt}{2 + 3 \sin t} \\ &= \pi \int_0^{\pi} \frac{dt}{2 + 3 \sin t} - \int_0^{\pi} \frac{t dt}{2 + 3 \sin t}. \end{aligned}$$

Одавде је

$$\begin{aligned} 2I &= \pi \int_0^{\pi} \frac{dt}{2 + 3 \sin t} = \left(\begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{t}{2} = u \\ dt = \frac{2du}{1+u^2} \\ \sin t = \frac{2u}{1+u^2} \end{array} \right) = \pi \int_0^{\infty} \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{2 + 3 \frac{2u}{1+u^2}} = \pi \int_0^{\infty} \frac{2du}{2 + 2u^2 + 6u} \\ &= \pi \int_0^{\infty} \frac{du}{u^2 + 3u + 1} = \pi \int_0^{\infty} \frac{du}{(u + \frac{3}{2})^2 - \frac{5}{4}} = \left(\begin{array}{l} u + \frac{3}{2} = z \\ du = dz \end{array} \right) = \pi \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} \frac{du}{z^2 - \frac{5}{4}} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{z - \frac{\sqrt{5}}{2}}{z + \frac{\sqrt{5}}{2}} \right| \Big|_{\frac{3}{2}}^{+\infty} = -\frac{\pi}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}} \right| = \frac{\pi}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{3 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} \right|. \end{aligned}$$

Добили смо да је $I = \frac{\pi}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} \right|$. △

ЗАДАТАК 2.37. Израчунати интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^m x dx}{\sin^m x + \cos^m x}$.

Решење.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^m x dx}{\sin^m x + \cos^m x} = \left(\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{2} - x \\ dx = -dt \end{array} \right) = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin^m(\frac{\pi}{2} - t) dt}{\sin^m(\frac{\pi}{2} - t) + \cos^m(\frac{\pi}{2} - t)} \\ &= - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos^m t dt}{\cos^m t + \sin^m t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^m t dt}{\cos^m t + \sin^m t}, \end{aligned}$$

одакле је

$$2I = I + I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^m x dx}{\sin^m x + \cos^m x} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^m t dt}{\cos^m t + \sin^m t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^m x + \cos^m x}{\sin^m x + \cos^m x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Према томе, $I = \frac{\pi}{4}$. $\triangle$

ЗАДАТАК 2.38. Нека је f непрекидно диференцијабилна функција на $[0, 1]$ и $f(1) - f(0) = 1$. Доказати да је $\int_0^1 (f'(x))^2 dx \geq 1$.

Решење. Функција f је непрекидно диференцијабилна функција, па је $(f'(x))^2$ непрекидна на $[0, 1]$, а одатле следи да је интеграл Риманов.

Потребно је доказати да важи $\int_0^1 (f'(x))^2 dx - 1 \geq 0$.

Имамо

$$\begin{aligned} \int_0^1 (f'(x))^2 dx - 1 &= \int_0^1 (f'(x))^2 dx - 2 \int_0^1 f'(x) dx + 2 \int_0^1 f'(x) dx - 1 \\ &= \int_0^1 (f'(x))^2 dx - 2 \int_0^1 f'(x) dx + 2(f(1) - f(0)) - 1 \\ &= \int_0^1 (f'(x))^2 dx - 2 \int_0^1 f'(x) dx + 1 = \int_0^1 (f'(x) - 1)^2 dx \geq 0. \end{aligned}$$

$\triangle$

ЗАДАТАК 2.39. Израчунати интеграл $\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \left(\begin{array}{l} \arcsin x = t \\ \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt \end{array} \right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin^2 t dt \\ &= \left(\begin{array}{l} u = t \Rightarrow du = dt \\ dv = \sin^2 t dt \Rightarrow v = \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin 2t \end{array} \right) \\ &= \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{4} t \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin 2t \right) dt \\ &= \frac{\pi^2}{8} - \left(\frac{t^2}{4} + \frac{1}{8} \cos 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{16}(4 + \pi^2) \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 2.40. Израчунати интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^3 + x^2 + 7x + 7}$.

Решење. Из једнакости

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+7)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+7}$$

добивамо систем

$$A+B=0, B+C=0, 7A+C=1,$$

чије је решење $A = \frac{1}{8}, B = -\frac{1}{8}, C = \frac{1}{8}$. Одатле је

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{x^3 + x^2 + 7x + 7} &= \frac{1}{8} \ln(x+1) \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{-\frac{1}{8} + \frac{1}{8}}{x^2+7} dx = \frac{1}{8} \ln 2 - \frac{1}{8} \int_0^1 \frac{x-1}{x^2+7} dx \\ &= \frac{1}{8} \ln 2 - \frac{1}{16} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+7} dx + \frac{1}{8} \int_0^1 \frac{dx}{x^2+7} \\ &= \frac{1}{8} \ln 2 - \frac{1}{16} \int_0^1 \frac{dt}{t} + \frac{1}{8\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{7}} \Big|_0^1 \\ &= \frac{\ln 2}{8} - \frac{1}{16} \ln \frac{8}{7} + \frac{1}{8\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{7}}. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 2.41. Израчунати интеграл $\int_1^2 x \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2-1} dx$.

Решење. $2\operatorname{arctg} \frac{4}{3} + -\operatorname{arctg} 2$.

△

ЗАДАТАК 2.42. Израчунати следеће интеграле:

$$\text{а) } \int_2^{+\infty} \frac{2x^2+1}{x^2(x^2-1)} dx; \quad \text{б) } \int_0^1 \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^2} dx; \quad \text{в) } \int_0^1 \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^2(1+x^2)} dx.$$

Решење. а) Из једнакости

$$\frac{2x^2+1}{x^2(x^2-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1}$$

добивамо решења $A=0, B=-1, C=\frac{1}{2}, D=-\frac{3}{2}$. Одатле је

$$\int \frac{2x^2+1}{x^2(x^2-1)} = \frac{1}{x} + \frac{3}{2} \ln|x-1| - \frac{3}{2} \ln|x+1| + C = \frac{1}{x} + \frac{3}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$

и

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{2x^2+1}{x^2(x^2-1)} &= \frac{1}{x} + \frac{3}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \Big|_2^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \ln \frac{2-1}{2+1} \right) \\ &= \frac{3}{2} \ln 3 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

б)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^2} dx &= \left(\begin{array}{l} u = x - \operatorname{arctg} x \Rightarrow du = 1 - \frac{1}{1+x^2} dx \\ dv = \frac{1}{x^2} dx \Rightarrow v = -\frac{1}{x} \end{array} \right) \\
&= -(x - \operatorname{arctg} x) \frac{1}{x} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t} \\
&= \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{1}{2} \ln |t| \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\ln 2}{2}.
\end{aligned}$$

Користили смо следећу граничну вредност

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) = 0.$$

в)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^2(1+x^2)} dx &= \int_0^1 (x - \operatorname{arctg} x) \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\
&= \int_0^1 \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^2} dx + \int_0^1 \frac{x - \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx \\
&= \int_0^1 \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^2} dx + \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx \\
&= I_1 - I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

$$I_1 = (\text{део задатка под б)}) = \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\ln 2}{2}.$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = (t = 1+x^2) = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \ln t \Big|_1^2 = \frac{\ln 2}{2}.$$

$$I_3 = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = (\operatorname{arctg} x = t) = \int_0^{\pi/4} t dt = \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi^2}{32}.$$

Према томе $I = \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\pi^2}{32}$.

△

ЗАДАТАК 2.43. Израчунати интеграл $\int_0^1 \ln x \ln \left(x + \sqrt{1+x^2}\right) dx$.

Решење. Подинтегрална функција $f(x) = \ln x \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ је непрекидна на $(0, 1]$. Из граничне вредности

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \ln x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) = 0$$

слиди да $x = 0$ није сингуларитет и интеграл је Риманов ако додефинишемо функцију у $x = 0$, односно $\tilde{f}$ је Рيمان интеграбилна где је $\tilde{f}(x) = f(x)$ за $x \in (0, 1]$, $\tilde{f}(0) = 0$.

Применићемо Њутн Лајбницову формулу. Неодређени интеграл је

$$\begin{aligned} \int \ln x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx &= \left(\begin{array}{l} u = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ dv = \ln x dx \Rightarrow v = x \ln x - x \end{array} \right) \\ &= (x \ln x - x) \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x(\ln x - 1)}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ &= \left(\begin{array}{l} u = \ln x - 1 \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow v = \sqrt{1+x^2} \end{array} \right) \\ &= (x \ln x - x) \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - (\ln x - 1)\sqrt{1+x^2} + \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx \\ &= (x \ln x - x) \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - (\ln x - 1)\sqrt{1+x^2} + \int \frac{x\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx. \end{aligned}$$

У последњем интегралу уведемо смену $1+x^2 = t^2, t \geq 0$ и добијамо

$$\begin{aligned} \int \frac{x\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx &= \int \frac{t^2}{t^2-1} dt = \int \left(1 + \frac{1}{t^2-1} \right) dt = t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C \\ &= \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1} \right| + C. \end{aligned}$$

Затим, примитивна функција је

$$F(x) = (x \ln x - x) \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} \ln x + 2\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1} \right| + C.$$

Сада можемо применити Њутн Лајбницову формулу

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx &= (x \ln x - x) \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} \ln x \\ &\quad + 2\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1} \right| \Big|_0^1 \\ &= (x \ln x - x) \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 2\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x^2} \ln x \\ &\quad + \frac{1}{2} \ln \left| \sqrt{1+x^2}-1 \right| - \ln(\sqrt{1+x^2}+1) \Big|_0^1 \\ &= F(1) - \lim_{x \rightarrow 0+} F(x) = 2\sqrt{2} - 2 \ln(1 + \sqrt{2}) - 2 + \ln 2. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 2.44. Израчунати $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}$.

Решење. Урадићемо прво неодређен интеграл. Из једнакости

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$$

добивамо

$$1 \equiv A(x^2 + 3x + 2) + B(x^2 + 2x) + C(x^2 + x),$$

одакле имамо систем

$$A + B + C = 0, 3A + 2B + C = 0, 2A = 1,$$

чије је решење $A = \frac{1}{2}, B = -1, C = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x(x+1)(x+2)} &= \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x+2} \right) dx = \frac{1}{2} \ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln|x+2| + C \\ &= \ln \frac{\sqrt{|x|}\sqrt{|x+2|}}{|x+1|} + C. \end{aligned}$$

Према томе,

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)(x+2)} &= \ln \frac{\sqrt{|x|}\sqrt{|x+2|}}{|x+1|} \Big|_0^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{\sqrt{|x|}\sqrt{|x+2|}}{|x+1|} - \ln \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 - \ln \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \ln \frac{2}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 2.45. Израчунати интеграл $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)(1+e^x)}$.

Решење. Подинтегрална функција је непрекидна на $[-1, 1]$, па је интеграл Риманов.

$$I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)(1+e^x)} = \left(\begin{array}{l} t = -x \\ dt = -dx \end{array} \right) = - \int_1^{-1} \frac{dt}{(1+t^2)(1+e^{-t})} = \int_{-1}^1 \frac{e^t dt}{(1+t^2)(1+e^t)}.$$

Одавде имамо

$$\begin{aligned} I + I &= \int_{-1}^1 \frac{dt}{(1+t^2)(1+e^t)} + \int_{-1}^1 \frac{e^t dt}{(1+t^2)(1+e^t)} = \int_{-1}^1 \frac{(1+e^t)dt}{(1+t^2)(1+e^t)} = \int_{-1}^1 \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \arctg t \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Према томе, $I = \frac{\pi}{4}$.

△

ЗАДАТАК 2.46. Израчунати интеграл $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \operatorname{tg} x) dx$.

Решење.

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \operatorname{tg} x) dx = \left(\frac{\frac{\pi}{4} - x = t}{dt = -dx} \right) = - \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln \left(1 + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - t \right) \right) dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left(1 + \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} - t \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{4} - t \right)} \right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left(1 + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos t - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos t + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t} \right) dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left(1 + \frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t} \right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left(\frac{2 \cos t}{\cos t + \sin t} \right) dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2 dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \operatorname{tg} t) dt = \frac{\pi \ln 2}{4} - I.
 \end{aligned}$$

Одавде $I = \frac{\pi \ln 2}{8}$.

△

ЗАДАТАК 2.47. Израчунати интеграл $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$.

Решење. Подинтегрална функција је непрекидна на $[0, 1]$, а одатле и интеграбилна на $[0, 1]$. Важи

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx &= \left(\frac{x = \operatorname{tg} t}{dx = \frac{dt}{\cos^2 t}} \right) = \int_0^1 \frac{\ln(1 + \operatorname{tg} t)}{1 + \operatorname{tg}^2 t} \frac{dt}{\cos^2 t} = \int_0^1 \ln(1 + \operatorname{tg} t) dt \\
 &= (\text{погледати задатак 2.46}) = \frac{\pi \ln 2}{8}.
 \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 2.48. Израчунати интеграл $\int_{\frac{1}{a}}^a \frac{|\ln x|}{1+x} dx, a > 0$.

Решење. Сменом $t = \frac{1}{x}$ добијамо

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{|\ln x|}{1+x} dx = - \int_a^{\frac{1}{a}} \frac{|\ln \frac{1}{t}|}{1 + \frac{1}{t}} \cdot \frac{1}{t^2} dt = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{|\ln t|}{t(1+t)} dt = \int_{\frac{1}{a}}^a |\ln t| \cdot \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\
 &= \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{|\ln t|}{t} dt - \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{|\ln t|}{t+1} dt = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{|\ln t|}{t} dt - I,
 \end{aligned}$$

а одатле

$$I = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{|\ln t|}{t} dt = \left(\frac{u = \ln t}{du = \frac{dt}{t}} \right) = \frac{1}{2} \int_{-\ln a}^{\ln a} |u| du.$$

$$\text{Ако је } a > 1, \text{ онда је } I = \frac{1}{2} \int_{-\ln a}^0 u du + \frac{1}{2} \int_0^{\ln a} (-u) du = \frac{u^2}{2} \Big|_{-\ln a}^0 - \frac{u^2}{2} \Big|_0^{\ln a} = \frac{\ln^2 a}{2}.$$

Ако је $a = 1$, онда је $I = 0$.

$$\text{Ако је } 0 < a < 1, \text{ онда је } I = - \int_a^{\frac{1}{a}} \frac{|\ln x|}{1+x} dx = -\frac{\ln^2 a}{2}. \quad \triangle$$

ЗАДАТАК 2.49. Нека су дати интеграли $I_n = \int_0^1 x^n e^{\sqrt{x}} dx$, где је $n \in \mathbb{N}$.

а) Израчунати I_0 .

б) Доказати $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.

в) Наћи a, b тако да важи $I_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Решење. а)

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx = \left(\begin{array}{l} x = t^2, t \geq 0 \\ dx = 2t dt \end{array} \right) = 2 \int_0^1 t e^t dt = \left(\begin{array}{l} u = t \Rightarrow du = dt \\ dv = e^t dt \Rightarrow v = e^t \end{array} \right) \\ &= 2te^t \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 e^t dt = 2e - 2e^t \Big|_0^1 = 2. \end{aligned}$$

За свако $x \in (0, 1)$ важи $0 \leq \sqrt{x} \leq 1$, одакле је

$$\int_0^1 x^n e^{\sqrt{x}} dx \leq \int_0^1 x^n e dx = e \int_0^1 x^n dx = e \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{e}{n+1},$$

а са друге стране имамо ограничење

$$\int_0^1 x^n e^{\sqrt{x}} dx \geq \int_0^1 x^n dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Дакле, важи

$$\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1},$$

одакле помоћу Теореме о два полицајца следи да је $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.

в)

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 x^n e^{\sqrt{x}} dx = \left(\begin{array}{l} x = t^2, t \geq 0 \\ dx = 2t dt \end{array} \right) = 2 \int_0^1 t^{2n+1} e^t dt \\ &= 2 \left(t^{2n+1} e^t \Big|_0^1 - (2n+1) \int_0^1 t^{2n} e^t dt \right) = 2e - 2(2n+1) \int_0^1 t^{2n} e^t dt \\ &= \left(\begin{array}{l} u = t^{2n} \Rightarrow du = 2nt^{2n-1} dt \\ dv = e^t dt \Rightarrow v = e^t \end{array} \right) = 2e - 2(2n+1) \left(t^{2n} e^t \Big|_0^1 - 2n \int_0^1 t^{2n-1} e^t dt \right) \\ &= 2e - 2(2n+1)(e - nI_{n-1}) = -4ne + 2n(2n+1)I_{n-1}. \end{aligned}$$

Добили смо $I_{n-1} = \frac{4ne + I_n}{2n(2n+1)}$, односно $I_n = \frac{(4n+4)e + I_{n+1}}{(2n+2)(2n+3)}$.

Из $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ имамо $I_n = o(1)$, па је

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{(4n+4)e + I_{n+1}}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{(4n+4)e}{(2n+2)(2n+3)} + \frac{I_{n+1}}{(2n+2)(2n+3)} \\ &= \frac{e}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{3}{2n}} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{e}{n} \cdot \left(1 + \frac{3}{2n}\right)^{-1} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{e}{n} \cdot \left(1 - \frac{3}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{e}{n} - \frac{3e}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

У претходној једнакости искористили смо чињеницу да ако је $I_{n+1} = o(1)$, онда је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{I_{n+1}}{(2n+2)(2n+3)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} I_{n+1} \cdot \frac{n^2}{(2n+2)(2n+3)} = 0,$$

па важи

$$\frac{I_{n+1}}{(2n+2)(2n+3)} = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Добили смо $a = e$ и $b = -\frac{3e}{2}$.

△

ЗАДАТАК 2.50. Израчунати $\int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \right) dx$.

Теорема 2.3. Нека је f Риман интегрална на $[a, b]$ и $\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt, x \in [a, b]$.

1) Функција φ је непрекидна на $[a, b]$;

2) Ако је функција f непрекидна у некој тачки $x_0 \in [a, b]$, онда је φ диференцијабилна у тој тачки и важи

$$\varphi'(x_0) = f(x_0).$$

ЗАДАТАК 2.51. Наћи извод $\frac{d}{dx} \left(\int_{\sin x}^{\cos x} \cos \pi t^2 dt \right)$.

Решење.

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{\sin x}^{\cos x} \cos \pi t^2 dt \right) = \cos(\pi \cos^2 x) \cdot (-\sin x) - \cos(\pi \sin^2 x) \cdot \cos x.$$

△

ЗАДАТАК 2.52. Наћи граничну вредност $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}$.

Решење. Из граничне вредности $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{t^2} = +\infty$ следи да је $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{t^2} dt = +\infty$. Такође важи $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{2t^2} dt = +\infty$. Можемо искористити Лопиталово правило

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt} &= (\text{Лопиталово правило}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \int_0^x e^{t^2} dt \cdot e^{x^2}}{e^{2x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \int_0^x e^{t^2} dt}{e^{x^2}} \\ &= (\text{Лопиталово правило}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{x^2}}{e^{x^2} \cdot 2x} = 0 \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 2.53. Одредити x за које функција $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{t} \ln \frac{t-1}{9} dt$ достиже минимум на $(1, +\infty)$.

Решење. За $x > 1$ функција $\frac{1}{t} \ln \frac{t-1}{9}$ је непрекидна на $[x, x^2]$, па на основу Теореме 2.3 следи да је функција F диференцијабилна на (x, x^2) за свако $x > 1$, односно диференцијабилна на $(1, +\infty)$ и важи

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx} \left(\int_x^{x^2} \frac{1}{t} \ln \frac{t-1}{9} dt \right) = \frac{1}{x^2} \ln \frac{x^2-1}{9} \cdot 2x - \frac{1}{x} \ln \frac{x-1}{9} \\ &= \frac{1}{x} \left(\ln \frac{(x^2-1)^2}{81} - \ln \frac{x-1}{9} \right) = \frac{1}{x} \ln \left(\frac{\frac{(x^2-1)^2}{81}}{\frac{x-1}{9}} \right) = \frac{1}{x} \ln \left(\frac{(x-1)(x+1)^2}{9} \right). \end{aligned}$$

Имамо $\frac{(x-1)(x+1)^2}{9} > 1$ акко $p(x) = x^3 + x^2 - x - 10 > 0$. Нула полинома је $x = 2$, па се може раставити $p(x) = (x-2)(x^2+3x+5)$, одакле је $p(x) > 0$ за $x \in (2, +\infty)$, а $p(x) < 0$ за $x \in (1, 2)$. Према томе, функција $F(x)$ је опадајућа на $(1, 2)$ и растућа на $(2, +\infty)$ и $x = 2$ је тачка глобалног минимума. △

3 Несвојствени интеграли

Дефиниција 3.1. Нека је функција f дефинисана у интервалу $[a, b)$ и интеграбилна на сваком сегменту $[a, \beta] \subset [a, b)$. Гранична вредност

$$\lim_{\beta \rightarrow b-} \int_a^{\beta} f(x) dx,$$

се назива несвојственим интегралом функције f на интервалу $[a, b)$ и означава са

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Тачка b се назива сингуларитетом. Ако постоји коначна гранична вредност, онда кажемо да интеграл $\int_a^b$ конвергира, а ако не постоји, онда кажемо да интеграл дивергира.

ЗАДАТАК 3.1. Испитати конвергенцију интеграла $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$, у зависности од реалног параметра α .

Решење. Испитајмо за које вредности параметра α постоји коначна гранична вредност

$$\lim_{\beta \rightarrow 0+} \int_{\beta}^1 \frac{1}{x^\alpha} dx.$$

Ако је $\alpha \neq 1$ важи

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow 0+} \int_{\beta}^1 \frac{1}{x^\alpha} dx &= \lim_{\beta \rightarrow 0+} \int_{\beta}^1 x^{-\alpha} dx = \lim_{\beta \rightarrow 0+} \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_{\beta}^1 = \lim_{\beta \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{\beta^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1 \\ +\infty, & \alpha > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

За $\alpha = 1$ имамо

$$\lim_{\beta \rightarrow 0+} \int_{\beta}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\beta \rightarrow 0+} \ln |x| \Big|_{\beta}^1 = \lim_{\beta \rightarrow 0+} (-\ln \beta) = +\infty.$$

Према томе, интеграл $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ конвергира ако и само ако $\alpha < 1$. △

ЗАДАТАК 3.2. Испитати конвергенцију интеграла $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$, $a < b$, у зависности од реалног параметра α .

Решење. Ако узмемо смену $t = x - a$ добијамо интеграл $\int_0^{b-a} \frac{1}{t^\alpha} dt$, одакле интеграл конвергира акко $\alpha < 1$. $\triangle$

ЗАДАТАК 3.3. Испитати конвергенцију интеграла $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$, $a < b$ у зависности од реалног параметра α .

Решење. Ако узмемо смену $t = b - x$ добијамо интеграл $\int_0^{b-a} \frac{1}{t^\alpha} dt$, одакле интеграл конвергира акко $\alpha < 1$. $\triangle$

Дефиниција 3.2. Нека је функција f дефинисана у интервалу $[a, +\infty)$ и интеграбилна на сваком сегменту $[\alpha, \beta] \subset [a, +\infty)$. Гранична вредност

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_\alpha^\beta f(x) dx,$$

се назива несвојственим интегралом функције f на интервалу $[a, +\infty)$ и означава са

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

ЗАДАТАК 3.4. Испитати конвергенцију интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$, у зависности од реалног параметра α .

Решење. Испитајмо за које вредности параметра α постоји коначна гранична вредност

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_1^\beta \frac{1}{x^\alpha} dx.$$

Ако је $\alpha \neq 1$ важи

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_1^\beta \frac{1}{x^\alpha} dx &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_1^\beta x^{-\alpha} dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_1^\beta = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(\frac{\beta^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1 \\ +\infty, & \alpha < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

За $\alpha = 1$ имамо

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_1^\beta \frac{1}{x} dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \ln |x|_1^\beta = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \ln \beta = +\infty.$$

Према томе, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ конвергира ако и само ако $\alpha > 1$. $\triangle$

ЗАДАТАК 3.5. Испитати конвергенцију интеграла $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} dx$.

Решење. Из следећег

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_0^{\beta} \frac{dx}{1+x^2} dx = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \arctg x|_0^{\beta} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \arctg \beta = \frac{\pi}{2}$$

слиди да интеграл конвергира. △

ЗАДАТАК 3.6. Испитати конвергенцију интеграла $\int_{-\infty}^0 e^x dx$.

Решење. Из следећег

$$\lim_{\beta \rightarrow -\infty} \int_{\beta}^0 e^x dx = \lim_{\beta \rightarrow -\infty} e^x|_{\beta}^0 = \lim_{\beta \rightarrow -\infty} (1 - e^{\beta}) = 1$$

слиди да интеграл конвергира. △

Дефиниција 3.3. Нека је $a < c < b$. Тада интеграл $\int_a^b f(x)dx$ конвергира ако и само ако конвергирају интеграл $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$ и при томе важи

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

ЗАДАТАК 3.7. Испитати конвергенцију интеграла $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$, у зависности од реалног параметра α .

Решење. Интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$ конвергира ако и само ако конвергирају интеграл

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha}} dx \quad \text{и} \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx.$$

Интеграл I_1 конвергира акко $\alpha < 1$ (задатак 3.1), а интеграл I_2 конвергира акко $\alpha > 1$ (задатак 3.4).

Према томе, не постоји α за које оба интеграла конвергирају, па интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$ дивергира за свако α . △

ЗАДАТАК 3.8. Испитати конвергенцију интеграла $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решење. Интеграл $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ конвергира ако и само ако конвергирају интеграли

$$I_1 = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{и} \quad I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Интеграли I_1 и I_2 конвергирају јер важи

$$I_1 = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\beta \rightarrow -1+} \int_{\beta}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\beta \rightarrow -1+} \arcsin x|_{\beta}^0 = \lim_{\beta \rightarrow -1+} -\arcsin \beta = \frac{\pi}{2},$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\beta \rightarrow 1-} \int_0^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\beta \rightarrow 1-} \arcsin x|_0^{\beta} = \lim_{\beta \rightarrow 1-} \arcsin \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Одавде, $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ конвергира и $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi$. $\triangle$

Теорема 3.1. Нека су $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ несвојствени интеграли са сингуларитетом у тачки b . Тада важи:

1° Ако интеграли конвергирају, онда важи једнакост

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

2° Ако су f и g глатке функције и постоји коначан $\lim_{x \rightarrow b} f(x)g(x)$, онда $\int_a^b (f(x)g'(x))dx$

конвергира ако конвергира $\int_a^b (f'(x)g(x))dx$. У том случају важи једнакост

$$\int_a^b (f(x)g'(x))dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b (f'(x)g(x))dx.$$

Теорема 3.2. Несвојствени интеграл $\int_a^b f(x)dx$ са сингуларитетом у $x = b$ конвергира ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји β_0 , $a < \beta_0 < b$, тако да за сваки пар $\beta', \beta'', \beta_0 < \beta' < \beta'' < b$, важи

$$\left| \int_{\beta'}^{\beta''} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Дефиниција 3.4. Несвојствени интеграл $\int_a^b f(x)dx$ апсолутно конвергира ако конвергира интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$.

Теорема 3.3. Ако $\int_a^b f(x)dx$ апсолутно конвергира, онда он и конвергира.

Теорема 3.4. Нека су $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ несвојствени интеграл са сингуларитетом у тачки b , при чему је $f(x) \leq g(x)$ на $x \in [a, b)$.

1° Ако $\int_a^b g(x)dx$ конвергира, онда конвергира и интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

2° Ако $\int_a^b f(x)dx$ дивергира, онда дивергира и интеграл $\int_a^b g(x)dx$.

ЗАДАТАК 3.9. Испитати конвергенцију интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$.

Решење. Из неједнакости $|\frac{\cos x}{x^2}| \leq \frac{1}{x^2}$ и из конвергенције интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ (задатак 3.4 када је $\alpha = 2$) следи да $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ апсолутно конвергира (Теорема 3.4). На основу Теореме 3.3 интеграл и обично конвергира. $\triangle$

Теорема 3.5. Нека су $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ несвојствени интеграл са сингуларитетом у тачки b , при чему је $g(x) > 0$ и $f(x) \geq 0$ за $x \in [a, b)$. Ако постоји $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = C, 0 \leq C \leq +\infty$, тада важи:

1° Ако је $C = 0$ и $\int_a^b g(x)dx$ конвергира, онда конвергира и интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

2° Ако је $C = +\infty$ и $\int_a^b g(x)dx$ дивергира, онда дивергира и интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

3° Ако је $0 < C < +\infty$, онда су интеграл $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ еквивалентни, односно један конвергира ако други конвергира. Специјалан случај је када је $C = 1$, односно $f(x) \sim g(x)$ када $x \rightarrow b$.

ЗАДАТАК 3.10. Испитати конвергенцију интеграла $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Решење. Из неједнакости $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ за $x \geq 1$ и из конвергенције интеграла $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ (има вредност 1) следи да $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ конвергира (Теорема 3.4). Интеграл $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ конвергира јер је то Риманов интеграл (подинтегрална функција је непрекидна на $[0, 1]$.) Дакле, $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ конвергира. $\triangle$

ЗАДАТАК 3.11. Испитати конвергенцију интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} dx$.

Решење. Из неједнакости $\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{1}{x^2}$ за $x \geq 1$ и из конвергенције интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ (задатак 3.4) следи да $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx$ конвергира (Теорема 3.4). $\triangle$

ЗАДАТАК 3.12. Испитати конвергенцију интеграла $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx$ у зависности од реалног параметра n .

Решење. За $n \leq 0$ сингуларитет је $+\infty$ и важи $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} = +\infty$, одакле интеграл дивергира.

За $n > 0$ имамо два сингуларитета, $+\infty$ и 0 . Да би почетни интеграл конвергирао потребно је да конвергирају интеграл $I_1 = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx$ и $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx$.

Испитајмо конвергенцију интеграла I_1 . Функција $\frac{\ln(1+x)}{x^n}$ се у околини $x = 0$ понаша као

$$\frac{\ln(1+x)}{x^n} \sim \frac{x}{x^n} \sim \frac{1}{x^{n-1}},$$

па интеграл I_1 конвергира ако и само ако конвергира интеграл $\int_0^1 \frac{1}{x^{n-1}} dx$, а он конвергира када је $n - 1 < 1$, односно $n < 2$.

Испитајмо конвергенцију интеграла I_2 . Када $x \rightarrow +\infty$ важи

$$\frac{\ln(1+x)}{x^n} \sim \frac{\ln x}{x^n} \sim \frac{1}{x^n(\ln x)^{-1}}.$$

Интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^n(\ln x)^{-1}} dx$ конвергира акко $n > 1$, па и интеграл I_2 конвергира када $n > 1$.

Одавде следи да I конвергира акко $1 < n < 2$. $\triangle$

ЗАДАТАК 3.13. Испитати конвергенцију интеграла $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^b} dx$ у зависности од реалних параметара a и b .

Решење. Да би почетни интеграл конвергирао потребно је да конвергирају интеграл

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^b} dx \quad \text{и} \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^b} dx.$$

Испитајмо конвергенцију интеграла I_1 . Функција $\frac{\operatorname{arctg} ax}{x^b}$ се у околини $x = 0$ понаша као

$$\frac{\operatorname{arctg} ax}{x^b} \sim \frac{ax}{x^b} \sim \frac{a}{x^{b-1}},$$

па интеграл I_1 конвергира ако и само ако конвергира интеграл $\int_0^1 \frac{a}{x^{b-1}} dx$, а он конвергира када је $b - 1 < 1$, односно $b < 2$.

Испитајмо конвергенцију интеграла I_2 . Када $x \rightarrow +\infty$ важи

$$\frac{\operatorname{arctg} ax}{x^b} \sim \operatorname{sgn} a \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x^b}.$$

Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^b}$ конвергира акко $b > 1$, па и интеграл I_2 конвергира када $b > 1$.

Одавде следи да I конвергира акко $1 < b < 2$. $\triangle$

ЗАДАТАК 3.14. Испитати конвергенцију интеграла $\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^n}}$ у зависности од реалног параметра n .

Решење. Да би почетни интеграл конвергирао потребно је да конвергирају интеграл

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^n}} \quad \text{и} \quad I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^n}}.$$

Испитајмо конвергенцију интеграла I_1 . Када $x \rightarrow 0$ важи

$$\frac{x^n}{\sqrt{1-x^n}} \sim x^n,$$

па интеграл I_1 конвергира ако и само ако конвергира интеграл $\int_0^1 \frac{1}{x^{-n}} dx$, а он конвергира када је $-n < 1$, односно $n > -1$.

Испитајмо конвергенцију интеграла I_2 . Уведимо смену тако да 0 буде сингуларитет

$$I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^n}} = \left(\begin{array}{l} 1-x=t \\ dx=-dt \end{array} \right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-t)^n dt}{\sqrt{1-(1-t)^n}}.$$

Када $t \rightarrow 0$ важи $\frac{(1-t)^n}{\sqrt{1-(1-t)^n}} \sim \frac{1}{t^n}$, па интеграл I_2 конвергира када је $n < 1$. Почетни интеграл конвергира акко $-1 < n < 1$. $\triangle$

ЗАДАТАК 3.15. Испитати конвергенцију интеграла $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1}$.

Решење. С обзиром да је $x^4 - x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 + x^2 > 0$, интеграл има само сингуларитет $+\infty$. Када $x \rightarrow +\infty$ подинтегрална функција се понаша као

$$\frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1} \sim \frac{1}{x^2},$$

а из конвергенције интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ следи да и интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1}$ конвергира. $\triangle$

ЗАДАТАК 3.16. Испитати конвергенцију интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$.

Решење. Несвојствени интеграл има сингуларитет у $+\infty$. Када $x \rightarrow +\infty$ имамо

$$\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}} \sim \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}},$$

па из конвергенције интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{5}{3}}}$ следи и конвергенција интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$. $\triangle$

ЗАДАТАК 3.17. Испитати конвергенцију интеграла $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$.

Решење. Ово је несвојствени интеграл са сингуларитетом $x = 0$ и $+\infty$.

Када $x \rightarrow 0$ имамо

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+x}} = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x^2+1}} \sim \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}},$$

па из конвергенције интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}$ следи и конвергенција интеграла $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$.

Када $x \rightarrow +\infty$ имамо

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+x}} = \frac{1}{\sqrt{x^3}\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}} \sim \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}},$$

па из конвергенције интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ следи и конвергенција интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$.

Према томе, интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$ конвергира. $\triangle$

ЗАДАТАК 3.18. Испитати конвергенцију интеграла $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(x-1)}}$ у зависности од реалног параметра a .

Решење. Ако $a \in (0, 1)$, онда интеграл има сингуларитет у $x = 1$ и када $x \rightarrow 1$ важи $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2-a^2)(x-1)}} \sim \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}} = C \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, одакле на основу Теореме 3.5 и задатка 3.2 следи да I конвергира.

Ако је $a = 1$, онда имамо интеграл $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(x-1)}} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x-1)}}$, при чему је $\frac{1}{\sqrt{(x+1)(x-1)}} \sim \frac{1}{2(x-1)}$ када $x \rightarrow 1$, па на основу Теореме 3.5 и задатка 3.2 следи да I дивергира.

Ако је $a > 1$, онда за $x \in (1, a)$ важи $(x^2-a^2)(x-1) < 0$, па подинтегрална функција није дефинисана на $(1, a)$ и нема смисла испитивати конвергенцију интеграла. $\triangle$

ЗАДАТАК 3.19. Испитати конвергенцију интеграла $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\cos x}$.

Теорема 3.6. а) Интеграл $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$ конвергира акко $\alpha > 1$ или $(\alpha = 1, \beta > 1)$.

б) Интеграл $\int_1^e \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$ конвергира ако $\beta < 1$.

в) Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$ конвергира ако $\alpha > 1, \beta < 1$.

ЗАДАТАК 3.20. а) Испитати конвергенцију интеграла (гама функција)

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

у зависности од реалног параметра x .

б) Доказати $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$ за $x > 1$.

в) Доказати $\Gamma(n) = (n-1)!$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

Решење. а)

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \left(\begin{array}{l} u = e^t \\ dt = \frac{du}{u} \end{array} \right) = \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^2 (\ln u)^{1-x}},$$

одакле на основу задатка 3.6 (део под в)) следи да интеграл конвергира ако $1-x < 1$, односно $x > 0$.

б)

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \left(\begin{array}{l} u = t^{x-1} \Rightarrow du = (x-1)t^{x-2} dt \\ dv = e^{-t} dt \Rightarrow v = -e^{-t} \end{array} \right) \\ &= -e^{-t} t^{x-1} \Big|_0^{+\infty} + (x-1) \int_0^{+\infty} t^{x-2} e^{-t} dt = (x-1)\Gamma(x-1). \end{aligned}$$

Искористили смо $\lim_{t \rightarrow 0} e^{-t} t^{x-1} = 0$ и $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t} = 0$.

в) Важи $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{+\infty} = 1$ и

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = \dots = (n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = (n-1)!$$

за свако $n \in \mathbb{N}$.

△

ЗАДАТАК 3.21. Испитати конвергенцију интеграла (бета функција)

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt$$

у зависности од реалних параметра x и y .

Решење. Када $t \rightarrow 0_+$ важи $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \sim \frac{1}{t^{1-x}}$, а када $t \rightarrow 1_-$ имамо $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \sim \frac{1}{(1-t)^{1-y}}$, одакле следи да интеграл конвергира ако $1-x < 1$ и $1-y < 1$, односно $x > 0, y > 0$.

△

Наведимо без доказа особине бета и гама функције које ћемо користити.

а) $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$ за свако $x \in (0, 1)$.

б) $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ за свако $x, y > 0$.

ЗАДАТАК 3.22. Испитати конвергенцију интеграла $\int_0^{+\infty} \sin x dx$.

Решење. Потребно је испитати да ли постоји коначна гранична вредност

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} I(\beta) = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_0^{\beta} \sin x dx.$$

Посматрајмо низове $\beta_n = 2n\pi$ и $\beta'_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$. Важи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(\beta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2n\pi} \sin x dx = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(\beta'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1,$$

одакле можемо закључити да не постоји $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} I(\beta)$ и интеграл дивергира. $\triangle$

ЗАДАТАК 3.23. Нека су дати интеграли $I_n = \int_0^n \sin \frac{1}{\sqrt{x}} dx$, $n \in \mathbb{N}$.

а) Доказати да интеграли I_n ($n \in \mathbb{N}$) конвергирају.

б) Наћи $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

в) Наћи $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{\sqrt{n}}$.

ЗАДАТАК 3.24. Нека су дати несвојствени интеграли

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{ctg} x} dx \text{ и } J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{tg} x} dx.$$

а) Испитати конвергенцију интеграла I и J .

б) Доказати да је $I = J = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

ЗАДАТАК 3.25. Нека су дати несвојствени интеграли

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx \text{ и } J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) dx.$$

а) Испитати конвергенцију интеграла I и J .

б) Доказати да је $I = J = -\frac{\pi}{2} \ln 2$.

ЗАДАТАК 3.26. Израчунати интеграл $\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Решење. Интеграл је несвојствени, али сменом можемо добити Риманов. Наиме,

$$\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left(\begin{array}{l} t = \arcsin x \\ dt = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{t}{2} - \frac{t \cos 2t}{2} \right) dt = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}.$$

△

ЗАДАТАК 3.27. Израчунати интеграл $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Решење.

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left(\begin{array}{l} \arcsin x = t \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = dt \end{array} \right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}.$$

△

ЗАДАТАК 3.28. Израчунати интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$.

Решење.

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \left(\begin{array}{l} \operatorname{arctg} x = t \\ \frac{1}{1+x^2} dx = dt \end{array} \right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}.$$

△

ЗАДАТАК 3.29. Ако конвергирају, израчунати следеће интеграле:

а) $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x};$

б) $\int_0^1 \ln \frac{x+1}{x} dx;$

в) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}.$

Решење. а) Увођењем смене

$$\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x} = \left(\begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{array} \right) = \int_0^{\ln 2} \frac{dt}{t}$$

добивамо да интеграл дивергира.

б)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln \frac{x+1}{x} dx &= \left(\begin{array}{l} u = \ln \frac{x+1}{x} \Rightarrow du = \frac{x}{x+1} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right) \\ &= x \ln \frac{x+1}{x} \Big|_0^1 - \int_0^1 x \frac{x}{x+1} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = \ln 2 - 0 + \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx \\ &= \ln 2 - 0 + \ln |x+1| \Big|_0^1 = 2 \ln 2. \end{aligned}$$

в) Када $x \rightarrow +\infty$ имамо $\frac{1}{x^2+x-2} \sim \frac{1}{x^2}$, одакле на основу задатка 3.4 интеграл дивергира. $\triangle$

ЗАДАТАК 3.30. Доказати да интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^p)}$ конвергира за свако $p \in \mathbb{R}$ и да његова вредност не зависи од p .

Решење.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^p)} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^p)} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^p)} \\ &= \left(\text{у другом интегралу увешћемо смену } \frac{1}{x} = t \right) \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^p)} + \int_0^1 \frac{x^p dx}{(1+x^2)(1+x^p)} = \int_0^1 \frac{(1+x^p)dx}{(1+x^2)(1+x^p)} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)} \\ &= \arctg x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

$\triangle$

ЗАДАТАК 3.31. Израчунати интеграл $\int_0^1 \ln(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) dx$

Решење.

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \ln(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) dx &= \left(\begin{array}{l} x = \cos 2t \\ dx = -2 \sin 2t dt \\ 1 - \cos 2t = 2 \sin^2 t, 1 + \cos 2t = 2 \cos^2 t \end{array} \right) \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sqrt{2 \cos^2 t} - \sqrt{2 \sin^2 t}) \sin 2t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sqrt{2} |\cos t| - \sqrt{2} |\sin t|) \sin 2t dt \\
 &= \ln 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2t dt + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t - \sin t) \sin 2t dt = \ln 2 \left(-\frac{1}{2} \cos 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + 2I_1 \\
 &= \frac{\ln 2}{2} + 2I_1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t - \sin t) \sin 2t dt = \left(\begin{array}{l} u = \ln(\cos t - \sin t) \Rightarrow du = \frac{-\sin t - \cos t}{\cos t - \sin t} dt \\ dv = \sin 2t dt \Rightarrow v = -\frac{1}{2} \cos 2t \end{array} \right) \\
 &= \ln(\cos t - \sin t) \left(-\frac{1}{2} \cos 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t} \cos 2t dt \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t} \cos 2t dt = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} t + 1}{1 - \operatorname{tg} t} \left(\frac{2}{1 + \operatorname{tg}^2 t} - 1 \right) dt \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{u+1}{1-u} \left(\frac{2}{1+u^2} - 1 \right) \frac{du}{1+u^2} = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(u+1)^2}{(1+u^2)^2} du \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{u^2+1} + \frac{2u}{(u^2+1)^2} \right) du = -\frac{1}{2} \left(\operatorname{arctg} u \Big|_0^1 - \frac{1}{u^2+1} \Big|_0^1 \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) \\
 &= -\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

Према томе,

$$I = \frac{\ln 2}{2} + 2I_1 = \frac{\ln 2}{2} + 2 \left(-\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\ln 2}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

△

ЗАДАТАК 3.32. Израчунати интеграл $I = \int_0^{\pi} \frac{x dx}{4 + 5 \sin x}$

Решење. Увођењем смене $\pi - x = t$ добијамо $I = \frac{\pi \ln 2}{3}$.

△

ЗАДАТАК 3.33. Доказати:

$$\text{a) } \int_0^x \cos t^2 dt \sim x \text{ када } x \rightarrow 0;$$

$$\text{б)} \int_0^x e^{t^2} dt \sim \frac{e^{x^2}}{2x} \text{ када } x \rightarrow +\infty.$$

Решење. а)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx} \left(\int_0^x \cos t^2 dt \right)}{\frac{d}{dx}(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x^2}{1} = 1.$$

б)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{\frac{e^{x^2}}{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{d}{dx} \left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)}{\frac{d}{dx} \left(\frac{e^{x^2}}{2x} \right)} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{\frac{e^{x^2} 2x^2 - e^{x^2}}{x^2}} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^2 - 1} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

△

ЗАДАТАК 3.34. За $n \in \mathbb{N}$ израчунати следеће интеграле:

$$\text{а)} \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx;$$

$$\text{б)} \int_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-x^2} dx.$$

Решење. а)

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx &= \left(\begin{array}{l} x = \sqrt{t} \\ dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}} \end{array} \right) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t^{n-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \frac{1}{2} \Gamma \left(n + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(n - \frac{1}{2} \right) \Gamma \left(n - \frac{1}{2} \right) = \dots = \frac{1}{2} \cdot \left(n - \frac{1}{2} \right) \cdot \left(n - \frac{3}{2} \right) \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \Gamma \left(\frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \cdot (2n-1)! \Gamma \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot (2n-1)! \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

б)

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-x^2} dx &= \left(\begin{array}{l} x = \sqrt{t} \\ dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}} \end{array} \right) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = \left(\begin{array}{l} u = t^n \Rightarrow du = nt^{n-1} dt \\ dv = e^{-t} dt \Rightarrow v = -e^{-t} \end{array} \right) \\ &= -\frac{1}{2} t^n e^{-t} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{2} n \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} dt = \frac{1}{2} n \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} dt \\ &= \dots = \frac{1}{2} n(n-1) \cdot \dots \cdot 1 \cdot \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{n!}{2}. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 3.35. Израчунати $\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x} \right)^p dx$, где је $p > -1$.

Решење.

$$\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x} \right)^p dx = \left(\begin{array}{l} \ln \frac{1}{x} = t \\ dx = -e^{-t} dt \end{array} \right) = \int_0^{+\infty} t^p e^{-t} dt dx = \Gamma(p+1).$$

△

ЗАДАТАК 3.36. Наћи природне бројеве m и n за које интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx$ конвергира и за такве вредности m и n израчунати интеграл.

Решење. Сингуларитет је $+\infty$. Када $x \rightarrow +\infty$ имамо

$$\frac{x^{m-1}}{1+x^n} \sim \frac{1}{x^{n-m+1}},$$

одакле интеграл конвергира акко $n-m+1 > 1$, односно $n > m$. За вредности m, n за које је $n > m$ важи

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx &= \left(\begin{array}{l} x^n = t \\ dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1-n}{n}} dt \end{array} \right) = \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{m-1}{n}}}{1+t} t^{\frac{1-n}{n}} dt = \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{m}{n}-1}}{1+t} dt \\ &= \frac{1}{n} B\left(\frac{m}{n}, 1 - \frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{m}{n}\right) \Gamma\left(1 - \frac{m}{n}\right)}{\Gamma(1)} \\ &= \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{m}{n}\right) \Gamma\left(1 - \frac{m}{n}\right) = \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi m}{n}}. \end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 3.37. Нека су $p, q > -1$ реални бројеви. Израчунати $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x dx$.

Решење.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x dx &= \left(\begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x = (1 - \sin^2 x)^{\frac{1}{2}} = (1 - t^2)^{\frac{1}{2}} \\ -\sin x dx = \frac{1}{2} (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}} (-2t dt) \end{array} \right) \\ &= \int_0^1 t^p (1 - t^2)^{\frac{q}{2}} (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}} dt = \int_0^1 t^p (1 - t^2)^{\frac{q-1}{2}} dt = \left(\begin{array}{l} t = \sqrt{u} \\ dt = \frac{du}{2\sqrt{u}} \end{array} \right) \\ &= \int_0^1 u^{\frac{p}{2}} (1 - u)^{\frac{q-1}{2}} \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \int_0^1 u^{\frac{p-1}{2}} (1 - u)^{\frac{q-1}{2}} du = \frac{1}{2} B\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2}\right). \end{aligned}$$

△

4 Примене интеграла

Нека је $f(x)$ непрекидна функција на $[a, b]$ и $f(x) \geq 0$. Површина криволинијског трапеца $ABCD$ (видети слику ...) је

$$P_{ABCD} = \int_a^b f(x) dx.$$

Нека је $g(x)$ непрекидна функција на $[a, b]$ и $g(x) \leq 0$. Површина криволинијског трапеца $ABCD$ (видети слику ...) је

$$P_{ABCD} = - \int_a^b g(x) dx.$$

Нека су $f(x)$ и $g(x)$ непрекидне функције на $[a, b]$ и $g(x) \geq f(x)$ за свако $x \in [a, b]$. Површина криволинијског трапеца $ABCD$ (видети слику ...) је

$$P_{ABCD} = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

Нека је $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ глатка функција. Дужина криве $y = f(x)$ од тачке $(a, f(a))$ до тачке $(b, f(b))$ (видети слику ...) је

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Нека је $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна и позитивна функција. Ако се криволинијски трапез, чије стране су сегмент $[a, b]$, делови правих $x = a$, $x = b$ и крива $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, обрће око x -осе, добија се обртно тело T (видети слику ...).

Запремина тела T је

$$V(T) = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Површина омотача тела T је

$$P(T) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

ЗАДАТАК 4.1. Израчунати површину дела равни ограниченог параболом $y = 2 - x^2$ и правом $y = -x$.

Решење. $P = \int_{-1}^2 (2 - x^2 + x) dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right) \Big|_{-1}^2 = \frac{9}{2}.$ $\triangle$

ЗАДАТАК 4.2. Наћи запремину тела добијеног ротацијом области између x -осе и криве $y = x^2 - 2x$ око: а) x -осе; б) праве $y = -1$; в) y -осе; г) праве $x = 2$; д) праве $y = 2$.

Решење. а) $V = \pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx = \pi \int_0^2 (x^4 - 2x^3 + 4x^2) dx = \pi \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{4x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{16\pi}{15};$

б) $V = \pi \int_0^2 (1 - (x^2 - 2x + 1)^2) dx = \frac{8\pi}{5};$

в) $V = \pi \int_{-1}^0 ((1 + \sqrt{1+y})^2 - (1 - \sqrt{1+y})^2) dy = 4\pi \int_{-1}^0 \sqrt{1+y} dy = \frac{8\pi}{3};$

г) $V = \frac{8\pi}{3};$

д) $V = \pi \int_0^2 ((x^2 - 2x - 2)^2 - (-2)^2) dx = \frac{32\pi}{5}.$ $\triangle$

ЗАДАТАК 4.3. Наћи дужину лука криве $y = \sqrt{x} - \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}, x \in [1, 4]$.

$$\text{Решење. } L = \int_1^4 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \frac{10}{3}. \quad \triangle$$

ЗАДАТАК 4.4. Наћи површину површи добијене ротацијом криве $y = \sqrt{2x+1}, x \in [0, 3]$ око x -осе.

Решење.

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \int_0^3 f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = 2\pi \int_0^3 \sqrt{2x+1} \sqrt{1 + \frac{1}{2x+1}} dx = 2\pi\sqrt{2} \int_0^3 \sqrt{x+1} dx \\ &= \frac{28\pi\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

$\triangle$

ЗАДАТАК 4.5. Нека су $A(-a, a^2)$ и $B(a, a^2)$ тачке на параболи $y = x^2$, нека је $O(0, 0)$ координатни почетак и нека је са $P(x^2, a^2)$ означена површина дела равни ограниченог параболом $y = x^2$ и правом $y = a^2$. Израчунати $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{P(\triangle ABO)}{P(x^2, a^2)}$.

$$\text{Решење. } P(\triangle ABO) = a^3, P(x^2, a^2) = \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = \frac{4a^3}{3}, \lim_{a \rightarrow 0} \frac{P(\triangle ABO)}{P(x^2, a^2)} = \frac{3}{4}. \quad \triangle$$

ЗАДАТАК 4.6. Израчунати обим и површину фигуре ограничене кривом $(x-1)^2 + y^2 = 4$ и правима $y = 0, x = 1$ и $\sqrt{3}x + 3y - 3\sqrt{3} = 0$. Затим, одредити запремину тела које се добија ротацијом дате фигуре око x -осе.

Решење.

$$\begin{aligned} P &= \int_{-1}^0 \sqrt{4 - (x-1)^2} dx + \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}}{2} = \int_{-1}^0 \sqrt{4 - (x-1)^2} dx + \frac{5\sqrt{3}}{6} = \left(\begin{array}{l} x-1 = t \\ dx = dt \end{array} \right) \\ &= \int_{-2}^{-1} \sqrt{4 - t^2} dt + \frac{5\sqrt{3}}{6} = \left(\begin{array}{l} t = 2 \sin u \\ dt = 2 \cos u du \end{array} \right) = 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}} \cos^2 u du + \frac{5\sqrt{3}}{6} \\ &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 2u) du + \frac{5\sqrt{3}}{6} = 2 \left(u + \frac{1}{2} \sin 2u \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}} + \frac{5\sqrt{3}}{6} = (2u + \sin 2u) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}} + \frac{5\sqrt{3}}{6} \\ &= 2 \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{6} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{6} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O &= O_1 + O_2 + O_3 + O_4 = 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} + \sqrt{(0-1)^2 + \left(\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} + O_4 \\ &= 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} + O_4 = 2 + \frac{4\sqrt{3}}{3} + O_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
O_4 &= \int_{-1}^0 \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx = \int_{-1}^0 \sqrt{1 + \left[\left(\sqrt{4 - (x-1)^2} \right)' \right]^2} dx \\
&= \int_{-1}^0 \sqrt{1 + \left[\frac{-2(x-1)}{2\sqrt{4 - (x-1)^2}} \right]^2} dx = \int_{-1}^0 \sqrt{1 + \frac{(x^2 - 2x + 1)}{4 - (x-1)^2}} dx \\
&= \int_{-1}^0 \sqrt{\frac{4 - x^2 + 2x - 1 + x^2 - 2x + 1}{4 - (x-1)^2}} dx = 2 \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{4 - (x-1)^2}} dx \left(\begin{array}{l} t = x - 1 \\ dt = dx \end{array} \right) \\
&= 2 \int_{-2}^{-1} \frac{1}{\sqrt{4 - t^2}} dt = 2 \arcsin \frac{t}{2} \Big|_{-2}^{-1} = 2 \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{2\pi}{3},
\end{aligned}$$

$$O = 2 + \frac{4\sqrt{3}}{3} + O_4 = 2 + \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{2\pi}{3}.$$

$$\begin{aligned}
V &= V_1 + V_2 = \pi \int_{-1}^0 \left(\sqrt{4 - (x-1)^2} \right)^2 dx + \pi \int_0^1 \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}x \right)^2 dx \\
&= \pi \int_{-1}^0 (3 + 2x - x^2) dx + \pi \int_0^1 \left(3 - 2x + \frac{1}{3}x^2 \right) dx \\
&= \pi \left(3x + x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^0 + \pi \left(3x - x^2 - \frac{x^3}{9} \right) \Big|_0^1 = \pi \left(3 - 1 - \frac{1}{3} \right) + \pi \left(3 - 1 - \frac{1}{9} \right) \\
&= \frac{34}{9} \pi.
\end{aligned}$$

△

ЗАДАТАК 4.7. Израчунати површину и запремину торуса који се добија ротацијом круга $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ око x -осе.

Решење. $V = 2\pi^2 a^2 b, P = 4\pi^2 ab$.

△

ЗАДАТАК 4.8. Наћи површину области коју ограничава крива $(y - 3x^3)^2 + x^2 = 3$.

Решење. $P = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} ((\sqrt{3 - x^2} + 3x^3) - (-\sqrt{3 - x^2} + 3x^3)) dx = 3\pi$.

△

5 Нумерички редови

5.1 Појам и својства бројног реда

Неке је $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ низ реалних бројева. Израз

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

назива се бесконачним реалним редом с општим чланом a_n , или краће реалним редом. Зборови

$$\begin{aligned}s_1 &= a_1, \\s_2 &= a_1 + a_2, \\s_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\&\dots\dots\dots \\s_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n, \\&\dots\dots\dots\end{aligned}$$

називају се парцијалним зборовима или парцијалним сумама реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Дефиниција 5.1. Ако постоји коначан лимес $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ низа $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ парцијалних сума реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, онда се каже да тај ред конвергира и да му је збир једнак s . У том случају се пише $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Тај запис се користи и када је $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \pm\infty$. За ред који не конвергира (било да је $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ бесконачан, било да не постоји) каже се да дивергира.

Теорема 5.1. Ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира, онда конвергира и ред $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$, $c \in \mathbb{R}$. При томе је $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ако редови $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергирају, онда конвергира и ред $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$. При томе је $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Теорема 5.2. Ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира, онда је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

ЗАДАТАК 5.1. Израчунати парцијалне суме и испитати конвергенцију редова:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}); \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}; \text{ г) } \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}).$$

Решење. а) Из једнакости $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ имамо

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1},$$

одакле је $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2}$, па ред конвергира.

б) Низ парцијалних сума је

$$S_n = (\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{1}) + (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}) + \dots + (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) = \sqrt[3]{n+1} - 1,$$

одакле је $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$, па ред дивергира.

в) Из једнакости $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$ следи да је $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$, одакле је $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$, па ред конвергира.

г) Низ парцијалних сума је $S_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} + 1 - \sqrt{2}$ и ред конвергира.

△

ЗАДАТАК 5.2. Нека је $q \in \mathbb{R}$. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$.

Решење. Нађимо низ парцијалних сума

$$S_m = \sum_{n=1}^m q^n = \begin{cases} \frac{1-q^{m+1}}{1-q}, & q \neq 1; \\ m, & q = 1. \end{cases}$$

Ако је $|q| < 1$, онда је $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1-q^{m+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$.

Ако је $q > 1$, онда је $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1-q^{m+1}}{1-q} = +\infty$.

Ако је $q = 1$, онда је $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = \lim_{m \rightarrow \infty} m = +\infty$.

Ако је $q \leq -1$, онда не постоји $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m$.

Према томе, ред конвергира за $|q| < 1$. △

ЗАДАТАК 5.3. Нека је $|q| < 1$. Сумирати ред $\sum_{n=1}^{\infty} nq^n$.

Решење. Први начин. Нека је $S_n = \sum_{k=1}^n$ и множењем са обе стране са q имамо систем

$$\begin{aligned} S_n &= q + 2q^2 + 3q^3 + \dots + nq^n \\ qS_n &= q^2 + 2q^3 + 3q^4 + \dots + nq^{n+1}. \end{aligned}$$

Одузимањем друге једначине од прве добијамо

$$(1-q)S_n = q + q^2 + q^3 + \dots + q^n - nq^{n+1},$$

одакле је

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1-q}(q + q^2 + q^3 + \dots + q^n - nq^{n+1}) = \frac{q}{1-q}(1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} - nq^n) \\ &= \frac{q}{1-q} \left(\frac{1-q^n}{1-q} - nq^n \right). \end{aligned}$$

Одавде је $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q}{1-q} \left(\frac{1-q^n}{1-q} - nq^n \right) = \frac{q}{(1-q)^2}$.

Други начин за решавање овог задатка је помоћу интеграције функционалног реда $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$. △

ЗАДАТАК 5.4. Сумирати ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^n}{3^n}$.

Решење. Из познате суме (задатак 5.2)

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

имамо

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1 = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} - 1 = 2, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n - 1 = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} - 1 = -\frac{1}{4}, \end{aligned}$$

одакле је

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^n}{3^n} = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}.$$

△

ЗАДАТАК 5.5. Сумирати ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$.

Решење. На основу задатка 5.3 имамо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{\frac{1}{3}}{(1 - \frac{1}{3})^2} = \frac{3}{4}.$$

△

ЗАДАТАК 5.6. Сумирати ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$.

Решење.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1} \right)$$

Низ парцијалних сума је једнак

$$\begin{aligned} S_m &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^m \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1} \right) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{4m-3} - \frac{1}{4m+1} \right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{4m+1} \right), \end{aligned}$$

одакле је

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = \frac{1}{4}.$$

△

ЗАДАТАК 5.7. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arcsin \frac{n}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}$.

Решење. Из граничне вредности низа

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \arcsin \frac{n}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \arcsin \frac{1}{\sqrt{(1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{2}{n})}} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

долазимо до закључка да општи члан не конвергира нули, па ред дивергира на основу Теореме 5.2. △

5.2 Редови с позитивним члановима

Дефиниција 5.2. За ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ кажемо да је ред с позитивним члановима ако постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да је $a_n \geq 0$ за $n \geq n_0$. Код ових редова низ (s_n) парцијалних сума је растући за $n \geq n_0$.

Теорема 5.3. Ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с позитивним члановима конвергира ако и само ако је низ (s_n) његових парцијалних сума ограничен.

Теорема 5.4. Нека су дати редови $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ с позитивним члановима, при чему постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да је $a_n \leq b_n$ за $n \geq n_0$.

а) Ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира, онда и ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира.

б) Ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира, онда и ред $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ дивергира.

Теорема 5.5. Нека су дати редови $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ с позитивним члановима, при чему $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = K$, $0 \leq K \leq +\infty$.

а) Ако је $K = +\infty$ и ред $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ дивергира, онда и ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира.

б) Ако је $K = 0$ и ред $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира, онда и ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира.

в) Ако је $0 < K < +\infty$, онда су редови $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ еквиконвергентни. Специјалан случај, ако је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ (кажемо да се a_n понаша као b_n и пишемо $a_n \sim b_n, n \rightarrow \infty$) редови су еквиконвергентни.

Теорема 5.6. (Даламберов критеријум) Нека је дат позитиван ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

а) Ако постоје $n_0 \in \mathbb{N}$ и $q \in \mathbb{R}$, тако да је

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1 \quad \text{за } n \geq n_0,$$

онда ред конвергира.

Ако постоје $n_0 \in \mathbb{N}$ и $q \in \mathbb{R}$, тако да је

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q > 1 \quad \text{за } n \geq n_0,$$

онда ред дивергира.

б) Ако је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, онда за $q < 1$ ред конвергира, а за $q > 1$ ред дивергира. За $q = 1$ овај критеријум нам не може помоћи да одредимо конвергенцију.

Теорема 5.7. (Кошијев критеријум) Нека је дат позитиван ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

а) Ако постоје $n_0 \in \mathbb{N}$ и $q \in \mathbb{R}$, тако да је

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \quad \text{за } n \geq n_0,$$

онда ред конвергира.

Ако постоје $n_0 \in \mathbb{N}$ и $q \in \mathbb{R}$, тако да је

$$\sqrt[n]{a_n} \geq q > 1 \quad \text{за } n \geq n_0,$$

онда ред дивергира.

б) Ако је $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, онда за $q < 1$ ред конвергира, а за $q > 1$ ред дивергира. За $q = 1$ овај критеријум нам не може помоћи да одредимо конвергенцију.

Теорема 5.8. (Уопштени Кошијев критеријум) Нека је дат позитиван ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ако је $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} = q$, онда за $q < 1$ ред конвергира, а за $q > 1$ ред дивергира. За $q = 1$ овај критеријум нам не може помоћи да одредимо конвергенцију.

Теорема 5.9. (Интегрални критеријум) Нека је f непрекидна, ненегативна и опадајућа реална функција за $x \geq 1$ и нека је $a_n = f(n)$. Тада ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира ако и само ако конвергира несвојствени интеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$.

ЗАДАТАК 5.8. За које $\alpha \in \mathbb{R}$ конвергира ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$?

Решење. На основу интегралног критеријума (Теорема 5.9) важи да ред конвергира ако и само ако конвергира интеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, а он на основу задатка 3.4 конвергира за $\alpha > 1$. △

ЗАДАТАК 5.9. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{1}{n}}{n\sqrt{n}}$.

Решење. Ред је позитиван јер је $\cos \frac{1}{n} \geq 0$ за $n \in \mathbb{N}$. На основу асимптотског понашања општег члана када $n \rightarrow \infty$

$$a_n = \frac{\cos \frac{1}{n}}{n\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},$$

ред конвергира на основу Теореме 5.5 (део под в)) и задатка 5.8. △

ЗАДАТАК 5.10. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2+2n}$.

Решење. На основу асимптотског понашања општег члана када $n \rightarrow \infty$

$$a_n = \frac{n+4}{n^2+2n} \sim \frac{1}{n},$$

ред дивергира на основу Теореме 5.5 (део под в)) и задатка 5.8. △

ЗАДАТАК 5.11. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$.

Решење. На основу интегралног критеријума важи да ред конвергира ако и само ако конвергира интеграл $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}}$, а он на основу Теореме 3.6 конвергира за $\alpha > 1$ и за $\alpha = 1, \beta > 1$ △

ЗАДАТАК 5.12. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n^3}$.

Решење. Општи члан не тежи нули ($\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{n^3} = 1$), па ред дивергира. △

ЗАДАТАК 5.13. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \sin n}$.

Решење. За свако $n \geq 1$ важи $\frac{1}{n + \sin n} \geq \frac{1}{n+1}$, па на основу дивергенције реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ и на основу Теореме 5.4 почетни ред дивергира. △

ЗАДАТАК 5.14. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - e^{\frac{1}{n^2}}\right)$.

Решење. На основу асимптотског понашања општег члана када $n \rightarrow \infty$

$$a_n = 1 - e^{\frac{1}{n^2}} \sim 1 - \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{n^2},$$

ред конвергира на основу Теореме 5.5 (део под в)) и задатка 5.8. △

ЗАДАТАК 5.15. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\right)$.

Решење. На основу асимптотског понашања општег члана када $n \rightarrow \infty$

$$a_n = e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n} \sim 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - 1 - \frac{1}{n} \sim -\frac{1}{2n^2},$$

ред конвергира на основу Теореме 5.5 (део под в)) и задатка 5.8. △

ЗАДАТАК 5.16. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Решење. На основу асимптотског понашања општег члана када $n \rightarrow \infty$

$$a_n = \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}},$$

ред дивергира на основу Теореме 5.5 (део под в)) и на основу дивергенције реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ (погледати задатак 5.8). △

ЗАДАТАК 5.17. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=19}^{\infty} \sqrt{n} \sin \frac{1}{n^2}$.

Решење. На основу асимптотског понашања општег члана када $n \rightarrow \infty$

$$a_n = \sqrt{n} \sin \frac{1}{n^2} \sim \sqrt{n} \cdot \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},$$

ред конвергира на основу Теореме 5.5 (део под в)) и на основу конвергенције реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ (погледати задатак 5.8). $\triangle$

ЗАДАТАК 5.18. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + n^2(-1)^n}$.

Решење. На основу асимптотског понашања општег члана када $n \rightarrow \infty$

$$a_n = \frac{1}{2^n + n^2(-1)^n} \sim \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{1 + (-1)^n \frac{n^2}{2^n}} \sim \frac{1}{2^n},$$

при чему смо искористили $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$, ред конвергира на основу Теореме 5.5 (део под в)) и на основу конвергенције реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ (погледати задатак 5.2). $\triangle$

ЗАДАТАК 5.19. Нека су $a, b \in \mathbb{R}$ и $b > 0$. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} n^a \sin \frac{1}{n^b} \ln \frac{n+1}{n}$.

Решење. Имамо асимптотског понашања општег члана када $n \rightarrow \infty$

$$a_n = n^a \sin \frac{1}{n^b} \ln \frac{n+1}{n} \sim n^a \sin \frac{1}{n^b} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \sim n^a \cdot \frac{1}{n^b} \cdot \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n^{-a+b+1}}.$$

На основу задатка 5.8 ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-a+b+1}}$ конвергира ако је $-a + b + 1 > 1$, то јест ако је $a < b$. На основу Теореме 5.5 (део под в)) следи да ред $\sum_{n=1}^{\infty} n^a \sin \frac{1}{n^b} \ln \frac{n+1}{n}$ конвергира ако је $a < b$. $\triangle$

ЗАДАТАК 5.20. Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ конвергирају, доказати да конвергирају и редови:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)^2; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}.$$

Решење. а) Из неједнакости $|a_n b_n| \leq \frac{1}{2} (a_n^2 + b_n^2)$ и конвергенције редова $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$, следи да ред $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ конвергира, односно ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ апсолутно конвергира, а одатле и обично конвергира.

б) На основу једнакости $(a_n - b_n)^2 = a_n^2 - 2a_n b_n + b_n^2$, следи да из конвергенције редова $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ (део под а)) конвергира и ред $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)^2$.

в) Следи из дела под а) када се узме $b_n = \frac{1}{n}$. $\triangle$

ЗАДАТАК 5.21. Нека је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергентан ред са позитивним члановима и нека је $\alpha > 1$. Доказати да конвергирају и следећи редови:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin a_n; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} a_n^\alpha; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} (e^{a_n} - 1).$$

Решење. а) Коришћењем неједнакости $\sin a_n \leq a_n$ и на основу Теореме 5.4 следи да ред $\sum_{n=1}^{\infty} \sin a_n$ конвергира.

б) Коришћењем неједнакости $\sin a_n^\alpha \leq a_n$ за $n \geq n_0$ и на основу Теореме 5.4 следи да ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^\alpha$ конвергира.

в) На основу асимптотског понашања општег члана $e^{a_n} - 1 \sim a_n$ следи да ред конвергира (погледати Теорему 5.5). $\triangle$

ЗАДАТАК 5.22. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!}$.

Решење. Из граничне вредности

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(2(n+1))!}{(n+1)!(n+1)!}}{\frac{(2n)!}{n!n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)!n!n!}{(2n)!(n+1)!(n+1)!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 6n + 2}{n^2 + 2n + 1} = 4 \end{aligned}$$

и на основу Даламберовог критеријума (Теорема 5.6, део под б)) следи да ред дивергира ($4 > 1$). $\triangle$

ЗАДАТАК 5.23. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

Решење. Из граничне вредности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2} = \frac{1}{2}$$

и на основу Кошијевог критеријума (Теорема 5.7, део под б)) следи да ред конвергира ($\frac{1}{2} < 1$). $\triangle$

ЗАДАТАК 5.24. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^n}{n^n}$.

Решење. Из граничне вредности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(\ln n)^n}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

и на основу Кошијевог критеријума (Теорема 5.7, део под б)) следи да ред конвергира ($0 < 1$). $\triangle$

ЗАДАТАК 5.25. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(n!)^2}{(2n)!}$.

Решење. Из граничне вредности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1}((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\frac{3^n(n!)^2}{(2n)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!3^{n+1}((n+1)!)^2}{(2(n+1))!3^n(n!)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{3}{4}$$

и на основу Даламберовог критеријума (Теорема 5.6, део под б)) следи да ред конвергира ($\frac{3}{4} < 1$). $\triangle$

ЗАДАТАК 5.26. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^n+5)n}{3^n}$.

Решење. Испитајмо конвергенцију редова

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n}{3^n} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{3^n}.$$

Из граничних вредности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n n}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \sqrt[n]{n}}{3} = \frac{2}{3},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{5n}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{5} \sqrt[n]{n}}{3} = \frac{1}{3},$$

и на основу Кошијевог критеријума (Теорема 5.7, део под б)) следи да редови конвергирају ($\frac{1}{3} < 1$, $\frac{2}{3} < 1$), а одатле конвергира и ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^n+5)n}{3^n}$ као збир два конвергентна реда. $\triangle$

ЗАДАТАК 5.27. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2^n}{e^n}$.

Решење. Испитајмо конвергенцију редова

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^n} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{e^n}.$$

Из граничних вредности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{e^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{e} = \frac{1}{e},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{e^n}} = \frac{2}{e},$$

и на основу Кошијевог критеријума (Теорема 5.7, део под б)) следи да редови конвергирају ($\frac{1}{e} < 1$, $\frac{2}{e} < 1$), а одатле конвергира и ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2^n}{e^n}$ као збир два конвергентна реда. $\triangle$

ЗАДАТАК 5.28. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=2}^{\infty} 2^{-n} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n(n+1)}$.

Решење. Из граничне вредности

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^{-n} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{n-1}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{n-1}{2} \cdot \frac{2(n+1)}{n-1}} = \frac{1}{2} e^2, \end{aligned}$$

и на основу Кошијевог критеријума (Теорема 5.7, део под б)) следи да ред дивергира ($\frac{1}{2}e^2 > 1$). $\triangle$

ЗАДАТАК 5.29. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$.

Решење. Из граничне вредности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} = 0$$

и на основу Кошијевог критеријума (Теорема 5.7, део под б)) следи да ред конвергира ($0 < 1$). $\triangle$

ЗАДАТАК 5.30. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{n!(n+1)!(n+2)!}$

Решење. Из граничне вредности

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(3(n+1))!}{(n+1)!(n+2)!(n+3)!}}{\frac{(3n)!}{n!(n+1)!(n+2)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+3)!n!(n+1)!(n+2)!}{(n+1)!(n+2)!(n+3)!(3n)!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)(n+2)(n+3)} = 27 \end{aligned}$$

и на основу Даламберовог критеријума (Теорема 5.6, део под б)) следи да ред дивергира ($27 > 1$). $\triangle$

ЗАДАТАК 5.31. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$.

Решење. Из граничне вредности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((n+1)!)^2 2^{n^2}}{2^{(n+1)^2} (n!)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{2^{2n+1}} = 0$$

и на основу Даламберовог критеријума (Теорема 5.6, део под б)) следи да ред дивергира ($0 < 1$). $\triangle$

ЗАДАТАК 5.32. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{2}{n}}}{(2+\frac{1}{n})^n}$.

Решење. Из граничне вредности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^{\frac{2}{n}}}{(2+\frac{1}{n})^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{2}{n^2}}}{2+\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{2 \cdot \frac{\ln n}{n^2}}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}$$

и на основу Кошијевог критеријума (Теорема 5.7, део под б)) следи да ред конвергира ($\frac{1}{2} < 1$). $\triangle$

ЗАДАТАК 5.33. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}$.

Решење. Из граничне вредности

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^3(\sqrt{2}+1)}{3} = \frac{\sqrt{2}+1}{3}$$

и на основу уопштеног Кошијевог критеријума (Теорема 5.8) следи да ред конвергира ($\frac{\sqrt{2}+1}{3} < 1$). $\triangle$

ЗАДАТАК 5.34. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\sin \frac{1}{n}}$.

Решење. Општи члан не тежи нули и ред дивергира. $\triangle$

ЗАДАТАК 5.35. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2+1^2) \cdot (2+2^2) \cdot \dots \cdot (2+n^2)}$.

Решење. На основу граничне вредности $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2+(n+1)^2} = 0 < 1$ и Даламберовог критеријума, ред конвергира. $\triangle$

ЗАДАТАК 5.36. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^3 \cdot 3^4 \cdot \dots \cdot n^{n+1}}{2^4 \cdot 3^5 \cdot \dots \cdot (n-1)^{n+1}}$.

Решење. На основу граничне вредности $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+2}}{n^{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2} = e > 1$ и Даламберовог критеријума, ред дивергира. $\triangle$

ЗАДАТАК 5.37. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Решење. На основу граничне вредности $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$ и Кошијевог критеријума, ред конвергира. $\triangle$

ЗАДАТАК 5.38. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+3}}{(3n+1)^n}$.

Решење. На основу граничне вредности $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^n \cdot n^3}{(3n+1)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (\sqrt[n]{n})^3}{3n+1} = \frac{1}{3} < 1$ и Кошијевог критеријума, ред конвергира. $\triangle$

ЗАДАТАК 5.39. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{n}$.

Решење. Ред конвергира јер се општи члан понаша на следећи начин $\frac{\sin \frac{1}{n}}{n} \sim \frac{\frac{1}{n}}{n} \sim \frac{1}{n^2}$. $\triangle$

ЗАДАТАК 5.40. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{1}{n}}{n}$.

Решење. Ред дивергира јер се општи члан понаша на следећи начин $\frac{\cos \frac{1}{n}}{n} \sim \frac{1}{n}$. $\triangle$

5.3 Редови с произвољним члановима

Дефиниција 5.3. За ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

кажемо да је апсолутно конвергира ако конвергира ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Теорема 5.10. *Ако ред апсолутно конвергира, онда он и конвергира (често се каже обично конвергира).*

Дефиниција 5.4. Ако ред конвергира (обично), а не конвергира апсолутно, онда кажемо да условно конвергира.

Дефиниција 5.5. Ред $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, где су реални бројеви $a_n, n \in \mathbb{N}$, сви истог знака, назива се знакопроменљиви (алтернајући, алтернативни).

Теорема 5.11. (Лајбницов критеријум) Нека је $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ знакопроменљиви ред и нека низ a_n монотонно тежи нули, при чему је монотон после неког n_0 -члана. Тада тај ред конвергира.

ЗАДАТАК 5.41. За које $p \in \mathbb{R}$ ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ конвергира апсолутно, а за које условно?

Решење. Ред $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^p} \right| = \frac{1}{n^p}$ конвергира за $p > 1$, па ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ апсолутно конвергира за $p > 1$.

За $p \leq 0$ општи члан $\frac{(-1)^n}{n^p}$ не тежи нули, па ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ дивергира.

Остало је да се испита конвергенција за $p \in (0, 1]$. Доказали смо да тада ред не конвергира апсолутно, али конвергира обично на основу Лајбницовог критеријума (Теорема 5.11) јер $\frac{1}{n^p}$ монотонно тежи нули када $n \rightarrow \infty$.

Према томе ред конвергира апсолутно за $p > 1$, а условно за $p \in (0, 1]$. $\triangle$

ЗАДАТАК 5.42. Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Решење. Условно конвергира на основу Лајбницовог критеријума. Видети задатак 5.41. $\triangle$

ЗАДАТАК 5.43. Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctg n}{n^2+1}$.

Решење. Доказаћемо да ред апсолутно конвергира. Из неједнакости

$$\left| (-1)^n \frac{\arctg n}{n^2+1} \right| \leq \frac{\pi}{2(n^2+1)}$$

и конвергенције реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2(n^2+1)}$ (општи члана се понаша као $\frac{C}{n^2}, C = \frac{\pi}{2}$) следи да ред

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{\arctg n}{n^2+1} \right|$ конвергира, односно да ред $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctg n}{n^2+1}$ апсолутно конвергира. $\triangle$

ЗАДАТАК 5.44. Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} \right).$$

Решење. Из граничне вредности

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} \right) \cdot \frac{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n - n^2 - 1}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

можемо закључити да општи члан реда не тежи нули, па ред дивергира. $\triangle$

ЗАДАТАК 5.45. Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{4n-1}$.

Решење. Ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{4n-1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{4n-1}$$

не конвергира јер се општи члан понаша као

$$\frac{\sqrt{n}}{4n-1} \sim \frac{1}{4\sqrt{n}},$$

а ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\sqrt{n}}$ дивергира. Према томе почетни ред не конвергира апсолутно.

Испитајмо обичну конвергенцију. Доказаћемо да је низ $\frac{\sqrt{n}}{4n-1}$ монотono опадајући за $n \geq n_0$. Нека је $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{4x-1}$. Тада је

$$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{x}}{4x-1} \right)' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(4x-1) - 4\sqrt{x}}{(4x-1)^2} = \frac{(4x-1) - 8x}{2\sqrt{x}(4x-1)^2} = \frac{-1-4x}{2\sqrt{x}(4x-1)^2} < 0$$

за $x > 0$, па је низ $f(n)$ монотono опадајући за $n \geq 1$. Такође важи $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{4n-1} = 0$. Испуњени су услови за Лајбницов критеријум (Теорема 5.11), па почетни ред конвергира. С обзиром да смо доказали да не конвергира апсолутно, онда конвергира условно. $\triangle$

ЗАДАТАК 5.46. Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{\sqrt{n^3+1}}$.

Решење. Ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{2n}{\sqrt{n^3+1}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^3+1}}$$

не конвергира јер се општи члан понаша као

$$\frac{2n}{\sqrt{n^3+1}} \sim \frac{2}{n^{\frac{1}{2}}},$$

а ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{\frac{1}{2}}}$ дивергира (видети задатак 5.8). Према томе почетни ред не конвергира апсолутно.

Испитајмо обичну конвергенцију. Доказаћемо да је низ $\frac{2n}{\sqrt{n^3+1}}$ монотono опадајући за $n \geq n_0$. Нека је $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^3+1}}$. Тада је

$$f'(x) = \left(\frac{2x}{\sqrt{x^3+1}} \right)' = 2 \cdot \frac{\sqrt{x^3+1} - x \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}}{x^3+1} = 2 \cdot \frac{2x^3+2-3x^3}{2(x^3+1)^{\frac{3}{2}}} = 2 \cdot \frac{2-x^3}{2(x^3+1)^{\frac{3}{2}}} < 0$$

за $x > \sqrt[3]{2}$, па је низ $f(n)$ монотono опадајући за $n \geq 2$. Такође важи $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^3+1}} = 0$. Испуњени су услови за Лајбницов критеријум (Теорема 5.11), па почетни ред конвергира. С обзиром да смо доказали да не конвергира апсолутно, онда конвергира условно. $\triangle$

ЗАДАТАК 5.47. Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi) \ln \frac{n^2+n+\pi}{n^2+\pi}$.

Решење. С обзиром да је $\cos(n\pi) = (-1)^n$ имамо ред $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n^2+n+\pi}{n^2+\pi}$. Ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \ln \frac{n^2+n+\pi}{n^2+\pi} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+n+\pi}{n^2+\pi}$$

не конвергира јер се општи члан понаша као

$$\ln \frac{n^2+n+\pi}{n^2+\pi} \sim \ln \left(1 + \frac{n}{n^2+\pi} \right) \sim \frac{n}{n^2+\pi} \sim \frac{1}{n},$$

а ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ дивергира (користили смо $\ln(1+x) \sim x$ када $x \rightarrow 0$). Према томе почетни ред не конвергира апсолутно.

Испитајмо обичну конвергенцију. Доказаћемо да је низ $\frac{n}{n^2+\pi}$ монотонно опадајући за $n \geq n_0$. Нека је $f(x) = \frac{x}{x^2+\pi}$. Тада је

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2+\pi} \right)' = \frac{x^2+\pi-2x^2}{(x^2+\pi)^2} = \frac{\pi-x^2}{(x^2+\pi)^2} < 0$$

за $x > \sqrt{\pi}$, па је низ $f(n)$ монотонно опадајући за $n \geq 2$. Одатле следи да и низ $\ln \left(1 + \frac{n}{n^2+\pi} \right)$ је опадајући. Такође важи $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{n}{n^2+\pi} \right) = 0$. Испуњени су услови за Лајбницов критеријум (Теорема 5.11), па почетни ред конвергира. С обзиром да смо доказали да не конвергира апсолутно, онда конвергира условно. $\triangle$

ЗАДАТАК 5.48. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$.

Решење. Нека је $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ општи члан реда. Тада је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ и низ a_n је монотон јер је извод функције $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ једнак $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ и негативан је за $x > 1$. На основу Лајбницовог критеријума ред конвергира. $\triangle$

ЗАДАТАК 5.49. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$.

Решење. Нека је $a_n = \frac{1}{n - \ln n}$ општи члан реда. Тада је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\ln n}{n}} = 0 \cdot 1 = 0$ и низ a_n је монотон јер је извод функције $f(x) = \frac{1}{x - \ln x}$ једнак $f'(x) = \frac{1-x}{(x - \ln x)^2}$ и негативан је за $x > 1$. На основу Лајбницовог критеријума ред конвергира. $\triangle$

ЗАДАТАК 5.50. Испитати апсолутну и условну конвергенцију редова:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^4+3^n}{\pi^n};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right) \right);$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n \arctg \frac{1}{n+e}}.$

Решење. а) Доказаћемо да ред апсолутно конвергира. За општи члан низа важи

$$|a_n| = \left| \frac{n^4 + 3^n}{\pi^n} \right| \sim \frac{3^n}{\pi^n} \sim \left(\frac{3}{\pi} \right)^n,$$

одакле ред апсолутно конвергира јер геометријски ред $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{\pi} \right)^n$ конвергира ($3 < \pi$).

б) Прво ћемо испитати апсолутну конвергенцију реда. Важи

$$|a_n| = \left| (-1)^n \left(\ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right) \right) \right| \sim \left| \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right) \right| \sim \left| \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right| \sim \frac{1}{\sqrt{n}},$$

а ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ дивергира (видети задатак 5.8). Према томе почетни ред не конвергира апсолутно.

Испитајмо обичну конвергенцију. Низ $\ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right)$ монотono опадајући, па на основу Лајбницевог критеријума ред обично конвергира.

Дакле, ред условно конвергира.

в) Доказаћемо да ред апсолутно конвергира. За општи члан низа важи

$$|a_n| = \left| (-1)^n e^{-n} \operatorname{arctg} \frac{1}{n+e} \right| \sim e^{-n},$$

одакле ред апсолутно конвергира јер геометријски ред $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e} \right)^n$ конвергира. △