

1. Нека је низ (a_n) дат са $a_1 = 3$ и $a_{n+1} = \ln(e^{a_n} + a_n)$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

- а) [3] Доказати да су сви чланови низа (a_n) позитивни.
- б) [3] Доказати да је низ (a_n) строго растући.
- в) [4] Доказати да низ (a_n) није ограничен одозго и одредити $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- г) [3] Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{e^{a_n}}$
- д) [4] Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

2. а) [5] Израчунати граничне вредности $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - 1}{x}$ и $\lim_{x \rightarrow 1} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

б) [5] Израчунати граничне вредности $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ и $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

в) [5] Израчунати граничне вредности $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x}$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

г) [4] Доказати да једначина $\frac{e^x - 1}{x} = 4x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ има бар два решења.

3. Дата је функција $f(x) = \sqrt[5]{x^5 + 3x^4}$.

- а) [4] Одредити нуле функције f и испитати да ли је она диференцијабилна у њима.
- б) [4] Одредити константе $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$ такве да важи $f(x) = a_1x + b_1 + \frac{c_1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \rightarrow +\infty$ и $f(x) = a_2x + b_2 + \frac{c_2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \rightarrow -\infty$.
- в) [14] Испитати ток и скицирати график функције f .
- г) [2] Да ли једначина $f(x) = a$ има решења за свако $a \in \mathbb{R}$?

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 150 минута.