

1. а) [1] Одредити $\sup A$, где је $A = (0, 2) \cap \mathbb{Q}$.
б) [3] Нека су B и C произвољни подскупови скупа $(1, +\infty)$. Дефинишемо

$$B^C = \{x^y \mid x \in B, y \in C\}.$$

Доказати да је $\inf B^C = (\inf B)^{\inf C}$.

- в) [3] Одредити $\inf D$, где је $D = \{[-e^x] \mid x \in A\}$, где је A скуп из дела а), док је $[\cdot]$ ознака за цео део функције.
г) [5] Одредити $\sup E$, где је $E = \left\{ \operatorname{tg} \left(\frac{(2n+1)\pi}{4} \right) \left(\frac{1+3n}{n^2-1} \right)^{2+\frac{1}{n}} \mid n \geq 2 \right\}$.
2. Нека је низ $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ дефинисан са $a_n = \frac{\sqrt{1-e^{-\frac{1}{n}}} - \sqrt{1-\cos \frac{1}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{\sin \frac{1}{n}}}$.

- а) [6] Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
б) [6] Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \frac{a_2}{2} + \dots + \frac{a_n}{n}}{\ln(n+5)}$.
3. Нека је функција $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дата са

$$f(x) = \begin{cases} 3x + a, & x \leq -3, \\ \sqrt[3]{x^4} \sin \frac{3\pi}{x} + \left| \sin \frac{\pi x}{3} \right| + b, & x \in (-3, 3) \setminus \{0\}, \\ c, & x = 0, \\ \frac{(x-3)(\pi^2 \ln^2(11-x) + \cos \pi x - 1)}{(x-10)(\sqrt{2x-4} - \sqrt[3]{5x+14})}, & x \in [3, 10), \\ 2\pi^2 x + \frac{1}{x} + d, & x \geq 10. \end{cases}$$

- а) [7] Одредити константе $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ такве да f буде непрекидна на $\mathbb{R}$.
б) [4] Да ли је за константе из дела а) функција f диференцијабилна на $\mathbb{R}$?
в) [4] Испитати равномерну непрекидност функције f на $\mathbb{R}$.
4. Дата је функција $f(x) = 2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$.
- а) [3] Израчунати $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
б) [5] Одредити извод функције $f(x)$ за $x > 1$.
в) [3] Израчунати вредност израза $2 \operatorname{arctg}(2023) + \arcsin \frac{4046}{1+2023^2}$.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.