

1. Дат је низ $a_n = \frac{1}{n^2 - 6n - 3}$.
- а) [1] Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ако постоји.
 - б) [1] Колико овај низ има негативних чланова? Који су то чланови?
 - в) [2] Испитати монотоност овог низа.
 - г) [3] Одредити супремум, инфимум, максимум и минимум (ако постоје) скупа $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
 - д) [3] Одредити супремум, инфимум, максимум и минимум (ако постоје) скупа $B = \{|a_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$.
2. Нека је низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ дат са $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + \sqrt{1 + a_n}}$ за свако $n \in \mathbb{N}$, а низ $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ са $b_n = 2^n a_n$.
- а) [3] Доказати да је низ $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ монотон и конвергентан и наћи му граничну вредност.
 - б) [2] Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$.
 - в) [3] Доказати да је низ $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ монотон и конвергентан.
 - г) [1] Доказати да важи $a_n \sim \frac{L}{2^n}$, $n \rightarrow \infty$, где је $L = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.
3. Нека је непрекидна функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дата са:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0. \end{cases}$$

- а) [2] Одредити константу α .
- б) [1] Доказати да је f непарна функција.
- в) [2] Израчунати $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- г) [2] Испитати равномерну непрекидност функције f на скупу $\mathbb{R}$.
- д) [2] Испитати диференцијабилност функције f у тачки $x = 0$.
- ђ) [2] Доказати да постоји тачка $c \in (0, \pi)$ таква да је $f'(c) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2}$.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.