

Математички факултет, Универзитет у Београду  
Анализа 1 (токови 1О2 и 1О3) – први колоквијум (Јун 1)  
22.9.2025.

1. а) [2] Дат је низ  $a_n = \frac{n^2+1}{3n^2+n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Наћи све  $n \in \mathbb{N}$  такве да је  $a_n > a_{n+1}$ .
- б) [2] Нека је  $A = \{\frac{n^2+1}{3n^2+n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Наћи (ако постоје)  $\inf A$ ,  $\sup A$ ,  $\min A$  и  $\max A$ .
- в) [2] Нека је  $B = \{q^2 - \frac{4}{3}q \mid q \in \mathbb{Q}\}$ . Наћи (ако постоје)  $\inf B$ ,  $\sup B$ ,  $\min B$  и  $\max B$ .
- г) [3] Нека су  $A, B \subset \mathbb{R}$  ограничени. Дефинишимо скуп  $A - B = \{a - b \mid a \in A, b \in B\}$ . Тачно једно од следећа два тврђења је тачно. Које? Доказати оно које је тачно, а дати контрапример код нетачног.

$$\text{Тврђење 1 : } \sup(A - B) = \sup A - \sup B$$

$$\text{Тврђење 2 : } \sup(A - B) = \sup A - \inf B.$$

- д) [1] Израчунати  $\sup(A - B)$ , где су  $A$  и  $B$  дефинисани у примеру б) односно в).
2. а) [3] Одредити константе  $a, b \in \mathbb{R}$  такве да важи  $5^{\frac{2}{n}} = 1 + \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$  и  $3^{\frac{4}{n}} = 1 + \frac{b}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ , кад  $n \rightarrow \infty$ .
- б) [3] Израчунати  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5^{\frac{2}{n}} + 3^{\frac{4}{n}}}{2} \right)^{2n}$ .
3. Нека је функција  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  дата са:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} \cdot \arctg x + ax, & x \leq 1, \\ \frac{\sin^2(\pi x)}{x-1}, & x > 1. \end{cases}$$

- а) [4] Наћи константу  $a \in \mathbb{R}$  такву да је функција  $f$  непрекидна на  $\mathbb{R}$ .
- б) [5] За вредност  $a$  добијену у делу а) наћи све тачке у којима је  $f$  диференцијабилна.
4. Нека је  $f: [0, 3] \rightarrow [0, 3]$  непрекидна функција таква да је  $f(1) = 0$  и  $f(2) = 3$ .
- а) [3] Доказати да једначина  $f(x) = x$  има бар три решења на скупу  $[0, 3]$ .
- б) [2] Доказати да једначина  $f(f(x)) = x$  има бар три решења на скупу  $[0, 3]$ .

**Напомена:** У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.