

Серов спектрални низ

Далибор Даниловић

22. октобар 2024.

Једна алгебарска чињеница

Наводимо за почетак један општи алгебарски резултат, који често користимо при рачунању кохомологије хомогених простора. Основна ставка јесте да када имамо конвергентан (у првом квадранту) спектрални низ $E^{*,*} \Rightarrow H^*$, оно што добијамо јесте објекат E_∞ такав да је на свакој дијагонали $s + t = n$ придружена градуација филтрације објекта H^* . Тако је H^* одређен до на низ проблема екстензије, који не морају бити тривијални. Случај када је проблем екстензије тривијалан јесте када се кратак тачан низ цепа, и наредни принцип каже да се тада E_∞ поклапа са H^* као градуисани објекат. Наредна формулација је кохомолошке природе, јер укључујемо и множење (структура алгебри) што је посебно важна додатна информација.

Теорема 1. *Ако постоји спектрални низ који конвергира ка H^* као спектрални низ алгебри, при чему је $E_\infty^{*,*}$ слободна градуисано комутативна биградуисана алгебра, тада је H^* слободна градуисано комутативна алгебра изоморфна $\text{Tot}(E_\infty^{*,*})$.*

Фиксирамо сада ознаке које важе у наставку. Нека је дата (Серова) фибрација $\pi : E \rightarrow B$ са слојем F при чему је B просто повезан (последично, локални систем коефицијената индукован фибрацијом је тривијалан) и F је путно повезан. У наставку издвајамо неке важне ставке анализе Серовог спектралног низа придруженог фибрацији.

Ивични морфизам

Фибрацији придружујемо Серов спектрални низ

$$E_{s,t}^2 = H_s(B, H_t(F)) \Rightarrow H_{s+t}(E)$$

при чему су $s, t \geq 0$. За $t = 0$ идентификујемо доњи ниво са $H_s(B)$. Пошто је бистепен диференцијала d^r једнак $(-r, r - 1)$ то је крајњи резултат примене хомологије на пољу $(0, n)$ једнак

$$E_{n,0}^{r+1} = \ker(d^r : E_{n,0}^r \rightarrow E_{n-r,r-1}^r).$$

Дакле, сваки пут добијамо језгро што је подмодул хомологије $H_*(B)$ одакле имамо низ инклузија

$$E_{n,0}^\infty = E_{n,0}^{n+1} \subset E_{n,0}^n \subset \cdots \subset E_{n,0}^3 \subset E_{n,0}^2.$$

Са друге стране, дуж дијагонале $s + t = n$ на страни E^∞ имамо придружени градуацију хомологије $H_n(E)$. Сходно томе добијамо низ хомоморфизама

$$H_n(E) = F_n H_n(E) \twoheadrightarrow \text{gr}_n H_n(E) = E_{n,0}^\infty \rightarrow E_{n,0}^2 \rightarrow H_n(B)$$

где је последњи морфизам инклузија горе описана. Овако дефинисан морфизам називамо *ивични* и он је добро дефинисан за сваки конвергентан спектрални низ у првом квадранту. У случају Серовог спектралног низа, овај морфизам има директну интерпретацију.

Теорема 2. *Ивични морфизам је тачно индуковани хомоморфизам $\pi_* : H_n(E) \rightarrow H_n(B)$.*

Доказ. Комплетну слику можемо видети на нивоу природности Серовог спектралног низа. Посматрамо морфизам фибрација

$$(F, E, B) \rightarrow (*, B, B)$$

где је пресликавање између база идентитета. Прецизније, посматрамо комутативан дијаграм

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & * \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \xrightarrow{\pi} & B \\ \pi \downarrow & & \downarrow 1_B \\ B & \xrightarrow{1_B} & B \end{array}$$

при чему су колоне фибрације. У хомологији добијамо индуковани комутативан дијаграм

$$\begin{array}{ccc} H_n(E) & \longrightarrow & H_n(B) \\ \pi_* \downarrow & & \downarrow (1_B)_* \\ H_n(B) & \longrightarrow & H_n(B) \end{array}$$

при чему су вертикални морфизми ивични морфизми одговарајућих фибрација. Стога се провера своди на то да је ивични морфизам идентитета идентитета, што видимо директно из тога да имамо тачно један ниво спектралног низа јер је слој тачка. $\square$

Наведена теорема је значајна јер нам говори да спектрални низ омогућава да анализирамо колико хомоморфизам, индукован фибрацијом, у хомологији одступа да буде изоморфизам. Потпуно аналогно, анализом нивоа $s = 0$ добијамо други ивични морфизам

$$H_n(F) = E_{n,0}^2 \rightarrow E_{n,0}^3 \rightarrow \dots \rightarrow E_{0,n}^{n+2} = E_{0,n}^\infty = F_0 H_n(E) \rightarrow H_n(E)$$

при чему је последњи морфизам инклузија. Аналогно претходној, важи наредна теорема.

Теорема 3. Други ивични морфизам је тачно индуковани хомоморфизам $(i)_* : H_n(F) \rightarrow H_n(E)$.

Наведеном анализом комплетирамо и доказ да су у Ванговом и Гизиновом дугом тачном низу одговарајући хомоморфизми тачно хомоморфизми индуковани пресликавањима у фибрацији. Потпуно аналогно се изводе ивични хомоморфизми за кохомолошки Серов спектрални низ.

Трансгресија

Трансгресија је важан хомоморфизам придружен Серовом спектралном низу јер нам омогућава да упоредимо однос хомологије слоја, базног и тоталног простора фибрације наспрам индукованог дугог тачног низа хомотопских група индукованог фибрацијом. Полазимо од Серовог спектралног низа

$$E_{s,t}^2 = H_s(B, H_t(F)) \Rightarrow H_{s+t}(E)$$

при чему су $s, t \geq 0$.

Дефиниција 0.1. Трансгресија је диференцијал

$$d^n : E_{n,0}^n \rightarrow E_{0,n-1}^n.$$

Анализа гранског морфизма јасно имплицира да је њен домен подгрупа од $E_{n,0}^2 = H_n(B)$ док је кодомен количник од $E_{0,n-1}^2 = H_n(F)$. За хомолошку класу $z \in H_n(B)$ кажемо да је *трансгресивна* ако је у домену трансгресије. Еквивалентно, важи да је $d^2, \dots, d^{n-1}(z) = 0$. Да бисмо формулисали значај трансгресије, пођимо од следећег дијаграма

$$\begin{array}{ccc} H_n(E, F) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(F) \\ \pi_* \downarrow & & \\ H_n(B) & \longrightarrow & H_n(B, *) \end{array}.$$

Вертикални морфизам је индукован фибрацијом, горњи је гранични хомоморфизам из дугог тачног низа пара, док је доњи природна идентификација. Наведени дијаграм дефинише адитивну релацију $\Sigma_n = \sigma \circ (\pi_*)^{-1}$ која одређује канонски хоморфизам

$$\tau : \text{Im}(\pi_*) \rightarrow H_{n-1}(F) / \partial(\ker(\pi_*)) .$$

Геометријски, хомолошка класа $[z]$ у B која допушта подизање до E тако да се граница подиже у слој, сликамо у класу $[\partial(z)]$ што је граница циклa, у слоју.

Теорема 4. Трансгресија d^n је тачно хомоморфизам τ .

Важна напомена је следећа : ако у последњем дијаграму уместо хомолошких посматрамо хомотопске групе, важи теорема Сера по којој је вертикални морфизам π_* изоморфизам. Трансгресија из тог угла представља меру одступања тог феномена у хомологији.

Потпуно аналогно дефинишемо трансгресију за кохомолошки Серов спектрални низ. Наведена интерпретација из аксиома (ко)хомолошке теорије, односно из дугог тачног низа, омогућава да покажемо наредну помало неочекивану чињеницу, а то је да трансгресија комутира са Стинродовим квадратима.

Теорема 5. Ако је кохомолошка класа x трансгресивна, тада је и класа $Sq^i(x)$ трансгресивна.

Доказ. Кључна ставка јесте да Стинродови квадрати комутирају са дугим тачним низом у кохомологији. Нека је $\tau(x) = [y]$. Тада по дефиницији важи $\pi^*(y) = \delta(x)$ где је δ когранични хомоморфизам. Применом Стинродовог квадрата добијамо $Sq^i(\pi^*(y)) = Sq^i(\delta(x))$. Када искомутирамо следи да је

$$\pi^*(Sq^i(y)) = \delta(Sq^i(x))$$

што смо и желели да покажемо. □

Кохомологија АМ простора

Једни од важнијих простора који се посматрају у алгебарској топологији јесу Ајленберг Меклејнови простори $K(G, n)$ где је G Абелова група и $n \geq 1$. Они одређују репрезентабилност кохомологије (одређене димензијом n са коефицијентима у G) - рођење теорије опструкција. На основу тога, по Јонединој леми, кохомологија Ајленберг Меклејнових простора класификује кохомолошке операције. Стога је проучавање кохомологије $H^*(K(G, n); G)$ природан проблем. Пре свега, из теореме Хуревича и теореме о универзалним коефицијентима важи да је

$$H^n(K(G, n), G) = \text{Hom}(H_n(K(G, n)), G) = \text{Hom}(G, G)$$

па дефинише фундаменталну кохомолошку класу $x_n \in H^*(K(G, n); G)$ која одговара идентитету на G при овом изоморфизму.

Ајленберг Меклејнов простор долази са природном фибрацијом

$$\begin{array}{ccc} K(G, n) & \longrightarrow & P \\ & & \downarrow \pi \\ & & K(G, n+1) \end{array}$$

што је главна фибрација, при чему је слој тачно Ајленберг Меклејнов простор из следећег разлога. Наиме, по теореме Милнора, он је простор петљи над ћелијским комплексом, па има хомотопски тип ћелијског комплекса. Коначно, из дугог тачног низа хомотопских група, пошто је P контрактибилан, видимо да слој има исте хомотопске групе као $K(G, n)$. На основу ове фибрације, идеја је да посматрамо Серов спектрални низ и повежемо кохомологију базе са кохомологијом слоја. Кључни случај који нас занима јесте $G = \mathbb{Z}_2$ односно посматрамо кохомолошку алгебру

$$H^*(K(\mathbb{Z}_2, n); \mathbb{Z}_2)$$

коју знамо за случај $n = 1$ јер је $K(\mathbb{Z}_2, 1) = \mathbb{R}P^\infty$ па је

$$H^*(K(\mathbb{Z}_2, 1); \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[x]$$

при чему је x тачно фундаментална класа, степена један.

Приметимо сада следеће. Пошто спектрални низ конвергира ка нули, а кохомологија од $K(G, n)$ је нула у димензијама мањим од n , трансгресија

$$d^{n+1} : E_{n+1}^{0,n} = H^n(K(\mathbb{Z}_2, n); \mathbb{Z}_2) \rightarrow E_{n+1}^{n+1,0} = H^{n+1}(K(\mathbb{Z}_2, n+1); \mathbb{Z}_2)$$

мора бити изоморфизам па је $\tau(x_n) = x_{n+1}$ односно важи да трансгресија чува фундаменталне класе. Уводимо сада наредну дефиницију, која довољно добро уопштава структуру кохомолошких алгебри које се често појављују.

Дефиниција 0.2. Скуп елемената $\{x_i \mid i \in I\}$ градуисане алгебре A над прстеном R где је I тотално уређен скуп индекса чини *прост систем генератора* ако важи да скуп монома

$$\{x_{i_1} \cdots x_{i_k} \mid i_1 < \cdots < i_k\}$$

заједно са јединицом чини R -базу алгебре A при чему се у свакој градуацији налази највише коначно много елемената x_i .

Ако посматрамо спољашњу алгебру $\bigwedge(x_1, \dots, x_n)$, она има прост систем генератора $\{x_1, \dots, x_n\}$. Ако посматрамо полиномијалну алгебру $R[X]$, она има прост систем генератора $\{X^{2^k} \mid k \geq 0\}$. Аналогно добијамо прост систем генератора ако имамо више неодређених. Сада наводимо фундаменталну теорему Борела.

Теорема 6. Нека је $\pi : E \rightarrow B$ фибрација са слојем F при чему је B просто повезан, F је путно повезан и E је ацикличан простор. Ако $H^*(F; \mathbb{Z}_2)$ има прост систем генератора $\{x_\lambda\}$ при чему су сви елементи x_λ трансгресивни, тада је $H^*(B; \mathbb{Z}_2)$ полиномијална алгебра $\mathbb{Z}_2[\{\tau(x_\lambda)\}]$.

Као последица теореме Борела је наредна теорема коју су показали Сер и Картан, која у потпуности класификује кохомолошке операције типа $(\mathbb{Z}_2, n; \mathbb{Z}_2, m)$.

Теорема 7. Кохомолошка алгебра $H^*(K(\mathbb{Z}_2, n); \mathbb{Z}_2)$ је полиномијална алгебра над $\mathbb{Z}_2$ над скупом $\{Sq^I(x_n)\}$ где скуп I пролази скуп допустивих низова за које је $e(I) < n$.

Дакле, Стинродови квадрати на прилично правилан начин одређују све кохомолошке операције типа $(\mathbb{Z}_2, n; \mathbb{Z}_2, m)$. Приметимо да за $n = 2$ добијамо да је једини допустиви низ I за који је $e(I)$ тачно $(1, 0, 0, \dots)$ одакле је

$$H^*(K(\mathbb{Z}_2, 2); \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[Sq^1(y)]$$

где је $y = \tau(x)$ при чему је x фундаментална класа простора $K(\mathbb{Z}_2, 1)$.