

Математички факултет, Универзитет у Београду
Анализа 1 (ток 1О2 и 1О3) – писмени испит (додатни рок)
5.11.2025.

1. Нека је низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ дат са $a_1 = 2$ и $a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + \sqrt{4 + a_n}}$ за свако $n \in \mathbb{N}$, а низ $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ са $b_n = 3^n a_n$.

а) [9] Доказати да је низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ монотон и конвергентан и наћи му граничну вредност.

б) [6] Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$.

в) [7] Доказати да је низ $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ монотон и конвергентан.

г) [8] Наћи супремум, инфимум, максимум и минимум скупа $A = \{a_n b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ако постоје.

2. а) [20] Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = 4x + \ln \left(\left(\frac{x}{x+4} \right)^2 \right).$$

б) [3] Нека је α реалан параметар. Колико најмање, а колико највише решења може имати једначина $f(x) = \alpha x$?

3. а) [3] Доказати да за свако $x \in [-1, 1]$ важи једнакост $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

б) [15] Израчунати интеграл $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\arccos x}{\cos x} dx$.

4. [9] Доказати да интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x + 1}$ конвергира и израчунати његову вредност.

5. [20] Одредити све $x \in \mathbb{R}$ за које конвергира ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ne)^n}{n!} (x-2)^n$.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи бодова. Време за израду задатака је 180 минута.