

1. Нека је низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ рекурентно задат са $a_1 = 3$ и $a_{n+1} = \ln(e^{a_n} - a_n)$ за $n \geq 1$.

- а) [3] Доказати да важи $e^x > 1 + x$ за све $x > 0$.
- б) [3] Доказати да је сваки члан низа (a_n) позитиван.
- в) [4] Испитати монотоност низа (a_n) .
- г) [4] Испитати конвергенцију низа (a_n) и уколико конвергира, наћи $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- д) [6] Наћи $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
- ђ) [4] Наћи супремум, инфимум, максимум и минимум скупа $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ако постоје.
- е) [4] Наћи супремум, инфимум, максимум и минимум скупа $B = \{\ln(a_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ ако постоје.

2. Дата је функција $f(x) = xe^{\frac{x+1}{x-1}}$.

- а) [6] Испитати диференцијабилност функције f и наћи $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x)$.
- б) [18] Испитати ток и скицирати график функције f .
- в) [2] Одредити $f(D_f)$, где је D_f домен функције f .
- г) [3] Доказати да је $(2 + \sqrt{3})e^{\sqrt{3}} > (4 + \sqrt{3})e$.

3. а) [9] Одредити константе $a_1, b_1, c_1, d_1 \in \mathbb{R}$ такве да важи $\sqrt[3]{n^3 + n^2 + n + 1} = a_1 n + b_1 + \frac{c_1}{n} + \frac{d_1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, кад $n \rightarrow \infty$.

б) [9] Одредити константе $a_2, b_2, c_2, d_2 \in \mathbb{R}$ такве да важи $\sqrt{n^2 + n + 1} = a_2 n + b_2 + \frac{c_2}{n} + \frac{d_2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, кад $n \rightarrow \infty$.

в) [5] Одредити константе $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ такве да ред $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + n + 1} + \alpha + \frac{\beta}{n} \right)$ конвергира.

4. Нека је $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција таква да је $\int_0^1 f(x) dx \neq 0$.

а) [10] Доказати да постоји $a \in (0, 1)$ такво да је $\int_0^a f(x) dx = \frac{1}{2025} \int_a^1 f(x) dx$.

б) [10] Доказати да постоји $b \in (0, a)$ такво да је $\int_a^1 f(x) dx = 2025af(b)$.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи бодова. Време за израду задатака је 180 минута.