

1. Дати су низови $a_n = \left(\frac{2n-1}{2n+3}\right)^{-n}$ и $b_n = n^2 - n + 1$.

а) [3] Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+3}$.

б) [6] Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

в) [4] Доказати да је низ (b_n) строго растући и одредити $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

г) [6] Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot \ln a_1 + 2 \cdot \ln a_2 + \dots + n \cdot \ln a_n}{b_n}$.

2. а) [4] Израчунати $\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{2 + \cos(\pi x)}{\sqrt{x+2}-1}$.

б) [8] Израчунати $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{e^{x^2} - \cos(4x)}{\sin x \ln(1-3x)}$.

в) [5] Уколико постоје, одредити реалне бројеве a и b за које је функција $g : (-\pi, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ дата са

$$g(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - \cos(4x)}{\sin x \ln(1-3x)}, & x \in (-\pi, 0); \\ ax^2 + b, & x \in [0, 2]; \\ \frac{2 + \cos(\pi x)}{\sqrt{x+2}-1}, & x > 2. \end{cases}$$

непрекидна на свом домену.

3. Дата је функција $f(x) = |x+2|e^{\frac{1}{x}}$.

а) [2] Испитати диференцијабилност функције f у тачки $x_0 = -2$.

б) [3] Одредити константе $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$ такве да важи $f(x) = a_1x + b_1 + \frac{c_1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \rightarrow +\infty$ и $f(x) = a_2x + b_2 + \frac{c_2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \rightarrow -\infty$.

в) [15] Испитати ток и скицирати график функције f .

г) [4] Доказати да постоји тачка $c \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ таква да је $f'(c) = 6e - 5e^2$.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 150 минута.