

ЖИВОТНО ОСИГУРАЊЕ

Вежбе

Марија Цупарић

Животно осигурање

Осигурање је праведан пренос ризика од губитка са једне особе на другу уз новчану надокнаду. Оно представља механизам који омогућава појединцима и организацијама да се заштите од могућих економских губитака.

Осигурањем се на посредан начин чува имовина надокнађивањем штете или исплаћује осигурана сума када наступи осигурани случај. Оно не спречава да се догоди штетни догађај, већ обезбеђује заштиту ако до догађаја дође. Дакле, примарни задатак осигурања је да када наступи осигурани случај исплати осигуранику или некој трећој особи накнаду или уговорену суму. Због тога, осигуравачи треба да одреде цену ризика како би из наплаћених премија могли да покрију насталу штету и унапред створе средства за то.

Актуарска математика је у тесној вези са многим наукама, пре свега са финансијском математиком и вероватноћом. Са финансијском математиком јој је заједничко то што се обе заснивају на рачунању вредности новца. Принцип еквиваленције, односно једнакост садашњих вредности свих уплата и свих исплата, је важан принцип у обе наведене области математике. Разлика између финансијске и актуарске математике личног осигурања је у томе што су прорачуни финансијске математике независни од живота и старости лица, док прорачуни актуарске математике личног осигурања зависе од старости лица.

Финансијска математика

Произвољан скуп финансијских трансакција, уговора или планова се назива **ток новца**. Токове новца чине уређени парови реалних бројева где је први члан време, а други износ. Зависно од знака вредности која представља износ, разликују се уплате и исплате. Случајни ток новца је низ двостепенских случајних вектора дефинисаних на истом простору вероватноћа.

Камата је накнада коју једна особа плаћа другој особи као надокнаду за коришћење капитала и изражава временску промену вредности новца. Камаћење се најчешће врши у дискретним временским тренуцима. За основну временску јединицу се обично узима година. Камата се исплаћује на крају фиксiranог периода.

Каматна стопа је **ефективна** ако су период обрачунавања камате и основна временска јединица једнаки. Када се период обрачунавања камате не поклапа са основним временским периодом, каматна стопа се назива **номиналном**. Најчешће се година подели на m једнаких периода, а за сваки појединачни период је камата $\frac{i^{(m)}}{m}$, где је $i^{(m)}$ годишња (номинална) каматна стопа. У том случају се ефективна каматна стопа i може добити из једначине

$$1 + i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m.$$

Претходно описано камаћење се назива **дискретним**. Ако се година подели на велики број периода, односно ако је m велико, онда се одговарајуће камаћење назива **непрекидно камаћење**. Тада се ефективна каматна стопа i добија из израза

$$1 + i = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = e^\delta, \quad (1)$$

где је $\delta = \lim_{m \rightarrow +\infty} i^{(m)}$.

Претходни начини обрачунавања камате претпостављају да је она фиксирана. Претпоставимо да каматна стопа, која се непрекидно обрачунава, може да се мења током времена. Нека је $\delta(t), t \geq 0$, тренутна каматна стопа у тренутку t и нека је $F(t)$ сума која ће се накупити на рачуну у тренутку t ако се уложи једна јединица у тренутку 0. Тада важи

$$F(t) = e^{\int_0^t \delta(s) ds}.$$

До сада је рачуната вредност појединачних токова новца у будућности. Може се израчунати вредност појединачног тока новца у почетном тренутку ако се зна коју ће он вредност имати у будућности. Ако се зна да ће се кроз годину дана добити износ A , при важећој каматној стопи i , онда је његова **садашња вредност** $\frac{A}{1+i}$. Дакле, садашња вредност будуће суме је мања од те будуће суме и каже се да се будућа сума дисконтује или умањује да би се добила садашња вредност. Фактор за који се будућа сума умањује назива се дисконтни фактор или каматна стопа унапред. Дисконтни фактор за једну годину је

$$v = \frac{1}{1+i},$$

где је i годишња каматна стопа. Ако је у питању сложена камата која се обрачунава m пута годишње онда је дисконтни фактор за један период

$$v^{(m)} = \frac{1}{1 + \frac{i^{(m)}}{m}} = v^{\frac{1}{m}}.$$

Код сложеног непрекидног камаћења дисконтни фактор је

$$v = e^{-\delta},$$

где је δ дефинисано као у формули (1), а код променљивих каматних стопа

$$v = e^{-\int_0^t \delta(s) ds}.$$

Сва претходна разматрања се могу пренети и на токове новца који имају више елемената. Размотримо ток новца $(x_0, x_1, \dots, x_n)$, где x_i —ови могу бити позитивни, негативни или нула. При каматној стопи i за сваки од n периода, укупна вредност тока новца после n периода је:

$$BV = \sum_{k=0}^n x_k (1+i)^{n-k}.$$

Садашња вредност овог тока новца ће бити:

$$SV = \sum_{k=0}^n \frac{x_k}{(1+i)^k} = \sum_{k=0}^n x_k v^k.$$

Ако се сложено камаћење врши m пута годишње са годишњом каматном стопом $i^{(m)}$, онда ће будућа и садашња вредност претходног тока бити

$$BV = \sum_{k=0}^n x_k \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{n-k},$$

$$SV = \sum_{k=0}^n \frac{x_k}{\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^k} = \sum_{k=0}^n x_k \left(v^{(m)}\right)^k.$$

Ако се каматна стопа обрачунава непрекидно, онда су формуле за будућу и садашњу вредност за ток $(x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_n))$ једнаке

$$BV = \sum_{k=0}^n x_{t_k} e^{\delta(t_n - t_k)},$$

$$SV = \sum_{k=0}^n x_{t_k} e^{-\delta t_k} = \sum_{k=0}^n x_{t_k} v^{t_k}.$$

Два тока новца имају исту вредност ако су им садашње вредности једнаке и сматрамо их еквивалентним. Ток новца се може трансформисати на разне начине, али тако да му садашња вредност остане иста.

Задатак 1. Када се номинална годишња каматна стопа j конвертује у полугодишњу, садашња вредност серије уплата у износу 1 на крају сваке друге године која траје заувек је 5.89. Одредити j .

Решење. Нека је i -ефективна каматна стопа. Тада

$$\left(1 + \frac{j}{2}\right)^2 = 1 + i.$$

Из услова задатка следи

$$5.98 = \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^4} + \dots = v^2 + v^4 + \dots = v^2 \frac{1}{1-v^2}$$

Према томе

$$6.89v^2 = 5.89 \implies \frac{1}{v^2} = 1.1698 \implies 1+i = \sqrt{\frac{1}{v^2}} = 1.0816$$

Односно, заменом у полазни израз, добија се да је каматна стопа j приближно 8%. ✓

Унутрашња стопа добити је каматна стопа имплицирана током новца. Довољан услов за постојање унутрашње стопе добити је да су све вредности у току позитивне. На пример, ако је цена инвестиције P и она се плаћа кроз n будућих уплата, $r_1, \dots, r_n$. Тада је унутрашња стопа добити оно δ за које важи:

$$P = \frac{r_1}{1+\delta} + \frac{r_2}{(1+\delta)^2} + \dots + \frac{r_n}{(1+\delta)^n}$$

Обвезнице су вредносни папири са фиксним приходом. Њихова вредност потиче из обећања које представљају, а то је фиксна добит за оног ко поседује вредносни папир током одређеног периода времена. Оне представљају обавезу за оног ко их је издао да плаћа новац ономе ко их поседује у складу са правилима дефинисаним у тренутку када је обвезница издата. На дан доспећа обвезнице исплаћује се главница. Разликујемо

- бескупонске - плати се одређена цена на почетку, а након времена t подиже се номинална вредност N , $P = \frac{N}{(1+R(0,t))^t}$,
- са купонским исплатама - плати се одређена цена на почетку, а у одређеним тренуцима добијају се исплате купона (на пример једном годишње) и на дан доспећа се добија последња купонска исплата и главница,

$$P = \frac{cN}{(1+R(0,t_1))^{t_1}} + \frac{cN}{(1+R(0,t_1+t_2))^{t_1+t_2}} + \dots + \frac{cN+N}{(1+R(0,t_1+\dots+t_n))^{t_1+\dots+t_n}}.$$

Добит до доспећа обвезнице је каматна стопа имплицирана структуром плаћања. То је каматна стопа по којој је садашња вредност тока новца једнака назначеној суми на обвезници.

Доживотне ренте и ануитети

Рента или **ануитет** представља стални ток новца којег чине периодичне исплате одређене суме. Разликују се **доживотне ренте**, перпетуитети, и ренте ограниченог трајања, **ануитети**. Износи који се исплаћују су унапред одређени.

Ренте се могу поделити на ренте код којих се исплата врши на почетку године (у нултом тренутку), **ренте плативе унапред**, и ренте код којих се исплата врши на крају године у којој се исплата врши, **ренте плативе накнадно**.

Претпоставимо да се годишње плаћа 1 јединица. Садашње вредности доживотних ренти су

- $\ddot{a}_{\infty} = 1 + v + v^2 + \dots = \frac{1}{1-v}$ садашња вредност доживотне ренте плативе унапред ($t = 0$),
- $a_{\infty} = v + v^2 + \dots = \frac{v}{1-v} = \frac{1}{i}$ садашња вредност доживотне ренте плативе накнадно ($t = 1$),
- $\ddot{a}_{\infty}^{(m)} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m}v^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{m}v^{\frac{2}{m}} + \dots = \frac{1}{m(1-v^{\frac{1}{m}})}$ садашња вредност доживотне ренте код које се вредност $\frac{1}{m}$ плаћа m пута годишње сваке године, а прва уплата је у тренутку $t = 0$,
- $a_{\infty}^{(m)} = \frac{1}{m}v^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{m}v^{\frac{2}{m}} + \dots = \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m(1-v^{\frac{1}{m}})} = \frac{1}{i^{(m)}}$ садашња вредност доживотне ренте код које се вредност $\frac{1}{m}$ плаћа m пута годишње сваке године, а прва уплата је у тренутку $t = \frac{1}{m}$,
- $(I^{(q)}\ddot{a})_{\infty}^{(m)} = \frac{1}{q}\ddot{a}_{\infty}^{(m)}(1 + v^{\frac{1}{q}} + v^{\frac{2}{q}} + \dots) = \ddot{a}_{\infty}^{(m)}\ddot{a}_{\infty}^{(q)}$ садашња вредност доживотне ренте са m уплата током године које расту q пута годишње (претпостављамо да је $m = z \cdot q$, за неко z), плативе унапред,
- $(I^{(q)}a)_{\infty}^{(m)} = v^{\frac{1}{m}}(I^{(q)}\ddot{a})_{\infty}^{(m)}$ садашња вредност доживотне ренте са m уплата током године које расту q пута годишње (претпостављамо да је $m = z \cdot q$, за неко z), плативе накнадно.

Садашње вредности ануитета су

- $\ddot{a}_{\overline{n}} = 1 + v + v^2 + \dots + v^{n-1} = \frac{1-v^n}{1-v}$ садашња вредност ренте са n годишњих исплата и почетком у садашњем тренутку,
- $a_{\overline{n}} = v + v^2 + \dots + v^n = \frac{1-v^n}{i}$ садашња вредност ренте са n годишњих исплата и почетком након годину дана,
- $\ddot{a}_{\overline{n}}^{(m)} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m}v^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{m}v^{\frac{2}{m}} + \dots + \frac{1}{m}v^{n-\frac{1}{m}} = \frac{1-v^n}{m(1-v^{\frac{1}{m}})}$ садашња вредност ренте код које се вредност $\frac{1}{m}$ плаћа m пута годишње сваке године током n година, а прва уплата је у тренутку 0,
- $a_{\overline{n}}^{(m)} = \frac{1}{m}v^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{m}v^{\frac{2}{m}} + \dots + \frac{1}{m}v^{n-\frac{1}{m}} + \frac{1}{m}v^n = \frac{1-v^n}{i^{(m)}}$ садашња вредност ренте код које се вредност $\frac{1}{m}$ плаћа m пута годишње сваке године током n година, а прва уплата је у тренутку 1,

- $(I^{(q)}\ddot{a})_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(q)} - nv^n}{m(1-v^{\frac{1}{m}})}$ садашња вредност ренте са m уплата током године које расту q пута годишње (претпостављамо да је $m = z \cdot q$, за неко z) и почетком у садашњем тренутку,
- $(I^{(q)}a)_{\overline{K}|}^{(m)} = \frac{\ddot{a}_{\overline{K}|}^{(q)} - Kv^K}{i^{(m)}}$ садашња вредност ренте са m уплата током године које расту q пута годишње (претпостављамо да је $m = z \cdot q$, за неко z) и почетком у тренутку $t = 1$.

Будуће вредности анuitета (са фиксним износима) су

- $\ddot{s}_{\overline{n}|} = (1+i)^n + (1+i)^{n-1} + \dots + (1+i) = \frac{(1+i)^n - 1}{1-i} = \frac{1-v^n}{v^n(1-v)} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}}{v^n},$
- $s_{\overline{n}|} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \dots + 1 = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{1-v^n}{v^n \cdot i} = \frac{a_{\overline{n}|}}{v^n},$
- $\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m}(1 + \frac{i^{(m)}}{m})^{nm} + \frac{1}{m}(1 + \frac{i^{(m)}}{m})^{nm-1} + \dots + \frac{1}{m}(1 + \frac{i^{(m)}}{m})$
 $= \frac{(1 + \frac{i^{(m)}}{m})^{nm} - 1}{m(1 - v^{\frac{1}{m}})} = \frac{1 - v^n}{mv^n(1 - v^{\frac{1}{m}})} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)}}{v^n},$
- $s_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m}(1 + \frac{i^{(m)}}{m})^{nm-1} + \frac{1}{m}(1 + \frac{i^{(m)}}{m})^{nm-2} + \dots + \frac{1}{m}(1 + \frac{i^{(m)}}{m}) + 1$
 $= \frac{(1+i)^n - 1}{i^{(m)}} = \frac{1 - v^n}{v^n \cdot i^{(m)}} = \frac{a_{\overline{n}|}^{(m)}}{v^n}.$

Све остале могућности се формирају из самих задатака.

Задатак 2. Зајам од 1000 са номиналном каматном стопом 12% која се обрачунава месечно ће бити отплаћен са 6 месечних рата, прва уплата доспева на крају месеца. Прве три уплате су по x , а последње три по $3x$. Одредити x .

Решење. Пошто се камата обрачунава месечно, треба одредити камату на месечном нивоу. Она је $i = \frac{0.12}{12} = 0.01$, док је одговарајући дисконтни фактор $v = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{1.01}$. Према томе следи

$$\begin{aligned}
 1000 &= \frac{x}{1+i} + \frac{x}{(1+i)^2} + \frac{x}{(1+i)^3} + \frac{3x}{(1+i)^4} + \frac{3x}{(1+i)^5} + \frac{3x}{(1+i)^6} \\
 &= x(3a_{\overline{6}|} - 2a_{\overline{3}|}) \\
 &= x \left(3 \frac{1-v^6}{i} - 2 \frac{1-v^3}{i} \right) \\
 &= 11.50 \cdot x.
 \end{aligned}$$

Дакле, $x = 86.96$. ✓

Задатак 3. Банка исплаћује камате на депозите са променљивом непрекидном каматном стопом. Инвеститор уложи износ од 40000. Након пола године акумулирана вредност је 41218.18, а на крају године 42473.46. Ако се претпостави да је каматна стопа линеарна функција времена, одредите каматну стопу и акумулирану вредност на рачуну након 9 месеци.

Решење. Акумулирани износ након 6 месеци је $\bar{s}_{\frac{6}{12}} = 41218.18$, а након годину дана $\bar{s}_1 = 42473.46$. Пошто је каматна стопа линеарна функција времена то значи да је $\delta = at + b$, за неке константе a и b . Према томе

$$40000e^{0.5a+b} = 41218.18 \text{ и } 40000e^{a+b} = 42473.46.$$

Решавањем овог система добија се $a = 0.0574$ и $b = 0.0009$. Према томе, акумулирана вредност након 9 месеци је

$$\bar{s}_{\frac{9}{12}} = 40000e^{\delta} = 40000e^{0.75 \cdot 0.0574 + 0.0009} = 41797.20.$$

✓

Задатак 4. Добит од полисе осигурања у случају смрти се може исплатити на 4 начина, где сви имају исту садашњу вредност:

- 1) доживотна рента од 120 на крају сваког месеца, прва исплата месец дана након смрти осигураног лица;
- 2) исплате од 365.47 на крају сваког месеца током n година, прва месец дана након смрти осигураног лица;
- 3) исплата од 17866.32 на крају n година од смрти;
- 4) исплата x у тренутку смрти.

Израчунати x .

Решење. Из 1) и 2) следи

$$120a_{\infty|}^{(12)} = 365.47a_{\overline{n}|}^{(12)}$$

$$120\frac{1}{i^{(12)}} = 365.47\frac{1-v^n}{i^{(12)}} \implies v^n = \frac{365.47 - 120}{365.47} = 0.6716557.$$

Додатно из 3) у 4) следи

$$17866.32v^n = x.$$

Заменом претходно добијеног, добија се да је $x = 12000$.

✓

Задатак 5. Компанија мора да повуче издату обвезницу са 5 годишњих плаћања од 15000, чија прва уплата доспева 31.12.2030. Да би сакупила средства, компанија од 1.1.2021 сваке године уплаћује износ x на рачун са ефективном каматном стопом 6% на годишњем нивоу. Последња уплата је 1.1.2030. Израчунати x .

Решење. Са једне стране имамо петогодишњу вредност обвезнице, а са друге вредност ороченог новца. Као садашњу вредност узећемо 1.1.2030. Тада

$$x(1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^9) = 15000 \left(\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{1}{(1+i)^5} \right)$$

$$x \sum_{k=0}^9 (1+i)^k = 15000 \sum_{k=1}^5 \frac{1}{(1+i)^k}$$

$$xs_{\overline{10}|} = 15000a_{\overline{5}|}$$

$$x \frac{(1+i)^{10} - 1}{i} = 15000 \frac{1-v^5}{i}.$$

Дакле,

$$x = 15000 \frac{1-v^5}{(1+i)^{10} - 1} = 15000 \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^5}}{(1+i)^{10} - 1} = 4793.752.$$

✓

Задатак 6. Милош је одлучио да штеди тако што ће на почетку сваког месеца уплаћивати 200 евра на свој рачун. Од банке је добио (годишњу) каматну стопу од 6% која се обрачунава месечно. Након што је 4 године и 11 месеци уплаћивао новац на рачун, Милош је изгубио посао и није могао да уплаћује новац, али је скупуљену количину новца оставио на штедњи у банци. Након 4 месеца поново је нашао посао и наставио са уплатама по истим условима као и раније. Одредити суму коју је Милош скупио након 9 година од поновног почетка штедње.

Решење. Милош је штедео 4 године и 11 месеци, односно 59 месеци, са месечном каматном стопом $i = \frac{0.06}{12} = 0.005$. Накупљени новац након 59 месеци је

$$200s_{\overline{59}|} = 200 \left((1+i)^{58} + (1+i)^{57} + \dots + 1 \right) = 200 \frac{1 - (1+i)^{59}}{1 - 1 - i} = 13686.$$

Затим је тај износ био на штедњи наредна 4 месеца и након тога је још 9 година, односно 108 месеци. Дакле, тај износ после 112 месеци штедње је $200s_{\overline{59}|}(1+i)^{112} = 23926.29$. Међутим, тих 9 година је сваког месеца уплаћивано и 200 евра. Тај део накупљеног износа је

$$200s_{\overline{108}|} = 200 \frac{1 - (1+i)^{108}}{-i} = 28547.98.$$

Укупни износ на рачуну после 9 година од поновног почетка штедње је 52474.27. ✓

Задатак 7. Зајам од 4000 се отплаћује 30-то годишњим растућим анuitетом плативим накнадно. Почетна уплата је k , свака следећа је за k већа од претходне. Годишња ефективна каматна стопа је 4%. Одредити неизмирену главницу након 9 година.

Решење. Приметимо да је договорени ток отплате

$$4000 = \frac{k}{1+i} + \frac{2k}{(1+i)^2} + \dots + \frac{30k}{(1+i)^{30}} = k(Ia)_{\overline{30}|}.$$

Приметимо да

$$(Ia)_{\overline{30}|} = v + 2v^2 + \dots + 30v^{30} = v(1 + 2v + \dots + 30v^{29}).$$

Ако претходни израз помножимо са $(1+i)$ и одузмемо $(Ia)_{\overline{30}|}$ са обе стране добија се

$$\begin{aligned} i(Ia)_{\overline{30}|} &= 1 + 2v + 3v^2 + \dots + 30v^{29} - (v + 2v^2 + \dots + 30v^{30}) \\ &= 1 + v + v^2 + \dots + v^{29} - 30v^{30} \\ &= \frac{1 - v^{30}}{1 - v} - 30v^{30} \\ &= \ddot{a}_{\overline{30}|} - 30v^{30}, \end{aligned}$$

где је $v = \frac{1}{1+i} = 0.96$ и $\ddot{a}_{\overline{30}|} = \frac{1-v^{30}}{1-v} = \frac{1-0.96^{30}}{0.04} = 18.46$. Заменом у први израз добија се

$$4000 = k \frac{18.46 - 30 \cdot 0.96^{30}}{0.04}.$$

Односно, $k = 16.60$. Након 9 година остало је да се плати

$$\begin{aligned} \frac{10k}{1+i} + \frac{11k}{(1+i)^2} + \dots + \frac{30k}{(1+i)^{21}} &= 9ka_{\overline{21}|} + k(Ia)_{\overline{21}|} \\ &= 9 \cdot 16.6 \frac{1 - 0.96^{21}}{0.04} + 16.6 \frac{\ddot{a}_{\overline{21}|} - 21v^{21}}{0.04} = 4665.056. \end{aligned}$$

✓

Задатак 8. Марко плаћа 98.51 за обвезницу која ће достићи вредност 100 за једну годину. Купони се исплаћују 6-то месечно са купонском стопом 4%. Одредити добит до доспећа која се обрачунава шестомесечно.

Решење. Из текста задатка следи да је $N = 100$, $c = 0.04$. Такође, $v^{(2)} = \frac{1}{1+\frac{i^{(2)}}{2}}$ и $1+i = (1+\frac{i^{(2)}}{2})^2$. Према току отплате следи да је

$$98.51 = \frac{\frac{C}{2}N}{1+\frac{i^{(2)}}{2}} + \frac{(\frac{C}{2}+1)N}{(1+\frac{i^{(2)}}{2})^2} = 2v^{(2)} + 102(v^{(2)})^2.$$

Решавањем квадратне једначине добија се $v^{(2)} = 0.972988$. Према томе,

$$i^{(2)} = 2\left(\frac{1}{v^{(2)}} - 1\right) = 0.05552.$$

✓

Задатак 9. Доживотна рента се састоји од годишњих растућих уплата $(1+k)$, $(1+k)^2$, $(1+k)^3, \dots$, почевши од краја прве године са ефективном годишњом каматном стопом од 4%, садашња вредност (једну годину пре прве уплате) је 51. Одредити k .

Решење. Приметимо да

$$\begin{aligned} 51 &= \frac{1+k}{1+i} + \left(\frac{1+k}{1+i}\right)^2 + \dots = \frac{1+k}{1+i} \cdot \frac{1}{1-\frac{1+k}{1+i}} = \frac{1+k}{1+i} \cdot \frac{1+i}{1+i-1-k} = \frac{1+k}{i-k} \\ \implies 51i - 51k &= 1+k \\ \implies 52k &= 51i - 1 \implies k = 0.02 \end{aligned}$$

✓

Задатак 10. Депозит од 100000 је стављен у новчани фонд. Фонд плаћа номиналну камату од 12% са кварталним камаћењем. На крају сваких 6 месеци подиже се новац из фонда. Прво подизање је x , друго $2x$, треће $3x$, итд. Последњим, 6-тим подизањем се у потпуности празни фонд. Одредити x .

Решење. Како је $i^{(4)} = 0.12$ то је месечна камата 0.03. Ако је F_k , $k = 0, \dots, 6$, преостали износ у фонду у тренутку k , онда систем

$$\begin{aligned} F_1 &= F_0 \cdot 1.03^2 - x, F_0 = 100000 \\ F_2 &= F_1 \cdot 1.03^2 - 2x \\ &\vdots \\ F_6 &= F_5 \cdot 1.03^2 - 6x \approx 0 \end{aligned}$$

треба решити по x . Решење је $x = 6128$. Потпуно решење је у R -у.

✓

Задатак 11. Компанија позајмљује 10000, са током отплате у којем се камата од 350 плаћа полугодишње, а главница се плаћа на крају 5-те године када се цео зајам отплати. Да би сакупила главницу зајма, компанија прави једнаке полугодишње депозите, први доспева за 6 месеци, у фонд са каматном стопом 6% на годишњем нивоу која се обрачунава полугодишње. Одредити каматну стопу на годишњем нивоу за читаву трансакцију.

Решење. Сваког месеца компанија мора да уплати камату у износу 350, али и износ депозита које је X . Прво треба одредити X , тако да акумулирани износ после 10 месеци буде једнак главници зајма. Како је месечна камата $i = 0.03$, то је

$$X s_{\overline{10}|} = 10000, \text{ где је } s_{\overline{10}|} = \frac{(1+i)^{10} - 1}{i}.$$

Решавањем претходног израза добија се

$$X = \frac{10000}{\frac{1.03^{10}-1}{0.03}} = 872.3051.$$

Сада се вратимо на полазни ток. Приметимо да

$$1000 = (350 + X) \left(\frac{1}{1 + \frac{j^{(2)}}{2}} + \frac{1}{(1 + \frac{j^{(2)}}{2})^2} + \cdots + \frac{1}{(1 + \frac{j^{(2)}}{2})^{10}} \right),$$

одакле следи да је $j^{(2)} = 0.076$, а ефективна годишња каматна стопа је $(1 + \frac{j^{(2)}}{2})^2 - 1 = 0.078$. Потпуно решење је у R -у. ✓

Задатак 12. Банка на штедни рачун на почетку године даје 8% на првих 100000 и 9% на износ преко 100000. Почетни депозит је 300000. Једну годину касније почиње подизање износа x годишње и подиже се док износ се не исцрпи 10-тим подизањем. Одредити x .

Решење. Нека је P_k , $k = 0, \dots, 10$, износ на рачуну у тренутку k . Тада се x добија као решење система

$$P_0 = 300000$$

$$P_1 = P_0 + 0.08 \min\{100000, P_0\} + 0.09 \max\{0, P_0 - 100000\} - x \quad \text{након 1. подизања}$$

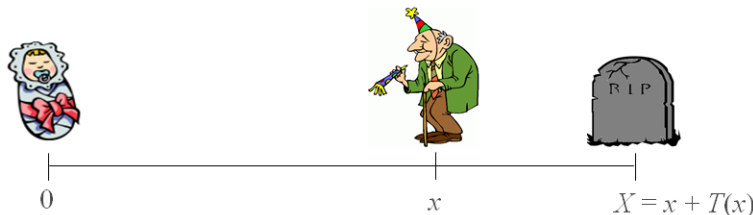
$$\vdots$$

$$P_{10} \approx 0 \quad \text{након 10. подизања.}$$

Потпуно решење је у R -у. ✓

Модел преостале дужине живота

Ако бисмо знали када ће нека особа да премине, премија осигурања би могла да се одреди на основу резултата финансијске математике. Међутим, пошто је то непознато, премија се одређује уз помоћ теорије вероватноће. Преосталу дужину живота можемо посматрати као случајну величину ако посматрамо велики број људи исте старости. У том случају може се одредити вероватноћа смртности пре неког тренутка или вероватноћа преживљавања неког тренутка.



Претпоставимо да особа која жели да склопи уговор о личном осигурању има x година у тренутку потписивања уговора. Тада са $T(x)$ означавамо **преостали**

животни век те особе. Ова случајна величина је непрекидна и узима позитивне вредности. Можемо одредити следеће вероватноће

${}_tq_x = P\{T \leq t\} = G(t), t \geq 0$, вероватноћа да ће особа старости x година умрети за највише t година, где је t фиксирано,

${}_tp_x = P\{T > t\} = 1 - G(t), t \geq 0$, вероватноћа да ће особа старости x живети бар још t година (вероватноћа преживљавања),

${}_{s|t}q_x = P\{s < T < s + t\} = {}_{s+t}q_x - {}_sq_x$ вероватноћа да ће особа старости x година преживети s година и умрети пре него што прође још t година.

Још неке корисне формуле дате су у наставку

$$\begin{aligned} {}_tp_{x+s} &= P\{T > s + t | T > s\} = \frac{1 - G(s + t)}{1 - G(s)} = \frac{{}_{s+t}p_x}{{}_sp_x} \\ {}_tq_{x+s} &= P\{T \leq s + t | T > s\} = \frac{G(s + t) - G(s)}{1 - G(s)} = \frac{{}_{s+t}q_x - {}_sq_x}{{}_sp_x} \\ {}_{s+t}p_x &= 1 - G(s + t) = [1 - G(s)] \frac{1 - G(s + t)}{1 - G(s)} = {}_sp_x \cdot {}_tp_{x+s} \\ {}_{s|t}q_x &= G(s + t) - G(s) = [1 - G(s)] \frac{G(s + t) - G(s)}{1 - G(s)} = {}_sp_x \cdot {}_tq_{x+s} \end{aligned}$$

Може се одредити и **очекивано преостало време живота особе старости x година** као

$$\dot{e}_x = \int_0^{+\infty} t \cdot g(t) dt = \int_0^{+\infty} (1 - G(t)) dt = \int_0^{+\infty} {}_tp_x dt,$$

као и **интензитет смртности у тренутку $x + t$ особе старости x година**

$$\mu_{x+t} = \frac{g(t)}{\bar{G}(t)} = -\frac{d}{dt} \ln(\bar{G}(t)) = -\frac{d}{dt} \ln({}_tp_x).$$

Ове величине можемо повезати са вероватноћом преживљавања на следећи начин:

$$\begin{aligned} {}_tp_x &= \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s} ds\right), \\ \dot{e}_x &= \int_0^{+\infty} t \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} dt. \end{aligned}$$

Задатак 13. Ако је интензитет смртности константан током годину дана и вероватноћа смртности током те године једнака 0.16, одредити тренутак t за коју је вероватноћа преживљавања једнака 0.95.

Решење. Како је интензитет смртности константан, то важи

$$\mu_{x+s} = \mu = \text{const.}$$

Вероватноћа преживљавања је

$${}_tp_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds} = e^{-\mu t}.$$

Како је $q_x = 0.16$, то је $p_x = 1 - q_x = 0.84$. Из претходног следи да је $e^{-\mu} = 0.84$, односно $\mu = -\ln 0.84$. Пошто вероватноћа преживљавања треба да буде 0.95, важи да је $0.95 = e^{\ln 0.84 \cdot t}$. Дакле, $t = \frac{\ln 0.95}{\ln 0.84} = 0.294$. ✓

Задатак 14. Посматрајмо два идентична живота која се разликују само по томе што је један пушач а други не. Нека је

- μ_x интензитет смртности непушача, $0 \leq 0 < \omega$,
- $c\mu_x$ интензитет смртности пушача, $0 \leq 0 < \omega$, c константа, $c > 1$.

Израчунати вероватноћу да преостало време живота пушача превазиђе непушача.

Решење. Нека је T_1 преостало време живота непушача, а T_2 преостало време живота пушача. Тада је

$$P\{T_2 > T_1\} = \int_0^\infty P\{T_2 > t\}g(t)dt,$$

где је $g(t)$ густина расподеле од T_1 и

$$\begin{aligned} P\{T_1 > t\} &= {}_t p_x, \\ P\{T_2 > t\} &= e^{-\int_0^t c\mu_{x+s}ds} = e^{-c \int_0^t \mu_{x+s}ds} = ({}_t p_x)^c. \end{aligned}$$

Према томе

$$P\{T_2 > T_1\} = \int_0^\infty ({}_t p_x)^c g(t)dt = \int_0^\infty ({}_t p_x)^c (-{}_t p_x)dt = -\frac{({}_t p_x)^{c+1}}{c+1} \Big|_0^\infty = \frac{1}{c+1}.$$

✓

Уместо преосталог животног века особе T која има x година може се говорити о животном веку W у некој популацији. Тада $T = W - x$. Када говоримо о вероватноћи преживљавања, важи

$${}_t p_x = P\{T > t\} = P\{W - x > t | W > x\} = \frac{P\{W > t+x\}}{P\{W > x\}} = \frac{s(x+t)}{s(x)},$$

где је s **функција преживљавања** дефинисана са $s(t) = P\{W > t\}$.

Одређивање вероватноће смртности

Први начина за одређивање вероватноће смртности јесте да се случајној величини $T(x)$ додели нека конкретна расподела. Најчешће коришћене расподеле су

Де Муавров закон: $\mu_{x+t} = \frac{1}{\omega-x-t}, 0 < t < \omega - x$, где је ω максималан број година за људска бића и $T \in \mathcal{U}(0, \omega - x)$,

Гомперцов закон: $\mu_{x+t} = Bc^{x+t}, t > 0$,

Мејхемов закон: $\mu_{x+t} = A + Bc^{x+t}, t > 0$,

Вејбулов закон: $\mu_{x+t} = k(x+t)^n, k > 0$ и $n > 0$.

Задатак 15. Ако је познато да преостали животни век особе старости x прати Де Муавров закон са максималним бројем година 100, одредити интензитет смртности μ_{45} .

Решење. Како преостали животни век прати Де Муавров закон са максималним бројем година 100, то $T \in \mathcal{U}(0, 100 - x)$. Према томе

$${}_t p_x = 1 - \frac{t}{100 - x}, \quad 0 \leq x < 100, \quad 0 \leq t \leq 100 - x.$$

Одатле следи да

$$\mu_{x+t} = -\frac{d}{dt} \ln({}_t p_x) = -\frac{d}{dt} \ln \frac{100 - x - t}{100 - x} = \frac{\frac{1}{100-x}}{\frac{100-x-t}{100-x}} = \frac{1}{100 - x - t}.$$

Пошто је $x + t = 45$, следи да је $\mu_{45} = \frac{1}{55}$. ✓

Задатак 16. Ако је вероватноћа преживљавања дата са ${}_t p_x = \left(\frac{1+x}{1+x+t}\right)^3$ за $t \geq 0$, одредити очекивану преосталу дужину живота особе која има $x = 41$ година.

Решење. Јасно је да

$$\bar{e}_x = \int_0^\infty {}_t p_x dt = \int_0^\infty \left(\frac{42}{42+t}\right)^3 dt = 42^3 \frac{1}{2 \cdot 42^2} = 21. \quad \checkmark$$

Задатак 17. Нека је вероватноћа преживљавања дата са ${}_t p_x = \left(\frac{100-x-t}{100-x}\right)^2$, за $0 \leq t \leq 100 - x$. Одредити дисперзију преостале дужине живота $DT(x)$.

Решење. Како је $DT(x) = E(T(x))^2 - (ET(x))^2$, треба одредити наведена очекивања. Приметимо да је

$$ET(x) = \int_0^{100-x} {}_t p_x dt = \int_0^{100-x} \left(\frac{100-x-t}{100-x}\right)^2 dt = \frac{100-x}{3}.$$

Са друге стране,

$$ET^2(x) = \int_0^{100-x} 2t {}_t p_x dt = 2 \int_0^{100-x} t \frac{(100-x-t)^2}{(100-x)^2} dt = \frac{(100-x)^2}{6}.$$

Према томе,

$$DT = \frac{(100-x)^2}{6} - \frac{(100-x)^2}{9} = \frac{(100-x)^2}{18}.$$

Како је

$$X^2 = \int_0^\infty 2x I\{X > x\} dx,$$

то следи да се EX^2 може одредити из формуле

$$EX^2 = 2 \int_0^\infty x P\{X > x\} dx.$$

✓

Задатак 18. Посматрају се две особе старости x и y година, редом. Преостала дужина живота прве особе има униформну расподелу на интервалу $(0, \omega - x)$, док је животни век друге особе описан константном смртношћу $\mu(t) = \mu$ за $t \geq y$. Одредити вероватноћу да ће особа (x) преминути током следећих n година и пре особе (y) . Претпоставити да су преостале дужине живота ове две особе независне.

Решење. Тражена вероватноћа је

$$\begin{aligned} P\{T(x) \leq T(y), T(x) \leq n\} &= \int_0^n P\{T(y) \geq t\} f_x(t) dt \\ &= \int_0^n {}_t p_y \frac{1}{\omega - x} dt \\ &= \frac{1}{\omega - x} \int_0^n e^{-t\mu} dt \\ &= \frac{1 - e^{-n\mu}}{\mu(\omega - x)}. \end{aligned}$$

✓

Задатак 19. У некој популацији познато је да је функција преживљавања за мушкарце дата са $1 - \frac{x}{75}$, $0 < x < 75$, док је за жене дата са $1 - \frac{x}{\omega}$, $0 < x < \omega$. Такође је познато да код женске особе старости 60 година интензитет смртности чини 60% интензитета смртности мушкарца од 60 година. Ако су преостале дужине живота мушкарца од 65 година и жене од 60 година независне, одредити очекивано време до смрти обе особе.

Решење. Из текста задатка познато је да је функција преживљавања за мушкарце

$$s_m(x) = 1 - \frac{x}{75}, \quad 0 < x < 75,$$

а за жене

$$s_f(x) = 1 - \frac{x}{\omega}, \quad 0 < x < \omega.$$

Такође, знамо да је $\mu_{60}^f = 0.60\mu_{60}^m$. Треба изразити интензитет смртности преко функције преживљавања. Како је

$$\mu_{x+t} = -\frac{d}{dt} \ln({}_t p_x) = -\frac{d}{dt} \ln \frac{s(x+t)}{s(x)} = -\frac{d}{dt} \ln s(x+t),$$

слиди да је

$$\begin{aligned} \mu_{x+t}^m &= -\frac{d}{dt} \ln \left(1 - \frac{x+t}{75} \right) = \frac{1}{75 - x - t}, \\ \mu_{x+t}^f &= -\frac{d}{dt} \ln \left(1 - \frac{x+t}{\omega} \right) = \frac{1}{\omega - x - t}. \end{aligned}$$

Из претходног слиди да је

$$\frac{1}{\omega - 60} = 0.6 \frac{1}{75 - 60},$$

односно $\omega = 85$.

Сада је јасно да

$${}_t p_{65}^m = 1 - \frac{t}{10}, \quad 0 < t < 10,$$

$${}_t p_{60}^f = 1 - \frac{t}{25}, \quad 0 < t < 25.$$

Да бисмо одредили очекивано време до смрти обе особе, прво треба одредити расподелу одговарајуће случајне величине. Време до смрти обе особе је време смрти оне особе која је преминула друга по реду, односно $\max\{T_f(60), T_m(65)\}$. Према томе

$$\begin{aligned} P\{\max\{T_f(60), T_m(65)\} < t\} &= P\{T_f(60) < t, T_m(65) < t\} \\ &= P\{T_f(60) < t\} P\{T_m(65) < t\} \\ &= (1 - {}_t p_{60}^f)(1 - {}_t p_{65}^m) \\ &= \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{t^2}{250}, & 0 < t < 10, \\ \frac{t}{25}, & 10 < t < 25, \\ 1, & t \geq 25. \end{cases} \end{aligned}$$

Тада

$$\begin{aligned} E(\max\{T_f(60), T_m(65)\}) &= \int_0^{\infty} P\{\max\{T_f(60), T_m(65)\} \geq t\} dt \\ &= \int_0^{10} \left(1 - \frac{t^2}{250}\right) dt + \int_{10}^{25} \left(1 - \frac{t}{25}\right) dt = \frac{79}{6}. \end{aligned}$$

✓

Други начин за одређивање вероватноће смртности је повезан са величином која се назива **целобројни преостали животни век** особе старости x , односно $K(x) = [T(x)]$. Тада вероватноћа да осигураник старости x премине у току $k + 1$ -ве године је одређена са

$$P\{K = k\} = P\{k \leq T < k + 1\} = {}_k p_x \cdot q_{x+k}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Очекивани целобројни преостали животни век је одређен са

$$e_x = \sum_{k=1}^{+\infty} k P\{K = k\} = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k} = \sum_{k=1}^{+\infty} P\{K \geq k\} = \sum_{k=1}^{+\infty} {}_k p_x.$$

Према томе, преостали животни век T се може написати као

$$T(x) = K(x) + S(x),$$

где је K целобројни преостали животни век и S , $S \in [0, 1)$ фракција (преостали део) године током које је особа старости x година жива у години смрти. У пракси се најчешће претпоставља да је $ES = \frac{1}{2}$, па важи

$$\dot{e}_x \approx e_x + \frac{1}{2}.$$

Одговарајуће вероватноће смртности за целобројан животни век могу се одређивати уз помоћ **таблица смртности**. Оне се формирају емпиријски и служе за процену вероватноће да особа одређених година умре пре њеног или његовог следећег рођендана. Разликујемо периодичне (прате целу популацију) и кохорт (прате групу људи рођених исте године) таблице. Таблице смртности најчешће садрже следеће податке

- x старост људи,
- l_x број људи који су напунили x година,
- $d_x = l_x - l_{x+1}$ број људи који су умрли у току $x + 1$ -ве године.

На основу тих података, одговарајуће вероватноће се одређују из следећих формула

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}, \quad q_x = \frac{d_x}{l_x}, \quad {}_kq_x = \frac{l_x - l_{x+k}}{l_x}, \quad {}_kp_x = \frac{l_{x+k}}{l_x}.$$

Пример дела таблице смртности дат је у табели 1.

x	q_x	l_x	d_x
20	0.001268	97813	124
21	0.001321	97689	129
22	0.001374	97560	134
23	0.001437	97426	140
24	0.001501	97286	146
25	0.001565	97140	151
26	0.001639	96988	159
27	0.001714	96829	166
28	0.001800	96663	174
29	0.001886	96489	182

Табела 1: Део таблице смртности

Задатак 19. Дата је следећа табела вредности очекиваног целобројног преосталог животног века e_x

године x	e_x
75	10.5
76	10.0
77	9.5

Одредити вероватноћу да ће особа која има 75 година преживети до 77 године.

Решење. Тражи се да се одреди ${}_2p_{75}$. Јасно је да

$$\begin{aligned} e_x &= EK(x) = E(K(x)|T(x) \geq 1)P\{T(x) \geq 1\} + E(K(x)|T(x) < 1)P\{T(x) < 1\} \\ &= p_x E(K(x)|T(x) \geq 1) + q_x E(K(x)|T(x) < 1) = p_x(1 + e_{x+1}). \end{aligned}$$

Односно $p_x = \frac{e_x}{1 + e_{x+1}}$. Према томе, можемо закључити да

$${}_2p_{75} = p_{75} \cdot p_{76} = \frac{e_{75}}{1 + e_{76}} \cdot \frac{e_{76}}{1 + e_{77}} = \frac{10.5}{11} \cdot \frac{10}{10.5} = \frac{10}{11}.$$

Дакле, тражена вероватноћа је $\frac{10}{11}$. ✓

Задатак 20. На основу таблице смртности одредити

1. број људи који су умрли у току $x + 1$ -ве године d_x и вероватноћу смртности особа старости x , q_x , $x = \overline{0, 99}$;
2. очекивани целобројни преостали животни век e_x , $x = \overline{0, 99}$, ако је $e_{99} = p_{99} = 0$.

Решење. а) Јасно је да је $q_x = \frac{d_x}{l_x}$, где је $d_x = l_x - l_{x+1}$. Остатак решења је у $R-y$.

- б) Из задатка 19. следи да је $e_x = p_x(1 + e_{x+1}) = \frac{l_{x+1}}{l_x}(1 + e_{x+1})$ чиме је добијена рекурентна формула. Остатак решења је у R -у.

✓

Поред класичних таблица смртности могу се користити и **таблице смртности са одабиром**. Наиме, може се претпоставити да особа која сада потписује уговор о осигурању је здравија од особе исте старости која је уговор потписала пре неколико година. Тада $q_{[x]} < q_{[x-1]+1} < q_{[x-2]+2} < \dots$, где је $q_{[x]+t}$ вероватноћа да ће особа старости $x + t$ година умрети у следћих годину дана ако је осигурање купила када је имала x година. Након одређеног броја година, разлика престаје да буде значајна па важи да је $q_{[x]+t} = q_{x+t}$, $t \leq r$, где је r период одабира. Табела 2 је пример једне таблице смртности са одабиром.

$[x]$	$q_{[x]}$	$q_{[x]+1}$	$q_{[x]+2}$	q_{x+3}	$x + 3$
30	$103 \cdot 10^{-5}$	$170 \cdot 10^{-5}$	$209 \cdot 10^{-5}$	$229 \cdot 10^{-5}$	33
31	$124 \cdot 10^{-5}$	$186 \cdot 10^{-5}$	$222 \cdot 10^{-5}$	$241 \cdot 10^{-5}$	34
32	$139 \cdot 10^{-5}$	$191 \cdot 10^{-5}$	$231 \cdot 10^{-5}$	$254 \cdot 10^{-5}$	35
33	$154 \cdot 10^{-5}$	$207 \cdot 10^{-5}$	$244 \cdot 10^{-5}$	$261 \cdot 10^{-5}$	36
34	$175 \cdot 10^{-5}$	$212 \cdot 10^{-5}$	$251 \cdot 10^{-5}$	$283 \cdot 10^{-5}$	37

Табела 2: Таблице са одабиром код којих је период одабира $r = 3$

Задатак 21. Дата је таблица смртности са одабиром код које је период одабира две године:

$[x]$	$100q_{[x]}$	$100q_{[x]+1}$	$100q_{x+2}$
30	0.438	0.574	0.699
31	0.453	0.599	0.734
32	0.472	0.634	0.790
33	0.510	0.680	0.856
34	0.551	0.737	0.937

Одредити вероватноћу (у процентима) да ће особа старости 31 годину, која је уплатила осигурање са 30 година, живети још једну годину, али ће умрети током друге године.

Решење. Треба одредити ${}_1q_{[30]+1}$. Познато је да

$${}_1q_{[30]+1} = p_{[30]+1} \cdot q_{[30]+2}.$$

Из таблица следи

$$\begin{aligned} 100q_{[30]+2} &= 100q_{30+2} = 0.699, \\ p_{[30]+1} &= 1 - q_{[30]+1} = 1 - 0.00574 = 0.99426. \end{aligned}$$

Према томе, тражена вероватноћа (у процентима) је $100{}_1q_{[30]+1} = 0.695$.

✓

Ако желимо из таблица смртности да добијемо вероватноће везане за преостали животни век, односно случајну величину T , онда мора да се врши интерполација како би се добиле вредности у разломљеном делу године. Тада се морају у разматрање укључити и додатне претпоставке, а најчешће су:

линеарност ${}_uq_x$: односно ${}_uq_x = uq_x$, што даје $\mu_{x+u} = \frac{q_x}{1-uq_x}$;

константност интензитета смртности: односно $\mu_{x+u} = \mu_{x+\frac{1}{2}} = \text{const}$, што даје

$${}_up_x = p_x^u;$$

линеарност ${}_{1-u}q_x$: односно ${}_{1-u}q_x = (1-u)q_x$, што даје $\mu_{x+u} = \frac{q_x}{1-(1-u)q_x}$.

Задатак 22. Нека је вероватноћа смртности током једне године особе старости x једнака 0.10.

а) Нацртати график интензитета смртности током те године μ_{x+v} за v од 0 до 1 са размаком 0.05 ако је

- 1) ${}_vq_x$ линеарно;
- 2) $\mu_{x+v} = \text{const}$;
- 3) ${}_{1-v}q_{x+v}$ линеарно.

б) Нацртати график вероватноће смртности у току те године при истим условима као у делу а).

Решење. R

✓

Типови животног осигурања

Класификација животног осигурања може се вршити на различите начине. Ми се бавимо осигурањима класификованим према врсти ризика обухваћеног осигурањем. У том случају разликујемо

осигурање за случај смрти: осигурани случај представља смрт осигураног лица. Разликујемо

- доживотно осигурање - смрт представља осигурани случај у ма које време се догодила;
- привремено осигурање - смрт представља осигурани случај само ако се догоди у одређеном периоду;

осигурање за случај доживљења: осигурани случај наступа ако осигураник доживи одређени број година;

мешовито осигурање: осигурани случај је или смрт у оквиру одређеног периода или преживљавање тог периода;

одложено доживотно осигурање: осигурани случај је смрт али ако се деси након неког периода.

На основу вредности осигуране суме одређује се премија осигурања. Премија се одређује по принципу еквиваленције, односно губитак осигуиравача у садашњем тренутку треба да буде једнак његовој добити рачунато у садашњем тренутку. Прво ћемо се бавити **једнократном нето премијом**, односно премијом која се уплаћује једнократним износом у тренутку потписивања уговора.

Претпоставимо да је Z садашња вредност исплата осигуравача. С обзиром да је тренутак у којем се исплаћује осигурана сума случајан, ова величина је заправо случајна величина. Тада је износ једнократне нето премије једнак EZ .

У наставку, ради једноставности, претпоставићемо да је осигурана сума једнака 1, да је каматна стопа фиксна и износи i , а старост осигураног лица у тренутку потписивања уговора x .

Дискретно осигурање

Код дискретног осигурања осигурана сума се исплаћује на годишњицу потписивања уговора (на крају године смрти где се под почетком године подразумева месец у којем је потписан уговор). У наставку су дате садашње вредности осигурања и једнократне нето премије претходно поменутих типова осигурања (осигурана сума је 1, $v = \frac{1}{1+i}$).

врста осигурања	садашња вредност осигуране суме	једнократна нето премија
доживотно за случај смрти	$Z = v^{K+1}$	$A_x = \sum_{k=0}^{+\infty} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}$
привремено са трајањем n година	$Z = v^{K+1} I\{K < n\}$	$A_{x:\overline{n} }^1 = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}$
за случај доживљења са трајањем n година	$Z = v^n I\{K \geq n\}$	$A_{x:\overline{n} }^{\overline{1}} = v^n {}_n p_x$
мешовито са трајањем n година	$Z = \begin{cases} v^{K+1}, & K < n \\ v^n, & K \geq n \end{cases}$	$A_{x:\overline{n} } = A_{x:\overline{n} }^1 + A_{x:\overline{n} }^{\overline{1}}$
одложено за m година доживотно	$Z = v^{K+1} I\{K \geq m\}$	${}_m A_x = {}_m p_x v^m A_{x+m} = A_x - A_{x:\overline{m} }^1$

Задатак 23. Једнократна нето премија мешовитог осигурања са трајањем n година које је уплатила особа старости x је једнака u , једнократна нето премија привременог осигурања са трајањем n година које је уплатила особа старости x је y , а једнократна нето премија доживотног осигурања које је уплатила особа старости $x+n$ је z . Одредити једнократну нето премију доживотног осигурања које треба да уплати особа старости x .

Решење. Познато је да $A_{x:\overline{n}|} = u$, $A_{x:\overline{n}|}^1 = y$, $A_{x+n} = z$. Приметимо да је

$$A_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|}^1 + A_{x:\overline{n}|}^{\overline{1}} = A_{x:\overline{n}|}^1 + v^n {}_n p_x.$$

Односно $v^n {}_n p_x = u - y$. Према томе, тражена вредност је

$$\begin{aligned}
 A_x &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} + \sum_{k=n}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+n+k} \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} + \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+n+1} {}_{k+n} p_x q_{x+n+k} \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} + v^n {}_n p_x \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+n+k} \\
 &= A_{x:\overline{n}|}^1 + v^n {}_n p_x A_{x+n} = y + (u - y)z.
 \end{aligned}$$

✓

Задатак 24. Одредити једнократну нето премију мешовитог осигурања са осигураним сумом 1 које траје 20 година, издатог особи старости 45 година на основу таблица смртности и $i = 5\%$.

Решење. Приметимо да

$$\begin{aligned}
 A_{45:\overline{20}|} &= A_{45:\overline{20}|}^1 + A_{20:\overline{45}|} = \sum_{k=0}^{19} v^{k+1} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k} + v^{20} \cdot {}_{20} p_{45} \\
 &= v \cdot q_{45} + v^2 \cdot p_{45} \cdot q_{46} + \dots + v^{20} \cdot {}_{19} p_{45} \cdot q_{64} + v^{20} \cdot {}_{20} p_{45} \\
 &= v \cdot \frac{d_{45}}{l_{45}} + v^2 \cdot \frac{l_{46} \cdot d_{46}}{l_{45} \cdot l_{46}} + \dots + v^{20} \cdot \frac{l_{64} \cdot d_{64}}{l_{45} \cdot l_{64}} + v^{20} \cdot \frac{l_{65}}{l_{45}} \\
 &= v \cdot \frac{d_{45}}{l_{45}} + v^2 \cdot \frac{d_{46}}{l_{45}} + \dots + v^{20} \cdot \frac{d_{64}}{l_{45}} + v^{20} \cdot \frac{l_{65}}{l_{45}}.
 \end{aligned}$$

Користећи R добија се да је тражена једнократна нето премија 0.4058669. ✓

Задатак 25. Двогодишње привремено осигурање издато је особи старости x са осигураном сумом 1 која се исплаћује на крају године смрти, ако наступи смрт у том периоду. Ако је вероватноћа смрти ове особе пре навршене $(x+1)$ -е године једнака 0.5, а дисперзија садашње вредности осигуране суме 0.1771, одредити вероватноћу да ће особа умрети након $(x+1)$ -ог рођендана а пре навршене $(x+2)$ -е године. Претпоставити да се не врши камаћење, односно да је каматна стопа једнака 0.

Решење. Како је каматна стопа 0, то је дисконтни фактор $v = 1$. Такође, познато је да је $q_x = 0.5$. Пошто је у питању привремено осигурање са трајањем две године, садашњу вредност осигуране суме можемо написати као

$$Z = I\{K < 2\},$$

односно $Z \in \text{Ber}(p)$ где је

$$p = P\{K < 2\} = P\{K = 0\} + P\{K = 1\} = q_x + p_x \cdot q_{x+1} = 0.5 + 0.5 \cdot q_{x+1}.$$

С обзиром да је

$$1 - p = 0.5 - 0.5 \cdot q_{x+1},$$

то следи

$$0.1771 = DZ = p(1 - p) = 0.25 - 0.25q_{x+1}^2.$$

Тражена вероватноћа је $q_{x+1} = \sqrt{(0.25 - 0.1771) \cdot 4} = 0.54$. ✓

Задатак 26. За особу старости $x = 35$ одредити дисперзију садашње вредности случајне величине доживотног осигурања од 1000. За вредности каматне стопе i од 0 до 25% са размаком 0.5% и ако смртност прати таблице, нацртати график.

Решење. Треба одредити $DZ = {}^2A_x - (A_x)^2$, где је

$$\begin{aligned}
 A_x &= EZ = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k}, \\
 {}^2A_x &= EZ^2 = \sum_{k=0}^{\infty} v^{2(k+1)} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k}.
 \end{aligned}$$

Остатак решења се налази у R -у. ✓

Непрекидно осигурање

Код непрекидног осигурања осигурана сума се исплаћује одмах након смрти осигураника. У овом случају ради се са непрекидним случајним величинама (T). Једнократне нето премије у овом случају се не могу добити директно из таблица смртности без увођења додатних претпоставки (на пример, линеарност вероватноће смртности или константност интензитета смртности).

У наставку су дате садашње вредности осигурања и једнократне нето премије раније поменутих типова осигурања (осигурана сума је 1, $v = e^{-\delta}$).

врста осигурања	садашња вредност осигуране суме	једнократна нето премија
доживотно за случај смрти	$Z = v^T$	$\bar{A}_x = \int_0^{+\infty} v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt$
привремено са трајањем n година	$Z = v^T I\{K < n\}$	$\bar{A}_{x:\overline{n} }^1 = E(v^T I\{K < n\})$
за случај доживљења са трајањем n година	$Z = v^n I\{K \geq n\}$	$\bar{A}_{x:\overline{n} }^1 = v^n {}_n p_x$
мешовито са трајањем n година	$Z = \begin{cases} v^T, & K < n \\ v^n, & K \geq n \end{cases}$	$\bar{A}_{x:\overline{n} } = \bar{A}_{x:\overline{n} }^1 + \bar{A}_{x:\overline{n} }^1$
одложено за m година доживотно	$Z = v^T I\{K \geq m\}$	${}_m \bar{A}_x = {}_m p_x v^m \bar{A}_{x+m} = \bar{A}_x - \bar{A}_{x:\overline{n} }^1$

Задатак 27. Нека је Z_1 садашња вредност непрекидног мешовитог осигурања са трајањем n година у износу 1 издатог особи старости x , а Z_2 садашња вредност непрекидног доживотног осигурања са трајањем n година у износу 1 издатог особи старости x . Ако су очекивање и дисперзија од Z_2 једнаки 0.04 и 0.01, редом, дисконтни фактор за n година $v^n = 0.30$, а вероватноћа преживљавања n година једнака 0.8, одредити дисперзију од Z_1 .

Решење. Нека је Z_3 садашња вредност осигурања за случај доживљења. Тада $Z_1 = Z_2 + Z_3$. Према томе

$$DZ_1 = DZ_2 + DZ_3 + 2cov(Z_2, Z_3).$$

Одредимо потребне вредности. Јасно је да

$$\begin{aligned}\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 &= EZ_3 = v^n \cdot {}_n p_x = 0.3 \cdot 0.8, \\ {}^2\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 &= EZ_3^2 = v^{2n} \cdot {}_n p_x = 0.3^2 \cdot 0.8.\end{aligned}$$

Према томе

$$DZ_3 = 0.3^2 \cdot 0.8 - (0.3 \cdot 0.8)^2 = 0.0144.$$

Додатно,

$$cov(Z_2, Z_3) = E(Z_2 Z_3) - EZ_2 EZ_3 = -EZ_2 EZ_3 = -0.096.$$

Дакле,

$$DZ_1 = 0.01 + 0.0144 - 2 \cdot 0.096 = 0.0244 - 0.0192 = 0.0052.$$

✓

Задатак 28. Сваки од 100 чланова клуба старости x је приложио износ ω у фонд. Фонд има камату $i = 10\%$ годишње и има обавезу да плати 1000 када неки од

чланова премине. Вероватноћа да ће фонд моћи да исплати обавезу је 0.95. Ако је једнократна нето премија доживотног осигурања 0.06, а одговарајућа дисперзија 0.0064, одредити ω . Претпоставити да су будућа времена живота независна и да имају нормалну расподелу.

Решење. Ако је Z_k , $k = 1, \dots, 100$, садашња вредност осигуране суме k -тог члана, онда је

$$0.95 = P\{(Z_1 + \dots + Z_{100}) \cdot 1000 \leq 100\omega\} = P\left\{\sum_{k=1}^{100} Z_k \leq \frac{\omega}{10}\right\}.$$

Како су T_k , $k = 1, \dots, 100$, независне и једнако расподеле, то су $Z_k = v^{T_k}$, $k = 1, \dots, n$, независне и једнако расподеле. С обзиром да је n довољно велико, можемо користити централну граничну теорему. Такође, у задатку је дато да је $A_x = EZ_1 = 0.06$ и $DZ_1 = 0.0064$. Тада

$$0.95 = P\left\{\frac{\sum_{k=1}^n Z_k - 100EZ_1}{\sqrt{100DZ_1}} \leq \frac{\frac{\omega}{10} - 100EZ_1}{\sqrt{100DZ_1}}\right\}.$$

Према томе

$$\frac{\frac{\omega}{10} - 100 \cdot 0.06}{\sqrt{0.64}} = \Phi^{-1}(0.95) = 1.645,$$

односно $\omega = 10(6 + 1.645 \cdot 0.8) = 73.16$. ✓

Задатак 29. Нека је функција преживљавања у некој популацији одређена са $s(x) = 1 - \frac{x}{100}$, $0 \leq x \leq 100$, а каматна стопа $\delta = 0.10$. Одредити једнократну нето премију доживотног осигурања са осигураном сумом 50000 која се исплаћује у тренутку смрти, а које је уплатила особа старости 30 година.

Решење. Треба одредити $50000\bar{A}_{30}$. Како је функција преживљавања реп расподеле случајне величине W за коју важи да је $T(x) = W - x$, то је

$$\begin{aligned} {}_t p_x &= P\{T(x) > t\} = P\{W > t + x | W > x\} = \frac{s(x+t)}{s(x)} \\ &= \frac{1 - \frac{x+t}{100}}{1 - \frac{x}{100}} = 1 - \frac{t}{100-x}, \quad 0 \leq t \leq 100-x. \end{aligned}$$

Одговарајућа густина расподеле је $g(t) = -\frac{d}{dt} {}_t p_x = \frac{1}{100-x}$, $0 \leq t \leq 100-x$. Према томе, за $x = 30$ следи

$$\bar{A}_{30} = \int_0^{70} v^t \cdot g(t) dt = \int_0^{70} v^t \cdot \frac{1}{70} dt = \frac{1}{70} \int_0^{70} e^{-0.1t} dt = 0.14.$$

Тражена нето премија је 7000. ✓

Променљиво осигурање

У општем случају осигурана сума не мора бити константна, већ се њена вредност може мењати током година. Ако претпоставимо да је c_j износ осигуране суме у j -тој години, тада разликујемо

дискретно осигурање:

- садашња вредност осигуране суме: $Z = c_{K+1}v^{K+1}$
- једнократна нето премија:

$$E(Z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k v^{k+1} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k} = c_1 \cdot A_x + (c_2 - c_1) \cdot {}_1|A_x + (c_3 - c_2) \cdot {}_2|A_x + \dots$$

- ако је $c_{n+1} = c_{n+2} = \dots = 0$:

$$E(Z) = c_n \cdot A_{x:\overline{n}|}^1 + (c_{n-1} - c_n) \cdot A_{x:\overline{n-1}|}^1 + (c_{n-2} - c_{n-1}) \cdot A_{x:\overline{n-2}|}^1 + \dots$$

непрекидно осигурање:

- садашња вредност осигуране суме: $Z = c(T)v^T$
- једнократна нето премија: $E(Z) = \int_0^{+\infty} c(t) \cdot v^t \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} dt$

Када се каже стандардно растуће (оппадајуће) осигурање, подразумева се да осигурана сума расте (оппада) за једну јединицу сваке године, односно

$$c_j = c_{j-1} \pm 1.$$

Задатак 30. Десетогодишње привремено осигурање које уговорила особа старости x покрива следеће исплате осигуране суме на крају године смрти

Година смрти	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Исплата	10	10	9	9	9	8	8	8	8	7

Одредити једнократну нето премију за ову полису у функцији од нето премија доживотног осигурања са фиксним износом.

Решење. Означимо са $c = \{10, 10, 9, 9, 9, 8, 8, 8, 8, 7\}$ вектор свих потенцијалних осигураних суме. Једнократна нето премија овог осигурања је

$$\begin{aligned} EZ &= \sum_{k=0}^9 c_{k+1} v^{k+1} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k} \\ &= c_1 \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k} - c_1 \sum_{k=1}^{\infty} v^{k+1} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k} + c_2 \sum_{k=1}^{\infty} v^{k+1} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k} \\ &\quad - c_2 \sum_{k=2}^{\infty} v^{k+1} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k} + \dots + c_{11} \sum_{k=10}^{\infty} v^{k+1} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k} \\ &= c_1 A_x + (c_2 - c_1) {}_1|A_x + \dots + (c_{11} - c_{10}) {}_{10}|A_x \\ &= c_1 A_x + (c_2 - c_1) p_x v A_{x+1} + \dots + (c_{11} - c_{10}) {}_{10}p_x v^{10} A_{x+10}. \end{aligned}$$

✓

Задатак 31. Трогодишње привремено осигурање за особу старости x година је дефинисано табелом:

година t	износ	q_{x+t}
0	3	0.20
1	2	0.25
2	1	0.50

Ако је $v = 0.9$, исплата се врши на крају године смрти, а једнократна нето премија осигурања је Π , одредити вероватноћу да садашња вредност осигуране суме превазилази Π .

Решење. Ако је Z садашња вредност осигуране суме, онда треба одредити

$$P\{Z > \Pi\}.$$

Из задатка закључујемо да је

$$Z = c_{K+1} \cdot v^{K+1} I\{K < t\} = \begin{cases} 3 \cdot 0.9, & K = 0, \\ 2 \cdot 0.9^2, & K = 1, \\ 1 \cdot 0.9^3, & K = 2, \\ 0, & K \geq 3, \end{cases} = \begin{cases} 2.7, & K = 0, \\ 1.62, & K = 1, \\ 0.729, & K = 2, \\ 0, & K \geq 3. \end{cases}$$

Са друге стране,

$$\begin{aligned} \Pi = EZ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1} \cdot v^{k+1} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k} \\ &= 2.7 \cdot q_x + 1.62 \cdot (1 - q_x) \cdot q_{x+1} + 0.729 \cdot (1 - q_x)(1 - q_{x+1})q_{x+2} = 1.0827. \end{aligned}$$

Тражена вероватноћа је

$$P\{Z > \Pi\} = P\{Z = 2.7\} + P\{Z = 1.62\} = q_x + p_x \cdot q_{x+1} = 0.4.$$

✓

Задатак 32. Особа старости 30 година потписује полису доживотног осигурања са осигураном сумом 10000 првих 20 година, а 20000 након тога. Осигураник такође добија и повраћај премије (без камате) у случају смрти у првих 20 година. Осигурана сума се исплаћује на крају године смрти, каматна стопа је 5%, а смртност прати таблице. Одредити једнократну нето премију.

Решење. Из текста задатка закључујемо да је

$$EZ = 10000A_x + 10000{}_{20|}A_x + EZ \cdot A_{x:\overline{20}|}^1.$$

Детаљно решење је у $R-y$.

✓

Задатак 33. а) Известити рекурентну формулу за нето премију доживотног осигурања. Користећи таблице смртности, нацртати график зависности тих нето премија од каматне стопе, ако је $i = 0.25, 5, 7.5, 10\%$.

б) Известити рекурентну формулу за нето премију стандардног растућег доживотног осигурања. Користећи таблице смртности, нацртати график зависности тих нето премија од каматне стопе, ако је $i = 0.25, 5, 7.5, 10\%$.

Решење. а) Приметимо да

$$\begin{aligned}
 A_x &= \sum_{k=0}^{+\infty} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} = v q_x + \sum_{k=1}^{+\infty} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} \\
 &= v q_x + \sum_{k=0}^{+\infty} v^{k+2} {}_{k+1} p_x q_{x+k+1} \\
 &= v q_x + v \sum_{k=0}^{+\infty} v^{k+1} p_x \cdot {}_k p_{x+1} \cdot q_{x+k+1} \\
 &= v q_x + v p_x A_{x+1}.
 \end{aligned}$$

Остатак задатка је решен у R -у.

б) Стандардно растуће осигурање подразумева да је осигурана сума прве године једнака 1, друге године 2, треће године 3, ... Приметимо да

$$\begin{aligned}
 (IA)_x &= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} \\
 &= v q_x + \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1) v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} \\
 &= v q_x + \sum_{k=0}^{+\infty} (k+2) v^{k+2} {}_{k+1} p_x q_{x+k+1} \\
 &= v q_x + v \left(\sum_{k=0}^{+\infty} v^{k+1} p_x \cdot {}_k p_{x+1} \cdot q_{x+k+1} + \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) v^{k+1} p_x \cdot {}_k p_{x+1} \cdot q_{x+k+1} \right) \\
 &= v q_x + v p_x (A_{x+1} + (IA)_{x+1}).
 \end{aligned}$$

Остатак задатка је решен у R -у.

✓

Задатак 34. Одредити једнократну нето премију растућег 20-то годишњег привременог осигурања ако је $x = 25$, а износи: 1 за прву годину, $1 + g$ за другу, $(1 + g)^2$ за трећу, итд. Користити $i = 5\%$, $g = 6\%$.

Решење. R

✓

Задатак 35. Одредити једнократну нето премију стандардног опадајућег доживотног осигурања са осигураном сумом $100 - x$ за особу са x година. Износ се исплаћује на крају године смрти, $i = 5\%$, а $x = 50$.

Решење. R

✓

Осигурање ренте

Рента представља ток новца код којег се исплате унапред иодређене суме врше док је осигураник жив. Дакле, трајање ренте зависи од преосталог животног века T . Износ једнократне нето премије је очекивање садашње вредности низа уплата.

Стална годишња рента

Претпостављамо да је рента лична, односно да је сам потписник уговора и корисник ренте, да особа има x година у тренутку склапања уговора и да су вредности свих исплата 1.

врста личне ренте	садашња вредност низа исплата	једнократна нето премија
непосредна доживотна платива унапред	$Y = 1 + v + v^2 + \dots + v^K$ $= \sum_{k=0}^{+\infty} v^k I\{K \geq k\} = \ddot{a}_{\overline{K+1} }$	$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{+\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1} } p_x q_{x+k}$ $= \sum_{k=0}^{+\infty} v^k {}_k p_x$
непосредна ограниченог трајања платива унапред	$Y = \ddot{a}_{\overline{K+1} } I\{K < n\} + \ddot{a}_{\overline{n} } I\{K \geq n\}$	$\ddot{a}_{x:\overline{n} } = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1} } p_x q_{x+k} + \ddot{a}_{\overline{n} } p_x$ $= \sum_{k=0}^{n-1} v^k {}_k p_x$
непосредна доживотна платива накнадно	$Y = v + v^2 + \dots + v^K = a_{\overline{K} }$	$a_x = \ddot{a}_x - 1$
непосредна ограниченог трајања платива накнадно	$Y = a_{\overline{K} } I\{K < n\} + a_{\overline{n} } I\{K \geq n\}$	$a_{x:\overline{n} } = \sum_{k=1}^n v^k {}_k p_x$
одложена доживотна платива унапред	$Y = (v^m + v^{m+1} + \dots + v^K) I\{K \geq m\}$	${}_m \ddot{a}_x = \sum_{k=m}^{+\infty} v^k {}_k p_x = {}_m p_x v^m \ddot{a}_{x+m}$ $= \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{m} }$

Код непосредна рента исплате почињу одмах након закључивања уговора, док код одложене ренте исплата почиње после одређеног броја година.
Код ренте плативе унапред исплата се врши на почетку године, док код ренте плативе накнадно исплата се врши на крају године.

Може се направити веза између садашње вредности осигуране суме код осигурања Z и садашње вредности низа исплата ренте Y на следећи начин

$$Y = \frac{1 - Z}{1 - v}.$$

Преласком на очекивану вредност, у зависности од врсте осигурања и ренте, добијају се везе између једнократних нето премија

- $\ddot{a}_x = \frac{1 - A_x}{1 - v},$
- $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1 - A_{x:\overline{n}|}}{1 - v},$
- $a_x = \frac{1 - A_x}{1 - v} - 1,$
- $a_{x:\overline{n}|} = \frac{1 - A_{x:\overline{n}|}}{1 - v} - 1 + v^n \cdot {}_n p_x,$
- ${}_m|\ddot{a}_x = \frac{A_{x:\overline{m}|} - A_x}{1 - v}.$

Задатак 36. Дате су следеће информације везане за трогодишњу привремену ренту плативу унапред, за особу старости x година:

t	исплата	p_{x+t}
0	2	0.80
1	3	0.75
2	4	0.50

и дисконтни фактор је $v = 0.9$.

- а) Одредити дисперзију садашње вредности исплата.
 б) Одредити вероватноћу да садашња вредност исплата превазилази 4.

Решење. а) Из дате табеле јасно је да

$$\begin{aligned}P\{K = 0\} &= q_x = 1 - 0.8 = 0.2, \\P\{K = 1\} &= p_x \cdot q_{x+1} = 0.8 \cdot 0.25 = 0.2, \\P\{K \geq 2\} &= 1 - P\{K < 2\} = 1 - 0.4 = 0.6.\end{aligned}$$

Садашње вредности исплата су:

$$Y = \begin{cases} 2, & K = 0, \\ 2 + 3v = 4.70, & K = 1, \\ 2 + 3v + 4v^2 = 7.94, & K \geq 2. \end{cases}$$

Према томе

$$\begin{aligned}EY &= 0.2 \cdot 2 + 0.2 \cdot 4.70 + 0.6 \cdot 7.94 = 6.104, \\EY^2 &= 0.2 \cdot 4 + 0.2 \cdot 4.70^2 + 0.6 \cdot 7.94^2 = 43.044, \\DY &= EY^2 - (EY)^2 = 5.785.\end{aligned}$$

б) Приметимо да

$$P\{Y > 4\} = P\{K > 0\} = p_x = 0.80.$$

✓

Задатак 37. Нека је Y садашња вредност низа исплата доживотне ренте плативе унапред у износу 1 годишње издате особи старости x . Ако је дисконтни фактор $v = \frac{24}{25}$, онда је одговарајућа нето премија ренте једнака 10 а ако је дисконтни фактор v^2 , онда је одговарајућа нето премија ренте једнака 6. Одредити дисперзију од Y .

Решење. Треба израчунати дисперзију случајне величине Y . С обзиром да је Y кумулативна сума, очекивање EY^2 није једноставно одредити. Због тога се у оваквим случајевима користи веза између осигурања и ренте.

Како је

$$Y = 1 + v + v^2 + \dots + v^K = \frac{1 - v^{K+1}}{1 - v} = \frac{1 - Z}{1 - v},$$

где је Z садашња вредност доживотног осигурања, јасно је да

$$DY = \frac{1}{(1 - v)^2} DZ = \frac{1}{(1 - v)^2} ({}^2A_x - A_x^2).$$

Сада, поново из везе између Y и Z , следи

$$A_x = 1 - (1 - v)\ddot{a}_x = 1 - \frac{10}{25} = \frac{15}{25}.$$

Са друге стране, ${}^2A_x = EZ^2$, где је

$$Z^2 = v^{2(K+1)}.$$

Како је

$$1 + v^2 + v^4 + \dots + v^{2K} = \frac{1 - v^{2(K+1)}}{1 - v^2} = \frac{1 - Z^2}{1 - v^2},$$

то је

$${}^2A_x = EZ^2 = 1 - (1 - v^2) \cdot 6 = \frac{331}{625}.$$

Према томе

$$DY = \frac{1}{0.04^2} \left(\frac{331}{625} - \frac{225}{625} \right) = 106.$$

✓

Задатак 38. Дата су следеће вредности ако је каматна стопа $i = 3\%$

x	$\ddot{a}_x$
72	8.06
73	7.73
74	7.43
75	7.15

Одредити вероватноћу да ће особа која има 73 године преживљавати следећу годину.

Решење. Треба одредити p_{73} . Приметимо да

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x &= \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot {}_k p_x = 1 + v \cdot p_x + v^2 \cdot {}_2 p_x + \dots \\ &= 1 + v \cdot p_x + v^2 \cdot p_x \cdot p_{x+1} + \dots \\ &= 1 + v \cdot \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot {}_k p_{x+1} \\ &= 1 + v \cdot p_x \cdot \ddot{a}_{x+1}.\end{aligned}$$

Дакле, $p_x = \frac{\ddot{a}_x - 1}{v \ddot{a}_{x+1}}$. Односно, у конкретном случају

$$p_{73} = \frac{\ddot{a}_{73} - 1}{v \ddot{a}_{74}} = \frac{7.73 - 1}{\frac{7.43}{1.03}} = 0.93.$$

✓

Задатак 39. Одредити нето премију доживотне ренте плативе унапред у износу 1 годишње издате особи старости x на основу таблица смртности и $i = 5\%$ користећи рекурзивну формулу. Нацртати график њених вредности за $i = 0, 2.5, 5, 7.5, 10\%$ и $x = \overline{0, 99}$.

Решење. R

✓

Задатак 40. Симулирати 200 вредности $Y = 1 + v + \dots + v^K = \ddot{a}_{\overline{K+1}|}$, при чему је $K = K(40)$, $i = 5\%$ и смртност прати таблице. Упоредити узорачке и теоријске вредности очекивања и дисперзије.

Решење. R

✓

Задатак 41. Особа од 40 година је освојила награду од 10000 евра на лутрији. Уместо једнократне исплате тог износа, добитник може добијати фиксан износ X сваке године, на годишњицу освајања награде, при чему се гарантује да ће првих 10 исплата бити извршено. Ако су износи добијени на ова два начина (актуарски) једнаки, одредити износ X . Годишња каматна стопа је 4%, а смртност прати таблице.

Решење. Пошто износи треба да буду актуарски једнаки, значи да садашња вредност свих исплата треба да буде једнака садашњој вредности награде. Према томе

$$10000 = X(\ddot{a}_{\overline{10}|} + {}_{10|}\ddot{a}_x) = X(\ddot{a}_{\overline{10}|} + v^{10} {}_{10}p_x \ddot{a}_{x+10}) = X \left(\frac{1 - v^{10}}{1 - v} + v^{10} {}_{10}p_x \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_{x+10} \right).$$

Остатак решења је у R -у.

✓

Стална рента која се исплаћује m пута годишње

Претпостављамо да се плаћа износ $\frac{1}{m}$ m пута годишње (изузев последње године) све док је корисник ренте жив.

врста личне ренте	садашња вредност низа исплата	једнократна нето премија
непосредна доживотна платива унапред	$Y = \frac{1}{m}(1 + v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + \dots + v^{K+S^{(m)}-\frac{1}{m}})$ $= \ddot{a}_{\overline{T} }^{(m)}$	$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{+\infty} v^{\frac{k}{m}} {}_{\frac{k}{m}}p_x$
непосредна ограниченог трајања платива унапред	$Y = \sum_{k=0}^{mn-1} \frac{1}{m} v^{\frac{k}{m}} I\{T \geq \frac{k}{m}\}$	$\ddot{a}_{x:\overline{n} }^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} - n p_x v^n \ddot{a}_{x+n}^{(m)}$
непосредна доживотна платива накнадно	$Y = \frac{1}{m}(v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + \dots + v^{K+S^{(m)}}) = a_{\overline{T} }$	$a_x^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} - \frac{1}{m}$
непосредна ограниченог трајања платива накнадно	$Y = \sum_{k=1}^{mn} \frac{1}{m} v^{\frac{k}{m}} I\{T \geq \frac{k}{m}\}$	$a_{x:\overline{n} }^{(m)} = \ddot{a}_{x:\overline{n} }^{(m)} - \frac{1}{m}(1 - n p_x v^n)$

Могуће је, уз додатне претпоставке (најчешће линеатност вероватноће смртности), повезати једнократне нето премије ренте које се плаћа m пута годишње и ренте која се плаћа једном годишње.

Задатак 42. Користећи претпоставку о линеарности ${}_u q_x$ и таблице смртности са ефективном каматном стопом 5%, одредити једнократну нето премију непосредне личне ренте за особу старости 40 година која траје 30 година и исплаћује се два пута годишње унапред.

Решење. Треба одредити $\ddot{a}_{40:\overline{30}|}^{(2)}$. Познато је да

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} - n p_x \cdot v^n \ddot{a}_{x+n}^{(m)}.$$

Пошто треба користити таблице смртности, треба повезати наведену ренту са рентом која се исплаћује једном годишње.

Прво, слично као код ренти које се исплаћују једном годишње, може се направити веза између садашње вредности осигуране суме код осигурања код којег се

осигурана сума исплаћује на крају дела године у којем је осигураник умро $Z^{(m)}$ и садашње вредности низа исплата ренте Y на следећи начин

$$Y = \frac{1}{m} \frac{1 - v^{K+S^{(m)}+\frac{1}{m}}}{1 - v^{\frac{1}{m}}} = \frac{1 - Z^{(m)}}{m(1 - v^{\frac{1}{m}})}.$$

Преласком на очекивану вредност, добија се

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1 - A_x^{(m)}}{m(1 - v^{\frac{1}{m}})}.$$

Како је

$$\begin{aligned} P\{S \leq u | K = k\} &= \frac{P\{S \leq u, K = k\}}{P\{K = k\}} = \frac{P\{T \leq k + u | T \geq k\}}{P\{K = k\}} \\ &= \frac{{}_u q_{x+k} \cdot {}_k p_x}{{}_k p_x \cdot q_{x+k}} = \frac{{}_u q_{x+k}}{q_{x+k}}, \end{aligned}$$

претпоставка линеарности ${}_u q_x$ нам даје да

$$P\{S \leq u | K = k\} = \frac{u \cdot q_{x+k}}{q_{x+k}} = u.$$

Одакле следи да су S и K независне случајне величине и да $S \in \mathcal{U}[0, 1]$. Скупачна величина $S^{(m)} = \frac{1}{m}[mS + 1]$ је одговарајућа дискретна варијанта која узима вредности $\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, 1$. Према томе, $S^{(m)}$ има дискретну униформну расподелу и независна је од случајне величине K при наведеном услову.

Користећи претходно, следи

$$\begin{aligned} A_x^{(m)} &= E(v^{K+S^{(m)}+\frac{1}{m}}) = E(v^{K+1}) E(v^{S^{(m)}+\frac{1}{m}-1}) \\ &= A_x \cdot v^{\frac{1}{m}-1} \sum_{k=1}^m v^{\frac{k}{m}} \frac{1}{m} = A_x \cdot v^{\frac{1}{m}-1} \frac{1}{m} \frac{1 - v}{1 - v^{\frac{1}{m}}} = A_x \cdot \frac{i}{i^{(m)}}. \end{aligned}$$

Према томе

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m(1 - v^{(m)})} \left(1 - \frac{i}{i^{(m)}} A_x \right).$$

Како је $A_x = 1 - \ddot{a}_x(1 - v)$, то

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x^{(m)} &= \frac{1}{m(1 - v^{\frac{1}{m}})} \left(1 - \frac{i}{i^{(m)}} (1 - (1 - v)\ddot{a}_x) \right) \\ &= \frac{1}{m(1 - v^{\frac{1}{m}})} \left(1 - \frac{i}{i^{(m)}} \right) + \frac{1}{m(1 - v^{\frac{1}{m}})} \frac{i}{i^{(m)}} (1 - v)\ddot{a}_x \\ &= \frac{i^{(m)} - i}{m(1 - v^{\frac{1}{m}})i^{(m)}} + \frac{i(1 - v)}{m(1 - v^{\frac{1}{m}})i^{(m)}} \ddot{a}_x = \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m). \end{aligned}$$

Према томе, заменом у полазни израз, добија се

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} &= \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m) - {}_n p_x \cdot v^n (\alpha(m)\ddot{a}_{x+n} - \beta(m)) \\ &= \alpha(m)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta(m)(1 - {}_n p_x \cdot v^n). \end{aligned}$$

Остатак решења је у R -у.

✓

Задатак 43. Претпоставимо да особа старости $x + u$, $u \in (0, 1)$, потписује полису доживотне ренте која се исплаћује m пута годишње. Одредити једнократну нето премију те ренте користећи таблице смртности, каматну стопу 5% и претпоставку линеарности вероватноће смртности ако је $m = 4$, $x = 30$ и $u = \frac{1}{3}$.

Решење. Користећи претходни задатак имамо да је

$$\ddot{a}_{x+u}^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_{x+u} - \beta(m),$$

где је $\alpha(m) = \frac{i(1-v)}{m(1-v\frac{1}{m})i^{(m)}}$ и $\beta(m) = \frac{i-i^{(m)}}{m(1-v\frac{1}{m})i^{(m)}}$. Дакле, треба одредити $\ddot{a}_{x+u}$. Претпоставка линеарности вероватноће смртности подразумева да је ${}_uq_x = uq_x$. Према томе

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{x+u} &= \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_{x+u} = \frac{u p_x}{u p_x} \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_{x+u} = \frac{1}{1 - uq_x} \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x u p_{x+k} \\ &= \frac{1}{1 - uq_x} \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x (1 - uq_{x+k}) = \frac{1}{1 - uq_x} \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x (1 - uq_{x+k}) \\ &= \frac{1}{1 - uq_x} \left(\sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x - u \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x q_{x+k} \right) = \frac{1}{1 - uq_x} \left(\ddot{a}_x - \frac{u}{v} A_x \right). \quad (2)\end{aligned}$$

Користећи да је $A_x = 1 - (1 - v)\ddot{a}_x$, следи да је

$$\ddot{a}_{x+u} = \frac{1}{1 - uq_x} \left(\ddot{a}_x - \frac{u}{v} (1 - (1 - v)\ddot{a}_x) \right) = \frac{1 + ui}{1 - uq_x} \ddot{a}_x - \frac{u(1 + i)}{1 - uq_x}.$$

Заменом у полазни израз добија се

$$\ddot{a}_{x+u}^{(m)} = \alpha(m) \left(\frac{1 + ui}{1 - uq_x} \ddot{a}_x - \frac{u(1 + i)}{1 - uq_x} \right) - \beta(m).$$

Остатак решења се налази у R -у. ✓

Стална непрекидна рента

Када је број исплата током године велик, односно период између две исплате кратак, онда се говори о непрекидној ренти.

врста личне ренте	садашња вредност низа исплата	једнократна нето премија
непосредна доживотна	$Y = \int_0^T v^t dt = \bar{a}_{\overline{T} }$	$\bar{a}_x = \int_0^{+\infty} v^t {}_t p_x dt$
непосредна ограниченог трајања	$Y = \bar{a}_{\overline{T} } I\{T < n\} + \bar{a}_{\overline{n} } I\{T \geq n\}$	$\bar{a}_{x:\overline{n} } = \int_0^n v^t {}_t p_x dt$
одложена доживотна	$Y = (\bar{a}_{\overline{T} } - \bar{a}_{\overline{m} }) I\{T \geq m\}$	${}_m \bar{a}_x = \int_m^{+\infty} v^t {}_t p_x dt$

Задатак 44. Ако је каматна стопа $\delta > 0$, онда је једнократна нето премија доживотног осигурања издатог особи старости x које се исплаћује непрекидно једнака 10. Са друге стране, ако је смртност иста као у претходном случају а каматна стопа 2δ , вредност те премије је 7.375. Ако је дисперзија садашње вредности низа исплата при каматној стопи δ једнака 50, одредити вредност једнократне премије осигурања које је потписала особа старости x и осигурана сума се исплаћује у тренутку смрти.

Решење. У задатку су дате вредности

$$\int_0^{+\infty} e^{-\delta t} {}_t p_x dt = 10, \quad \int_0^{+\infty} e^{-2\delta t} {}_t p_x dt = 7.375.$$

Нека је Y садашња вредности исплата при каматној стопи δ . Јасно је да

$$Y = \bar{a}_{\overline{T}|} = \int_0^T v^t dt = \int_0^T e^{-\delta t} dt = \frac{1 - e^{-\delta T}}{\delta} = \frac{1 - Z}{\delta},$$

где је $Z = e^{-\delta T}$ садашња вредност доживотног осигурања које се плаћа у тренутку смрти. Јасно је да

$$EZ = 1 - \delta EY = 1 - 10\delta.$$

Са друге стране, ако је каматна стопа 2δ , онда је садашња вредност исплата

$$\int_0^T e^{-2\delta t} dt = \frac{1 - e^{-2\delta T}}{2\delta} = \frac{1 - Z^2}{2\delta}$$

Према томе, када се примени очекивање на леву и десну страну претходног израза, добија се

$$EZ^2 = 1 - 2\delta \cdot 7.375.$$

Како је

$$DY = \frac{DZ}{\delta^2},$$

то следи

$$50 = \frac{EZ^2 - (EZ)^2}{\delta^2} = \frac{1 - 14.75\delta - (1 - 10\delta)^2}{\delta^2}.$$

Решавањем ове квадратне једначине по δ , добија се $\delta = 0$ или $\delta = 0.035$. Прво решење није прихватљиво због услова задатка. Према томе, $\delta = 0.035$ и

$$\bar{A}_x = 1 - \delta EY = 0.65.$$

✓

Променљива рента

У општем случају, износ који се исплаћује не мора бити константан. Овај износ може на се мања једном годишње, m пута годишње или непрекидно. Ако претпоставимо да је r_j или $r(j)$ износ исплате у j -том тренутку, тада разликујемо

рента код које се износ мења једном годишње:

- садашња вредност исплата: $Y = \sum_{k=0}^{\infty} v^k r_k I\{K \geq k\}$
- једнократна нето премија: $EY = \sum_{k=0}^{\infty} v^k r_k {}_k p_x$

рента код које се износ мења m пута годишње:

- садашња вредност исплата: $Y = \sum_{k=0}^{\infty} v^{\frac{k}{m}} r_{\frac{k}{m}} I\{T \geq \frac{k}{m}\}$

- једнократна нето премија: $EY = \sum_{k=0}^{\infty} v^{\frac{k}{m}} r^{\frac{k}{m}} p_x$

рента код које се износ мења непрекидно:

- садашња вредност исплата: $Y = \int_0^T v^t r(t) dt$
- једнократна нето премија: $EY = \int_0^{\infty} v^t r(t) p_x dt$

Задатак 45. Дато је

x	69	70	71	72	$\dots$	79	80	81	82
S_x	77.938	67.117	57.520	49.043	$\dots$	13.483	10.875	8.691	6.875

где је $S_x = v^x l_x + 2v^{x+1} l_{x+1} + 3v^{x+2} l_{x+2} + \dots$. Одредити садашњу вредност опадајућег ануитета које је уплатила особа старости 70 година, са првом уплатом од 10 у 70-тој години, другом 9 у 71-ој, итд. Последња уплата је 1 по плану у 79-тој години.

Решење. Приметимо да

$$\begin{aligned}
 (D\ddot{a})_{x:\overline{10}|} &= \sum_{k=0}^9 c_k \cdot v^k \cdot {}_k p_x = 10 + 9v \cdot p_x + 8v^2 \cdot {}_2 p_x + \dots + v^9 \cdot {}_9 p_x \\
 &= 10 + pv \cdot \frac{l_{x+1}}{l_x} + 8v^2 \frac{l_{x+2}}{l_x} + \dots + v^9 \frac{l_{x+9}}{l_x} \\
 &= \frac{1}{l_x \cdot v_x} (10v^x \cdot l_x + 9v^{x+1} \cdot l_{x+1} + \dots + v^{x+9} \cdot l_{x+9}) \\
 &= \frac{1}{l_x \cdot v_x} \left(10 \sum_{k=0}^{\infty} v^{x+k} l_{x+k} - \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) v^{x+1+k} l_{x+1+k} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) v^{x+11+k} l_{x+11+k} \right) \\
 &= \frac{1}{l_x \cdot v_x} (10(S_x - S_{x+1}) - S_{x+1} + S_{x+11})
 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
 l_x \cdot v_x &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) v^{x+k} l_{x+k} - 2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) v^{x+1+k} l_{x+1+k} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) v^{x+2+k} l_{x+2+k} \\
 &= S_x - 2S_{x+1} + S_{x+2}.
 \end{aligned}$$

За $x = 70$, следи

$$(D\ddot{a})_{x:\overline{10}|} = \frac{1}{S_{70} - 2S_{71} + S_{72}} (10S_{70} - 11S_{71} + S_{81}) = \frac{1.12}{47.141} = 42.09.$$

✓

Задатак 46. Нека је број људи у некој популацији који су доживели свој x -ти рођендан одређен са $l_x = 100000(100 - x)$, $0 \leq x \leq 100$ и претпоставимо да се не врши камаћење. Ако се рента плаћа непрекидно годишњим износима 1 за прву годину и 2 касније, одредити:

- једнократну нето премију доживотног ануитета издатог особи старости 80 година;
- једнократну нето премију привременог 5-то годишњег ануитета издатог особи старости 80 година.

Решење. Познато је да

$$P\{T > t\} = {}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{100000(100 - x - t)}{100000(100 - x)} = 1 - \frac{t}{100 - x}, \quad 0 \leq t \leq 100 - x.$$

Одатле можемо закључити да $T = T(x) \in \mathcal{U}[0, 100 - x]$. Такође, знамо да је $v = 1$.

- а) Како се исплата само у првој години разликује од осталих и то за 1, то премију за ову ренту можемо представити као збир премија премија са фиксним изно-сима при чему једна почиње у нултом пренутку а друга је одложена за једну годину. Према томе

$$EY = \bar{a}_{80} + v \cdot p_{80} \cdot \bar{a}_{81} = ET(80) + \left(1 - \frac{1}{20}\right) ET(81) = 10 + \frac{19}{20} 9.5 = 19.025.$$

- б) Слично као у делу а), важи

$$\begin{aligned} EY &= \bar{a}_{80:\overline{5}|} + v \cdot p_{80} \cdot \bar{a}_{81:\overline{4}|} \\ &= E(\min\{T(80), 5\}) + \left(1 - \frac{1}{20}\right) E(\min\{T(81), 4\}) \\ &= \int_0^{20} \min\{t, 5\} \frac{1}{20} dt + \left(1 - \frac{1}{20}\right) \int_0^{19} \min\{t, 4\} \frac{1}{19} dt \\ &= \int_0^5 t \frac{1}{20} dt + \int_5^{20} 5 \frac{1}{20} dt + 0.95 \int_0^4 t \frac{1}{19} dt + 0.95 \int_4^{19} 4 \frac{1}{19} dt \\ &= 0.05 \cdot \frac{25}{2} + 0.25 \cdot 15 + 0.95 \cdot \frac{16}{38} + 0.95 \cdot \frac{4}{19} \cdot 15 = 7.775. \end{aligned}$$

✓

Задатак 47. Особа старости 40 година потписује уговор о привременој ренти на 30 година према којем се прва исплата у износу 10000 добија на годишњицу потписивања уговора, а свака следећа исплата је за 300 мања од претходне. Одредити једнократну нето премију за ову ренту, ако смртност прати таблице и каматна стопа је 5%.

Решење. Дакле, треба одредити

$$(Da)_{40:\overline{30}|} = \sum_{k=1}^{30} c_k \cdot v^k \cdot {}_k p_x,$$

где је $c = (10000, 9700, 9400, \dots, 300)$. Остатак решења је у R -у.

✓

Задатак 48. Особа уплаћује једнократну премију од 4 милиона динара за привремену ренту која траје 20 година и којим се сваке друге године уплаћује износ од 1 милион динара почевши од друге године. Претпоставимо да смртност у k -тој години (тј. да смрт наступи у периоду $[k, k + 1)$) има геометријску расподелу са параметром $p = 0.01$. Да ли се особи исплати таква рента, ако је каматна стопа 6% на годишњем нивоу?

Решење. Како смртност у k -тој години има геометријску $\mathcal{G}(p)$ расподелу, то

$$P\{K = k\} = p(1 - p)^k.$$

Са друге стране знамо да је

$$P\{K = k\} = {}_k p_x \cdot q_{x+k} = p_x \cdot p_{x+1} \cdots p_{x+k-1} \cdot (1 - p_{x+k}).$$

Пошто вероватноћа преживљавања не зависи од броја година, то закључујемо да је $p_{x+k} = 1 - p$ за свако k . Односно

$${}_k p_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdots p_{x+k-1} = (1 - p)^k.$$

Да би се особи исплатила рента треба израз

$$4000000 - 1000000(v^2 \cdot {}_2 p_x + v^4 \cdot {}_4 p_x + \cdots + v^{20} \cdot {}_{20} p_x)$$

да буде негативан (то значи да је уложио мање него што је добио). Како је

$$\sum_{k=1}^{10} v^{2k} \cdot {}_{2k} p_x = \sum_{k=1}^{10} v^{2k} \cdot (1 - p)^{2k} = v^2 (1 - p)^2 \frac{1 - (v^2 (1 - p)^2)^{10}}{1 - v^2 (1 - p)^2} = 0.5088138,$$

закључујемо да се рента исплати.

✓

Премије осигурања

Премија је износ који осигурано лице треба да плати осигуравачу за осигурање или ренту. Премија се назива **нето премијом** ако је очекивани губитак осигуравача (EL), односно очекивање разлике између садашње вредности осигуране суме (Z) или тока исплата (Y) и садашње вредности уплаћених премија, једнак нули.

Премија се може плаћати на један од следећа три начина

- једнократно,
- периодично са фиксним износом,
- периодично са променљивим износом.

Ми смо се до сада бавили једнократним нето премијама.

Бруто премија се добија када се на нето премију додају трошкови осигуравајуће компаније, порез, и слично.

Годишња нето премија која се плаћа дискретно

Претпостављамо да је осигурана сума једнака 1 и да се плаћа у тренутку смрти, а да се плаћање премије почиње у тренутку потписивања уговора.

врста осигурања	садашња вредност осигуране суме	периодична нето премија
доживотно за случај смрти	$Z = v^{K+1}$	$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$
привремено са трајањем n година	$Z = v^{K+1} I\{K < n\}$	$P_{x:\overline{n} }^1 = \frac{A_{x:\overline{n} }^1}{\ddot{a}_{x:\overline{n} }}$
за случај доживљења са трајањем n година	$Z = v^n I\{K \geq n\}$	$P_{x:\overline{n} } = \frac{A_{x:\overline{n} }}{\ddot{a}_{x:\overline{n} }}$
мешовито са трајањем n година	$Z = \begin{cases} v^{K+1}, & K < n \\ v^n, & K \geq n \end{cases}$	$P_{x:\overline{n} } = \frac{A_{x:\overline{n} }}{\ddot{a}_{x:\overline{n} }}$

Све претходно се може применити и на ренте којима се плаћа износ 1 годишње, једноставном заменом A са a у формулама за периодичне премије. Такође, премија се може плаћати у дискретним тренуцима чак и ако је осигурање непрекидно. У том случају, у горњим формулама само треба треба A заменити са $\bar{A}$.

Задатак 49. Периодична нето премија доживотног осигурања са исплатом у износу 1 на годишњицу потписивања уговора издатог особи старости 25 година, а која се плаћа највише 20 година, је 0.046. Периодична нето премија мешовитог осигурања са осигураном сумом 1 и трајањем 20 година издатог особи старости 25 година је 0.064, док је једнократна нето премија доживотног осигурања са осигураном сумом 1 издатог особи старости 45 година једнака 0.640. Одредити периодичну нето премију привременог осигурања са осигураном сумом 1 и трајањем 20 година издатог особи старости 25 година.

Решење. Дакле, познато је да ${}_{20}P_{25} = 0.046$, $P_{25:\overline{20}|} = 0.064$ и $A_{45} = 0.640$, а треба одредити $P_{25:\overline{20}|}^1$. Пошто се доживотно осигурање може написати као збир привременог и одложеног осигурања, односно

$$A_{25} = A_{25:\overline{20}|}^1 + v^{20} \cdot {}_{20}P_{25} \cdot A_{45},$$

дељењем овог израза са $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ добија се

$${}_{20}P_{25} = P_{25:\overline{20}|}^1 + P_{25:\overline{20}|} \cdot A_{45}.$$

Односно тражена премија је

$$\begin{aligned} P_{25:\overline{20}|}^1 &= {}_{20}P_{25} - P_{25:\overline{20}|} \cdot A_{45} \\ &= {}_{20}P_{25} - (P_{25:\overline{20}|} - P_{25:\overline{20}|}^1) \cdot A_{45}. \end{aligned}$$

Дакле,

$$0.36P_{25:\overline{20}|}^1 = 0.046 - 0.64 \cdot 0.064,$$

односно $P_{25:\overline{20}|}^1 = 0.014$. ✓

Задатак 50. Доживотно осигурање са осигураном сумом 1 која се исплаћује на крају године смрти издато је особи старости x . Премија се плаћа на почетку године, ако је особа преживела годину и може се одредити на два начина

- 1) као периодична нето премија,
- 2) као периодична премија за коју је очекивани губитак осигуравача -0.20 .

Ако је познато да је дисперзија губитка осигуравача у првом случају 0.30, одредити дисперзију губитка осигуравача у другом случају.

Решење. Означимо губитак осигуравача и нето премију са L и P_x у првом случају, а са L^* и G_x у другом. Тада знамо да је $EL = 0$ и $EL^* = -0.2$. Према томе

$$0 = EL = E(v^{K+1} - P_x \cdot \ddot{a}_{K+1}) = A_x - P_x \ddot{a}_x \quad (3)$$

$$= 1 - (1 - v)\ddot{a}_x - P_x \ddot{a}_x = 1 - (1 - v + P_x)\ddot{a}_x. \quad (4)$$

Односно $\ddot{a}_x = \frac{1}{1-v+P_x}$.

Са друге стране,

$$\begin{aligned} -0.2 &= EL^* = E(v^{K+1} - G_x \cdot \ddot{a}_{K+1}) = A_x - G\ddot{a}_x \\ &= 1 - (1 - v) \cdot \ddot{a}_x - G \cdot \ddot{a}_x = 1 - (1 - v + G)\ddot{a}_x. \end{aligned}$$

Односно $\ddot{a}_x = \frac{1.2}{1-v+G}$.

Изједначавањем добијених израза добија се $\frac{1-v+G}{1-v+P_x} = 1.2$. Према томе, користећи да је

$$L = v^{K+1} - P_x \cdot \ddot{a}_{K+1} = v^{K+1} - P_x \cdot \frac{1 - v^{K+1}}{1 - v} = v^{K+1} \left(1 + \frac{P_x}{1 - v} \right) - \frac{P_x}{1 - v},$$

добија се

$$\begin{aligned} DL^* &= D(v^{K+1} - G_x \cdot \ddot{a}_{K+1}) = D \left(v^{K+1} - G_x \cdot \frac{1 - v^{K+1}}{1 - v} \right) \\ &= D \left(v^{K+1} \left(1 + \frac{G_x}{1 - v} \right) - \frac{G_x}{1 - v} \right) = \left(1 + \frac{G_x}{1 - v} \right)^2 Dv^{K+1} \\ &= \left(1 + \frac{G}{1 - v} \right)^2 D \left(\left(L + \frac{P_x}{1 - v} \right) \left(1 + \frac{P_x}{1 - v} \right)^{-1} \right) \\ &= \left(1 + \frac{G_x}{1 - v} \right)^2 \frac{DL}{\left(1 + \frac{P_x}{1 - v} \right)^2} \\ &= \frac{(1 - v + G)^2}{(1 - v + P_x)^2} DL = 1.2^2 \cdot 0.3 = 0.432. \end{aligned}$$

✓

Задатак 51. Случајна величина L је губитак осигуравача двогодишњег привременог осигурања са осигураном сумом 1 која се исплаћује на крају године у којој је смрт наступила издатог особи старости x . Периодична нето премија се рачуна користећи принцип еквиваленције. Ако је вероватноћа смртности током прве године 0.1, током друге 0.2, а дисконтни фактор 0.9, одредити DL .

Решење. Губитак осигуравача узима три вредности у зависности од тога када је смрт наступила (или није наступила). Најмању вредност узима ако смрт осигураног лица није наступила у оквиру 2 године трајања осигурања (у том случају постоји само добит од уплаћених премија). Друга могућност је да смрт наступи током друге године трајања осигурања и у том случају осигуравајућа компанија је добила обе премије али мора да исплати осигурану суму. У трећем случају, ако смрт наступи током прве године трајања осигурања, осигуравач добија само једну премију и мора да исплати осигурану суму. Како је $q_x = 0.1$ и $q_{x+1} = 0.2$, следи да је

$$\begin{aligned} P\{L = -P_x - P_x v\} &= p_x \cdot p_{x+1} = 0.9 \cdot 0.8 = 0.72, \\ P\{L = v^2 - P_x - P_x v\} &= p_x \cdot q_{x+1} = 0.9 \cdot 0.2 = 0.18, \\ P\{L = v - P_x\} &= q_x = 0.1. \end{aligned}$$

Још треба одредити P_x . Из датих вредности, добија се

$$P_x = \frac{A_{x:\overline{2}|}^1}{\ddot{a}_{x:\overline{2}|}} = \frac{v \cdot q_x + v^2 \cdot p_x \cdot q_{x+1}}{1 + v \cdot p_x} = 0.13.$$

Дакле, расподела губитка осигураваача је

$$L : \begin{pmatrix} -0.247 & 0.563 & 0.77 \\ 0.72 & 0.18 & 0.1 \end{pmatrix},$$

а одговарајућа дисперзија

$$DL = EL^2 = 0.247^2 \cdot 0.72 + 0.563^2 \cdot 0.18 + 0.77^2 \cdot 0.1 = 0.160.$$

✓

Задатак 52. Доживотно осигурање је издато особи старости x и обезбеђује осигурану суму од 10000. Годишње уплате премија се врше на почетку године у периоду од 20 година, а осигурана сума се плаћа на крају године смрти. Повраћај премије је активан током периода плаћања премије тако што се половина последње премије која се уплати враћа као додатак на осигурану суму. Ако смртност прати таблице, $x = 30$ и каматна стопа је 5%, одредити годишњу нето премију.

Решење. Износ исплате наведеног осигурања зависи од тренутка када је смрт наступила, односно износ исплате је $10000 + \frac{P}{2}$ у току плаћања премије, а 10000 када се плаћање премије заврши. Садашње вредности исплата је

$$10000v^{K+1} + \frac{P}{2}v^{K+1}I\{K < 20\},$$

а одговарајућа очекивана вредност је $10000A_x + \frac{P}{2}A_{x:\overline{20}|}^1$. Са друге стране, садашња вредност уплата је

$$P_x \cdot (\ddot{a}_{\overline{K+1}|}I\{K < 20\} + \ddot{a}_{\overline{n}|}I\{K \geq 20\}),$$

а одговарајућа очекивана вредност $P_x \ddot{a}_{x:\overline{20}|}$. Изједначавањем ових израза добија се

$$P_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{20}|} = 10000A_x + \frac{P}{2}A_{x:\overline{20}|}^1.$$

Према томе

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{10000A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{20}|} - \frac{1}{2}A_{x:\overline{20}|}^1} \\ &= \frac{10000A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{20}|} - \frac{1}{2}(A_{x:\overline{20}|} - A_{x:\overline{1}|}^1)} \\ &= \frac{10000A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{20}|} - \frac{1}{2}(1 - (1-v) \cdot \ddot{a}_{x:\overline{20}|} - A_{x:\overline{1}|}^1)} \\ &= \frac{10000A_x}{(1 + \frac{1-v}{2})\ddot{a}_{x:\overline{20}|} - \frac{1}{2}(1 - v^{20} \cdot {}_{20}p_x)}. \end{aligned}$$

Остатак решења је у R -у.

✓

Задатак 53. Особа, која има x година, узима лизинг за ауто на 4 године које ће исплаћивати једнаким годишњим уплатама на крају сваке године. Истовремено, особа узима и полису четворогодишњег привременог осигурање које ће у случају смрти отплатити лизинг на крају године смрти, укључујући доспелу уплату. Нека је каматна стопа 0.06 за све прорачуне, $\ddot{a}_{25:\overline{4}|} = 3.667$ и ${}_4q_{25} = 0.005$.

- а) Одредити осигуравачев губитак у терминима очекиване целобројне дужине живота K за особу старости $x = 25$ и износ лизинга 1000, претпостављајући да се осигурање купује једнократном нето премијом G .
- б) Одредити једнократну нето премију за лизинг од 1000.
- в) Лизинг за аутомобил је 10000. Купац додатно позајмљује износ за привремено осигурање. Одредити укупно годишње плаћање.

Решење. а) Износ од 1000 се исплаћује кроз 4 године, односно садашња вредност свих уплата је $Pv + Pv^2 + Pv^3 + Pv^4 = Pa_{\overline{4}|i}$ (с обзиром да у случају смрти осигураног лица осигурање ће покрити преостале рате лизинга овде се не укључује вероватноћа смрти осигураног лица). Дакле,

$$P = \frac{1000}{a_{\overline{4}|i}} = \frac{1000}{\frac{1-v^4}{i}} = \frac{1000}{3.465} = 288.60.$$

У случају смрти осигураног лица у току K -те године, осигурање треба да покрије преостали износ

$$b_{K+1} = P \cdot \ddot{a}_{\overline{4-K}|i} I\{K < 4\},$$

односно садашња вредност тих уплата које осигуравач треба да уплати је

$$Z = v^{K+1} \cdot b_{K+1} I\{K < 4\} = P \cdot v^{K+1} \frac{1-v^{4-K}}{1-v} I\{K < 4\}.$$

Према томе, губитак осигуравача је

$$L = \begin{cases} Z - G = P \frac{v^{K+1}-v^5}{1-v} - G, & K < 4, \\ -G, & \text{иначе.} \end{cases}$$

- б) Једнократна нето премија се добија тако да очекивани губитак осигуравача буде 0, односно

$$\begin{aligned} 0 &= EL = E \left(\left(P \frac{v^{K+1}-v^5}{1-v} - G \right) I\{K < 4\} \right) - GP\{K \geq 4\} \\ &= \frac{P}{1-v} (A_{25:\overline{4}|}^1 - v^5 \cdot {}_4q_{25}) - G \\ &= \frac{P}{1-v} (A_{25:\overline{4}|} - v^4 \cdot {}_4p_{25} - v^5 \cdot {}_4q_{25}) - G \\ &= \frac{P}{1-v} (1 - (1-v) \cdot \ddot{a}_{25:\overline{4}|} - v^4 \cdot {}_4p_{25} - v^5 \cdot {}_4q_{25}) - G. \end{aligned}$$

Према томе,

$$G = \frac{P}{1-v} (1 - (1-v) \cdot \ddot{a}_{25:\overline{4}|} - v^4 \cdot {}_4p_{25} - v^5 \cdot {}_4q_{25}) = 2.53.$$

- в) У овом случају постоји додатни годишњи трошак у износу G^* . Означимо са L^* нови губитак осигуравача. Тада

$$L^* = \begin{cases} \frac{10000+G^*}{a_{\overline{4}|i}} \cdot \frac{v^{K+1}-v^5}{1-v} - G^*, & K < 4, \\ -G^*, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Нето премија у овом случају је

$$\begin{aligned} 0 &= EL^* = \frac{10000 + G^*}{a_{\overline{4}|}} \cdot \frac{A_{25:\overline{4}|}^1 - v^5 \cdot {}_4q_{25}}{1 - v} - G^* \\ &= \frac{10000}{a_{\overline{4}|}} \cdot \frac{A_{25:\overline{4}|}^1 - v^5 \cdot {}_4q_{25}}{1 - v} - G^* \left(1 - \frac{1}{a_{\overline{4}|}} \cdot \frac{A_{25:\overline{4}|}^1 - v^5 \cdot {}_4q_{25}}{1 - v} \right). \end{aligned}$$

Односно

$$\begin{aligned} G^* &= \frac{10000}{a_{\overline{4}|}} \cdot \frac{A_{25:\overline{4}|}^1 - v^5 \cdot {}_4q_{25}}{1 - v} \left(1 - \frac{1}{a_{\overline{4}|}} \cdot \frac{A_{25:\overline{4}|}^1 - v^5 \cdot {}_4q_{25}}{1 - v} \right)^{-1} \\ &= \frac{10000i}{1 - v^4} \cdot \frac{1 - (1 - v) \cdot \ddot{a}_{25:\overline{4}|} - v^4 \cdot {}_4p_{25} - v^5 \cdot {}_4q_{25}}{1 - v} \\ &\quad \times \frac{(1 - v^4)(1 - v)}{(1 - v^4)(1 - v) - i(1 - (1 - v) \cdot \ddot{a}_{25:\overline{4}|} - v^4 \cdot {}_4p_{25} - v^5 \cdot {}_4q_{25})} \\ &= 25.97. \end{aligned}$$

Према томе годишње уплате су $\frac{10000+G^*}{a_{\overline{4}|}} = \frac{10000+25.97}{3.465} = 2893.50$

✓

Задатак 54. Једнократна нето премија дискретног доживотног осигурања које је уплатила особа старости x година је 0.25, а за особу старости $x + 20$ је 0.40. Једнократна нето премија мешовитог осигурања са трајањем 20 година које је уплатила особа старости x година је 0.55. Ако је каматна стопа 3% и вероватноћа смртности током године линеарна функција, одредити периодичну нето премију (прва уплата је у тренутку потписивања уговора) непрекидног мешовитог осигурања које је уплатила особа старости x година. Претпоставља се да су све осигурање суме једнаке 1.

Решење. Треба одредити $P(\overline{A}_{x:\overline{20}|})$, ако је познато да је $A_x = 0.25$, $A_{x+20} = 0.40$ и $A_{x:\overline{20}|} = 0.55$. Губитак осигураваача је

$$L = v^T I\{K < n\} + v^n I\{K \geq n\} - P(\overline{A}_{x:\overline{20}|}) \cdot (\ddot{a}_{\overline{K+1}|} I\{K < n\} + \ddot{a}_{\overline{n}|} I\{K \geq n\}).$$

Пошто треба одредити нето премију, треба да важи $EL = 0$, односно

$$0 = \overline{A}_{x:\overline{20}|} - P(\overline{A}_{x:\overline{20}|}) \cdot \ddot{a}_{x:\overline{20}|}.$$

Према томе

$$P(\overline{A}_{x:\overline{20}|}) = \frac{\overline{A}_{x:\overline{20}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{20}|}} = \frac{\overline{A}_{x:\overline{20}|}^1 + v^{20} \cdot {}_{20}p_x}{\ddot{a}_{x:\overline{20}|}}.$$

Пошто је вероватноћа смртности током године линеарна функција, односно ${}_uq_x = u \cdot q_x$, $0 < u < 1$, знамо да су K , целобројна дужина живота, и S , преостала дужина живота у години смрти, независне случајне величине и $S \in \mathcal{U}[0, 1]$ (задатак 42.), то следи

$$\begin{aligned} \overline{A}_{x:\overline{20}|}^1 &= E(v^T I\{K < n\}) = E(v^{K+1} v^{S-1} I\{K < n\}) = E(v^{K+1} I\{K < n\}) E(v^{S-1}) \\ &= A_{x:\overline{20}|}^1 \int_0^1 v^{t-1} dt = A_{x:\overline{20}|}^1 \left(\frac{1}{\ln v} - \frac{1}{v \ln v} \right) = A_{x:\overline{20}|}^1 \frac{i}{\delta}. \end{aligned}$$

Према томе

$$P(\overline{A}_{x:\overline{20}|}) = \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{20}|}} \left(\frac{i}{\delta} A_{x:\overline{20}|}^1 - v^{20} \cdot {}_{20}p_x \right)$$

Користећи везу између осигурања и ренте и $v = \frac{1}{1+i}$, следи

$$\ddot{a}_{x:\overline{20}|} = \frac{1 - A_{x:\overline{20}|}}{1 - v} = 15.45.$$

Додатно, решавањем система

$$\begin{aligned} A_x &= A_{x:\overline{20}|}^1 + v^{20} \cdot {}_{20}p_x \cdot A_{x+20}, \\ A_{x:\overline{20}|} &= A_{x:\overline{20}|}^1 + v^{20} \cdot {}_{20}p_x, \end{aligned}$$

следи $v^{20} \cdot {}_{20}p_x = 0.5$ и $A_{x:\overline{20}|}^1 = 0.05$. Односно

$$P(\overline{A}_{x:\overline{20}|}) = \frac{1}{15.45} \left(\frac{0.03}{\ln 1.03} 0.05 + 0.5 \right) = 0.0356.$$

✓

Задатак 55. Доживотно осигурање издато особи старости x обезбеђује надокану у случају смрти у j -тој години у износу $b_j = 1000 \cdot 1.06^j$ на крају године смрти. Ако би осигурање имало фиксну осигурану суму 1 онда би одговарајућа периодична неко премија била 10^{-2} . Ако је каматна стопа 0.06 годишње, одредити константну годишњу нето премију променљивог осигурања.

Решење. У овом случају имамо променљиво осигурања, а премија је константна. Знамо да је $v = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{1.06}$ и садашња вредност накнаде у j -тој години је $b_j \cdot v^j = 1000$. Према томе, премија је

$$P = \frac{1000}{\ddot{a}_x}.$$

Користећи везу између осигурања и ренте и да је периодична неко премија константног осигурања $Q = 10^{-2}$, знамо да је

$$\ddot{a}_x = \frac{1 - A_x}{1 - v} = \frac{1 - Q \cdot \ddot{a}_x}{1 - v},$$

односно $\ddot{a}_x = \frac{1}{1-v+Q}$. Према томе,

$$P = 1000(1 + v + Q) = 1000 \frac{0.06}{1.06} + 10 = 66.60.$$

✓

Задатак 56. Полиса доживотног осигурања је издата особи старости 10 година са премијом која се плаћа доживотно на почетку године. Ако смрт наступи пре 15-те године живота, накнада је повраћај уплаћених нето премија са каматом, на крају године смрти. Ако смрт наступи након 15-те године живота, накнада је 1000. Одредити годишњу нето премију користећи таблице смртности и $i = 5\%$.

Решење. R

✓

Задатак 57. Одредити проценат z годишњих зарада које особа мора да сачува сваке године како би обезбедила пензију која износи 50% последње плате. Претпоставити да особа има 30 година, да у пензију иде са 65 година, да је зарада на уштеђевину 5% на годишњем нивоу, плата расте стопом $j = 6\%$ годишње, а смртност прати таблице. Нацртати график од z у односу на j од 3 до 7% са размаком 0.5%.

Решење. R

✓

Премија која се плаћа m пута годишње

Претпоставимо да се нето премија плаћају m пута годишње и да су износи који се плаћају једнаки. Нето премије доживотног, привременог са трајањем n година, за случај доживљења и мешовитог осигурања су, редом,

$$\begin{aligned} P^{(m)}(A_x) &= \frac{A_x}{\ddot{a}_x^{(m)}}, \\ P^{(m)}(A_{x:\overline{n}|}^1) &= \frac{A_{x:\overline{n}|}^1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}}, \\ P^{(m)}(A_{x:\overline{n}|}^{\frac{1}{2}}) &= \frac{A_{x:\overline{n}|}^{\frac{1}{2}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}}, \\ P^{(m)}(A_{x:\overline{n}|}) &= \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)}}. \end{aligned}$$

Задатак 58. Особа старости 30 година потписује полису доживотног осигурања које исплаћује износ 10000 првих 20 година, а 20000 након тога. Осигураник такође добија и повраћај премије са каматом у случају смрти у првих 20 година. Осигурана сума се исплаћује на крају године смрти, каматна стопа је 5%, а смртност прати таблице. Ако се периодична константна нето премија плаћа два пута годишње доживотно и смртност током године је линеарна функција, одредити њену вредност.

Решење. Износ који осигуравач треба да плати на крају године смрти је

$$(10000 + P \cdot \ddot{s}_{\overline{K+1}|}^{(2)})I\{K < 20\} + 20000I\{K \geq 20\}.$$

Губитак осигуравача у овом случају је

$$\begin{aligned} L &= (10000 + P \cdot \ddot{s}_{\overline{K+1}|}^{(2)})v^{K+1}I\{K < 20\} + 20000v^{K+1}I\{K \geq 20\} - P \cdot \ddot{a}_{\overline{K+1}|}^{(2)} \\ &= (10000v^{K+1} + P \cdot \ddot{a}_{\overline{K+1}|}^{(2)})I\{K < 20\} + 20000v^{K+1}I\{K \geq 20\} - P \cdot \ddot{a}_{\overline{K+1}|}^{(2)}. \end{aligned}$$

Нето премија се добија из

$$0 = 10000A_x + 10000_{20|}A_x + P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{20}|}^{(2)} - P \cdot \ddot{a}_x^{(2)} = 10000A_x + 10000_{20|}A_x + P \left(\ddot{a}_{x:\overline{20}|}^{(2)} - \ddot{a}_x^{(2)} \right).$$

Пошто је смртност током године је линеарна функција, користећи задатак 42. следи да је

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x^{(2)} &= \alpha(2)\ddot{a}_x - \beta(2), \\ \ddot{a}_{x:\overline{20}|}^{(2)} &= \alpha(2)\ddot{a}_{x:\overline{20}|} - \beta(2)(1 - {}_n p_x \cdot v^n), \end{aligned}$$

где је $\alpha(2) = \frac{i(1-v)}{2(1-v^{\frac{1}{2}})i^{(2)}}$ и $\beta(2) = \frac{i-i^{(2)}}{2(1-v^{\frac{1}{2}})i^{(2)}}$. Дакле,

$$P = \frac{10000A_x + 10000_{20|}A_x}{\ddot{a}_x^{(2)} - \ddot{a}_{x:20|}^{(2)}}.$$

Остатак решења је у R -у. ✓

Непрекидна уплата премија за непрекидно осигурање

Претпостављамо да је осигурана сума једнака 1 и да се исплаћује у тренутку смрти, а да је плаћање премије непрекидно. Оваква премија се често назива потпуно непрекидна или се каже да је осигурање потпуно непрекидно (како би се направила разлика са премијом која се плаћа дискретно а осигурање је непрекидно).

врста осигурања	садашња вредност осигуране суме	периодична нето премија
доживотно за случај смрти	$Z = v^T$	$\bar{P}_x = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}$
привремено са трајањем n година	$Z = v^T I\{T < n\}$	$\bar{P}_{x:\overline{n} }^1 = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n} }^1}{\bar{a}_{x:\overline{n} }}$
за случај доживљења са трајањем n година	$Z = v^n I\{T \geq n\}$	$\bar{P}_{x:\overline{n} }^1 = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n} }^1}{\bar{a}_{x:\overline{n} }}$
мешовито са трајањем n година	$Z = v^{K+1} I\{K < n\} + v^n I\{K \geq n\}$	$\bar{P}_{x:\overline{n} } = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n} }}{\bar{a}_{x:\overline{n} }}$

Задатак 59. Очекивање садашње вредности осигуране суме у износу 10000 дискретног доживотног осигурања је једнака 2000. Ако је каматна стопа 5% а вероватноћа преживљавања током године линеарна функција, одредити разлику између потпуно непрекидне премије доживотног осигурања и годишње нето премије доживотног осигурања осигурања које се исплаћује у тренутку смрти.

Решење. Нека је P потпуно непрекидна премија, а Q премија непрекидног осигурања која се плаћа дискретно. Треба одредити

$$P - Q = 10000\bar{P}(\bar{A}_x) - 10000P(\bar{A}_x) = 10000\frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x} - 10000\frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_x}.$$

Дато је да $10000A_x = 2000$. Пошто је вероватноћа смртности током године линеарна функција, односно ${}_uq_x = u \cdot q_x$, $0 < u < 1$, знамо да су K , целобројна дужина живота, и S , преостала дужина живота у години смрти, независне случајне величине и $S \in \mathcal{U}[0, 1)$ (задатак 42.), то следи

$$\begin{aligned}\bar{A}_x &= E(v^T) = E(v^{K+1}v^{S-1}) = E(v^{K+1})E(v^{S-1}) \\ &= A_x \int_0^1 v^{t-1} dt = A_x \left(\frac{1}{\ln v} - \frac{1}{v \ln v} \right) = A_x \frac{i}{\delta} = \frac{0.05}{\ln 1.05} \cdot 0.2 = 0.2049.\end{aligned}$$

Користећи везу између ренте и осигурања (за непрекидну варијанту видети 44. задатак), добија се

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x &= \frac{1 - A_x}{1 - v} = \frac{0.8 \cdot 1.05}{0.05} = 16.8 \\ \bar{a}_x &= \frac{1 - \bar{A}_x}{\delta} = \frac{1 - 0.2049}{\ln 1.05} = 16.2963\end{aligned}$$

Према томе

- $Q = 10000 \cdot \frac{0.2049}{16.8} = 122,$
- $P = 10000 \cdot \frac{0.2049}{16.2963} = 125.73.$

Односно $P - Q = 3.73.$

✓

Задатак 60. Десетогодишње привремено осигурање са потпуно непрекидним константним премијама издато особи старости x обезбеђује надокнаду од 1 у тренутку смрти плус повраћај свих премија које су плаћене акумулиране за камату. Каматна стопа која се користи за рачунање надокнаде је иста као за рачунање садашње вредности осигуравачевог губитка. Нека је G стопа годишње премије која се плаћа непрекидно.

- Одредити израз за осигуравачев губитак L .
- Одредити израз за дисперзију осигуравачевог губитка.
- Одредити израз за дисперзију осигуравачевог губитка ако је G одређено из принципа еквиваленције.

Решење. а) Износ који осигуравајућа компанија треба да исплати у тренутку смрти је $(1 + G \cdot \bar{s}_{\overline{T}|})I\{T < 10\}$. Садашња вредност те исплате је

$$v^T(1 + G \cdot \bar{s}_{\overline{T}|})I\{T < 10\} = (v^T + G \cdot \bar{a}_{\overline{T}|})I\{T < 10\}.$$

Према томе, губитак осигуравача је

$$L = \begin{cases} v^T, & T < 10, \\ -G \cdot \bar{a}_{\overline{10}|}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

б) Јасно је да

$$\begin{aligned} EL &= E(v^T I\{T < 10\} - G \cdot \bar{a}_{\overline{10}|} I\{T \geq 10\}) \\ &= E(v^T I\{T < 10\}) - G \cdot \bar{a}_{\overline{10}|} P\{T \geq 10\} \\ &= \bar{A}_{x:\overline{10}|}^1 - G \cdot \bar{a}_{\overline{10}|} \cdot {}_{10}p_x, \\ EL^2 &= E(v^T I\{T < 10\} - G \cdot \bar{a}_{\overline{10}|} I\{T \geq 10\})^2 \\ &= E(v^{2T} I\{T < 10\}) + (G \cdot \bar{a}_{\overline{10}|})^2 P\{T \geq 10\} \\ &= {}^2A_{x:\overline{10}|}^1 + G^2 \cdot (\bar{a}_{\overline{10}|})^2 \cdot {}_{10}p_x. \end{aligned}$$

Према томе

$$DL = {}^2A_{x:\overline{10}|}^1 + G^2 \cdot (\bar{a}_{\overline{10}|})^2 \cdot {}_{10}p_x - (\bar{A}_{x:\overline{10}|}^1 - G \cdot \bar{a}_{\overline{10}|} \cdot {}_{10}p_x)^2.$$

в) Принцип еквиваленције значи да је $EL = 0$, према томе

$$G = \frac{\bar{A}_{x:\overline{10}|}^1}{\bar{a}_{\overline{10}|} \cdot {}_{10}p_x}.$$

Заменом у израз из дела б) добија се $DL = {}^2A_{x:\overline{10}|}^1 + \frac{(\bar{A}_{x:\overline{10}|}^1)^2}{{}_{10}p_x}$.

✓

Задатак 61. Очекивање садашње вредности потпуно непрекидног привременог осигурања са трајањем n година, осигураном сумом 1, које је потписала особа старости x једнако је 0.4275. Ако је каматна стопа 5.5% и интензитет смртности константан са вредношћу 0.045 за свако $t \geq 0$, одредити вредност премије потпуно непрекидног мешовитог осигурања са трајањем n година, осигураном сумом 1000, које је уплатила особа старости x .

Решење. Познато је да $\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = 0.4275$, $\delta = 0.055$ и $\mu_{x+t} = \mu = 0.045, t \geq 0$. Треба одредити премије P за коју важи

$$P = 1000\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|}) = 1000 \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} = 1000 \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 + \bar{A}_{x:\overline{n}|}^{\cdot 1}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}} = 1000 \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 + v^n \cdot {}_n p_x}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}.$$

Приметимо да

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = \int_0^n \mu e^{-(\delta+\mu)t} dt = 0.045 \frac{1 - e^{-0.1n}}{0.1}.$$

Дакле, $0.45(1 - e^{-0.1n}) = 0.4275$, односно $e^{-0.1n} = 1 - \frac{0.4275}{0.45} = 0.05$. Према томе, користећи везу између осигурања и ренте,

$$P = 1000 \frac{0.4275 + e^{-\delta \cdot n} \cdot e^{-\mu \cdot n}}{\frac{1 - \bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\delta}} = 55 \frac{0.4275 + e^{-0.1n}}{\frac{1 - 0.4275 - 0.05}{0.055}} = 50.26.$$

✓

Нето премије са променљивим износом

Размотримо случај када се и осигурана сума и износ премија мењају.

потпуно дискретно осигурање:

- садашња вредност осигуране суме: $Z = c_{K+1}v^{K+1}$
- периодична нето премија се добија из израза:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_{k+1}v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \Pi_k v^k {}_k p_x,$$

где су $\Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_k$ годишње нето премије

потпуно непрекидно осигурање:

- садашња вредност осигуране суме: $Z = c(T)v^T$
- периодична нето премија се добија из израза:

$$\int_0^{+\infty} c(t)v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt = \int_0^{+\infty} \pi(t)v^t {}_t p_x dt,$$

где је $\pi(t), t \in (0, T)$ апсолутно непрекидна нето премија

Задатак 62. Користећи таблице смртности одредити годишњу нето премију доживотног осигурања издатог особи старости $x = 30$. Накнада у случају смрти је заштићена од инфлације: сваке године накнада за случај смрти и годишња премија расту за фактор $1 + j$, где је $j = 0.06$. Одредити премију за каматну стопу $i = 0.05, 0.06, 0.07, 0.08$. Нацртати график зависности полазне премије од i .

Решење. R

✓

Задатак 63. Особа старости 60 година потписује полису доживотног осигурања за које се премија плаћа у три једнака износа, у тренутку потписивања уговора, на почетку треће године и на почетку четврте године (ако је уговор још увек валидан у тим тренуцима). Осигурана сума од 1000 се плаћа на крају године смрти. У случају смрти осигураног лица током прве две године, на крају године смрти се додатно исплаћује и уплаћена премија (без камате). У случају смрти осигураног лица током треће или четврте године, на крају године смрти се додатно исплаћује и половина уплаћених премија до тог тренутка (без камате). Ако је каматна стопа 6%, одредити нето премију осигурања.

Решење. Премија се добија из израза

$$P + Pv^2{}_2p_x + Pv^3{}_3p_x = 1000A_x + Pvq_x + Pv^2{}_2p_xq_{x+1} + Pv^3{}_3p_xq_{x+2} + \frac{3}{2}Pv^4{}_4p_xq_{x+3}.$$

Остатак решења је у R -у.

✓

Резерва нето премије

Нето премија се добија тако да је очекивани губитак једнак нули у тренутку закључивања уговора. Међутим, та једнакост не важи у произвољном тренутку t . Нека је ${}_tL$ губитак осигураваача у тренутку $t < T$. Овај губитак је разлика између садашње вредности исплата које осигураваач треба да изврши и садашње вредности свих премија, у тренутку t ($t < T$, односно осигураник је још увек жив). **Резерва нето премије у тренутку t** је

$${}_tV = E({}_tL | T > t)$$

и представља износ које је потребан у тренутку t да би се покрио будући мањак. Полисе осигурања се обично формирају тако да је ${}_tV \geq 0$ како би осигураник имао мотив да настави осигурање.

Резерва нето премије дискретног осигурања

Претпоставимо да је осигурана сума у j -тој години једнака c_j , а износ премије који се уплати у j -тој години Π_j . Тада је резерва нето премије дискретног осигурања једнака

$${}_kV = \sum_{j=0}^{\infty} c_{k+j+1}v^{j+1} \cdot {}_j p_{x+k} \cdot q_{x+k+j} - \sum_{j=0}^{\infty} \Pi_{k+j} \cdot v^j \cdot {}_j p_{x+k}.$$

Такође, могуће је извести везу између резерви у две суседне године и важи да је

$${}_kV + \Pi_k = v(c_{k+1} \cdot q_{x+k} + {}_{k+1}V \cdot p_{x+k}).$$

Односно, збир резерве нето премије у тренутку k и износа премије који би требало уплатити у том тренутку једнак је садашњој вредности (у тренутку k) средстава потребних на крају k -те године.

Резерве код основних типова осигурања су дати у наставку:

Доживотно осигурање:

$${}_kV_x = A_{x+k} - P_x \ddot{a}_{x+k}$$

Привремено осигурање:

$${}_kV_x = \begin{cases} A_{x+k:\overline{n-k}|}^1 - P_{x:\overline{n}|}^1 \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}, & k = 0, 1, \dots, n-1 \\ 0, & k \geq n \end{cases}$$

Осигурање за случај доживљења:

$${}_kV_x = \begin{cases} -P_{x:\overline{n}|}^1 \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}, & k = 0, 1, \dots, n-1 \\ 1, & k = n \\ 0, & k \geq n \end{cases}$$

Мешовито осигурање:

$${}_kV_x = \begin{cases} A_{x+k:\overline{n-k}|} - P_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}, & k = 0, 1, \dots, n-1 \\ 0, & k \geq n \end{cases}$$

Задатак 64. Нека је резерва нето премије у 10—ој години трајања полисе доживотног осигурања које потписала особа старости 25 година једнака 0.1, а ако је особа старости 35 година онда је 0.2. Одредити резерву нето премије у 20—ој години трајања полисе доживотног осигурања које потписала особа старости 25 година.

Решење. Користећи везу између ренти и осигурања и (3), добија се

$$\begin{aligned} {}_{20}V_{25} &= A_{40} - P_{25}\ddot{a}_{45} = 1 - (P_{25} + 1 - v)\ddot{a}_{45} = 1 - \frac{\ddot{a}_{45}}{\ddot{a}_{25}} \\ &= 1 - \frac{\ddot{a}_{45}}{\ddot{a}_{35}} \frac{\ddot{a}_{35}}{\ddot{a}_{25}} = 1 - (1 - {}_{10}V_{25})(1 - {}_{10}V_{35}) = 1 - 0.9 \cdot 0.8 = 0.28. \end{aligned}$$

✓

Задатак 65. Ако је каматна стопа 0.06, а вероватноће смртности $q_x = 0.65$, $q_{x+1} = 0.85$ и $q_{x+2} = 1.00$, одредити резерву нето премије у првој години трајања полисе доживотног осигурања које је уплатила особа старости x година.

Решење. Треба одредити

$${}_1V_x = A_{x+1} - P_x \ddot{a}_{x+1}.$$

Користећи претходни задатак следи да је

$${}_1V_x = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+1}}{\ddot{a}_x},$$

где је

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x &= 1 + v \cdot \ddot{a}_{x+1} \cdot p_x, \\ \ddot{a}_{x+1} &= 1 + v \cdot \ddot{a}_{x+2} \cdot p_{x+1}. \end{aligned}$$

Како је

$$\ddot{a}_{x+2} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot {}_k p_{x+2} = 1 + v \cdot p_{x+2} = 1 + 0 = 1,$$

то следи $\ddot{a}_x = 1 + v \cdot (1 + v \cdot p_{x+1}) \cdot p_x = 1.3769$ и $\ddot{a}_{x+1} = 1.1415$. Дакле, ${}_1V_x = 0.1710$. ✓

Задатак 66. Користећи таблице смртности и каматну стопу 5%, одредити:

- резерву нето премије у 15-ој години двадесетогодишњег мешовитог осигурања са осигураном сумом 1000 која се исплаћује на крају године смрти а издато је особи старости 45 година,
- резерву нето премије у 15-ој години двадесетогодишњег привременог осигурања са осигураном сумом 1000 која се исплаћује на крају године смрти а издато је особи старости 45 година.

Решење. а) Приметимо да

$$\begin{aligned} 1000_{15}V_{45:\overline{20}|} &= 1000(A_{60:\overline{5}|} - P_{45:\overline{20}|} \cdot \ddot{a}_{60:\overline{5}|}) \\ &= 1000(1 - (P_{45:\overline{20}|} + 1 - v)\ddot{a}_{60:\overline{5}|}) \\ &= 1000 \left(1 - \frac{\ddot{a}_{60:\overline{5}|}}{\ddot{a}_{45:\overline{20}|}} \right). \end{aligned}$$

Остатак решења је у R -у.

б) Приметимо да

$$\begin{aligned} 1000_{15}V_{45:\overline{20}|}^1 &= 1000(A_{60:\overline{5}|}^1 - P_{45:\overline{20}|}^1 \cdot \ddot{a}_{60:\overline{5}|}) \\ &= 1000 \left(A_{60:\overline{5}|}^1 - \frac{A_{45:\overline{20}|}^1}{\ddot{a}_{45:\overline{20}|}} \cdot \ddot{a}_{60:\overline{5}|} \right). \end{aligned}$$

Остатак решења је у R -у.

✓

Задатак 67. Одредити вредност ${}_tV_{30}, t = \overline{0, 69}$, користећи таблице смртности и $i = 4\%$. Нацртати графика ${}_tV_{30}$ као функције од t , у односу на $i = 4\%, 6\%$ и 8% .

Решење. R

✓

Задатак 68. Потпуно дискретна 20 година одложена доживотна рента у износу 1 годишње издата је особи старости 35 година. Премије се плаћају једном годишње са константним износима у периоду од 20 година. Ако смртност прати таблице и каматна стопа је 5%, одредити нето резерву премија на крају 10-те године.

Решење. Из текста задатка, јасно је да

$$\begin{aligned} {}_{10}V_{35} &= {}_{10}|\ddot{a}_{45} - {}_{20}P_x \cdot \ddot{a}_{45:\overline{10}|} \\ &= {}_{10}p_{45}v^{10}\ddot{a}_{55} - \frac{{}_{20}|\ddot{a}_{35}}{\ddot{a}_{35:\overline{20}|}} \cdot \ddot{a}_{45:\overline{10}|} \\ &= {}_{10}p_{45}v^{10}\ddot{a}_{55} - \frac{{}_{20}p_{35}v^{20}\ddot{a}_{55}}{\ddot{a}_{35:\overline{20}|}} \cdot \ddot{a}_{45:\overline{10}|}. \end{aligned}$$

Остатак решења се налази у R -у.

✓

Задатак 69. Дати су следећи подаци за потпуно дискретно трогодишње мешовито осигурање издато особи старости x :

k	c_{k+1}	q_{x+k}
0	2	0.20
1	3	0.25
2	4	0.50

Константне годишње нето премије у износу 1 се плаћају на почетку сваке године док је особа жива. Осигурана сума мешовитог осигурања је једнака нето резерви премија за 3 године. Ефективна годишња каматна стопа је $i = \frac{1}{9}$. Одредити резерву на истеку полисе рекурзивно, ако је ${}_0V = 0$.

Решење. Према формули

$${}_kV_x = v(c_{k+1} \cdot q_{x+k} + {}_{k+1}V_x \cdot p_{x+k}) - \Pi_k,$$

где је $\Pi_k = 1$ за свако k . Према томе, како је $v = \frac{1}{1+i} = \frac{9}{10}$,

$$\begin{aligned} {}_{k+1}V_x &= \frac{1}{p_{x+k}} \left(\frac{{}_kV_x + 1}{v} - c_{k+1} \cdot q_{x+k} \right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{0.8} \left(\frac{10}{9} - 2 \cdot 0.2 \right) = 0.8889, & k = 0, \\ \frac{1}{0.75} \left(\frac{10}{9} (0.8889 + 1) - 3 \cdot 0.25 \right) = 1.7984, & k = 1, \\ \frac{1}{0.5} \left(\frac{10}{9} 2.7984 - 4 \cdot 0.5 \right) = 2.2187, & k = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Тражена резерва је 2.2187.

✓

Задатак 70. Потпуно дискретно доживотно осигурање са осигураном сумом 1500 и годишњим константним премијама издато је особи старости x . Познато је да је резерва нето премије на крају h -те године 205, а на крају $h-1$ -е 179. Ако је каматна стопа 5% и $\ddot{a}_x = 16.2$, одредити вероватноћу смртности особе у току $h-1$ -е године.

Решење. Према формули

$${}_{h-1}V_x + P_x = v(1500 \cdot q_{x+h-1} + {}_hV_x \cdot p_{x+h-1}) = v({}_hV_x + q_{x+h-1}(1500 - {}_hV_x)).$$

Како је

$$1500P_x = \frac{1500A_x}{\ddot{a}_x} = 1500 \frac{1 - (1-v) \cdot \ddot{a}_x}{\ddot{a}_x} = 21.15,$$

то

$$q_{x+h-1} = \frac{1}{1500 - {}_hV_x} \left(\frac{{}_{h-1}V_x + P_x}{v} - {}_hV_x \right) = \frac{1.05 \cdot 200.15 - 205}{1295} = 0.00398.$$

✓

Задатак 71. За 20-то годишње осигурање издато особи старости 70 година осигурана сума се исплаћује на крају године смрти и једнака је 1000 плус нето резерва у том тренутку. Ако смртност прати таблице и каматна стопа је 7% на годишњем нивоу, одредити једнократну нето премију осигурања.

Решење. Осигурана сума је $1000 + 1000{}_kV_{70}$. Пошто се премија исплаћује једнократно, резерва нето премије одмах након уплате премије је једнака самој премији. С обзиром да се премија уплаћује у тренутку потписивања уговора (нултом тренутку)

следи да је ${}_0V_{70} = P$. Такође, знамо да је ${}_{20}V_{70}$. Из рекурзивне формуле, за $k = 0$, следи

$${}_0V_{70} = v((1 + {}_1V_{70})q_{70} + {}_1V_{70} \cdot p_{70}) = v(q_{70} + {}_1V_{70}).$$

Односно

$${}_1V_{70} = \frac{1}{v}{}_0V_{70} - q_{70} = (1 + i)P - q_{70}.$$

Према томе

$$\begin{aligned} P &= v({}_1V_{70} + q_{70}) = v(v(q_{71} + {}_2V_{70}) + q_{70}) \\ &= v^2q_{71} + vq_{70} + v^2{}_2V_{70} = \dots = \sum_{k=0}^{19} v^{k+1}q_{70+k} + {}_{20}V_{70} = \sum_{k=0}^{19} v^{k+1}q_{70+k}. \end{aligned}$$

Остатак решења се налази у R -у. ✓

Задатак 72. Осигуравајућа компанија је закључила 1000 уговора доживотног осигурања исте врсте са особама старости 30 година. Осигурана сума је 2000 и исплаћује се на крају године смрти, док се премија плаћа периодично на годишњицу потписивања уговора. Износ премије је одређен из принципа еквиваленције са каматном стопом 5%, док смртност прати таблице. Осигуравајућа компанија овај портфолио реосигурава код компаније за реосигурање на следећи начин: премија за реосигурање се одређује сваке године у зависности од броја активних уговора а као осигурана сума се узима разлика између стварног осигураног износа и резерве на крају текуће године. Реосигуравач користи исте таблице смртности као и примарна осигуравајућа компанија. Одредити очекивану укупну премију коју је реосигуравач примио на крају пете године уговора о реосигурању.

Решење. Очекивани број осигурања у k -тој години је $1000{}_k p_{30}$. Још треба одредити премију уплаћену реосигуравачу у k -тој години. Премија осигураника за доживотно осигурање је једнака

$$P = \frac{2000A_{30}}{\ddot{a}_{30}}.$$

Резерва на крају k -те године је

$${}_kV_{30} = 2000A_{30+k} - P \cdot \ddot{a}_{30+k}.$$

Како је стварни осигурани износ заправо оно колико током те године треба исплатити осигурања, (једнократна) премија реосигурања у k -тој години је

$$\Pi_k = q_{30+k-1}(2000 - {}_kV_{30}) = q_{30+k-1}(2000(1 - A_{30+k}) + P\ddot{a}_{30+k}).$$

Остатак решења се налази у R -у. ✓

Задатак 73. Полиса доживотног осигурања од 1000 је издата 1. маја 1978. особи старости 60. Премија се плаћа периодично у износу 33. Познато је да је резерва нето премије у 10-ој години једнака 231.14. Ако је каматна стопа 6% и смртност током 70-те године живота 0.033, одредити приближну вредност резерве 31. децембра 1988. користећи претпоставку линеарности вероватноће смртности у току године.

Решење. Познато је да $i = 0.06\%$, $q_{70} = 0.033$, $1000_{10}V_{60} = 231.14$ и $1000P_{60} = 33$. По узору на рекурзивну формулу

$$\begin{aligned} {}_{k+u}V_x &= v^{1-u}(c_{k+1} \cdot {}_{1-u}q_{x+k+u} + {}_{k+1}V_x \cdot {}_{1-u}p_{x+k+u}) \\ &= v^{1-u}(c_{k+1} \cdot {}_{1-u}q_{x+k+u} + {}_{k+1}V_x \cdot (1 - {}_{1-u}q_{x+k+u})) \\ &= v^{1-u}((c_{k+1} - {}_{k+1}V_x) {}_{1-u}q_{x+k+u} + {}_{k+1}V_x) \end{aligned}$$

(премија је већ уплаћена у k -том тренутку и зато је нема са леве стране). Користећи линеарност вероватноће смртности, следи

$${}_{k+u}V_x = v^{1-u}((c_{k+1} - {}_{k+1}V_x) {}_{1-u}q_{x+k+u} + {}_{k+1}V_x).$$

Користећи особину линеарности следи

$$\begin{aligned} {}_{1-u}q_{x+k+u} &= P\{T(x+k) \leq 1 | T(x+k) > u\} = \frac{P\{u < T(x+k) \leq 1\}}{P\{T(x+k) > u\}} \\ &= \frac{q_{x+k} - u q_{x+k}}{1 - u q_{x+k}} = \frac{(1-u)q_{x+k}}{1 - u q_{x+k}} \end{aligned}$$

Треба одредити

$$1000 \cdot {}_{10+\frac{8}{12}}V_{60} = v^{\frac{4}{12}}((1000 - 1000_{11}V_{60}) {}_{\frac{4}{12}}q_{70+\frac{4}{12}} + 1000_{11}V_{60}).$$

Користећи рекурзивну формулу

$$1000_{11}V_{60} = \left(\frac{1}{v}(1000_{10}V_{60} + 1000P_{60}) - 1000q_{70} \right) \frac{1}{1 - q_{70}} = 255.42.$$

Такође,

$${}_{\frac{4}{12}}q_{70+\frac{4}{12}} = \frac{{}_{\frac{4}{12}}q_{70}}{1 - \frac{8}{12}q_{70}} = 0.011.$$

Према томе, заменом у горњи израз добија се

$$1000 \cdot {}_{10+\frac{8}{12}}V_{60} = 258.54.$$

✓

Премија осигурања у k -тој години се може изразити као

$$\Pi_k = \Pi_k^s + \Pi_k^r,$$

где је Π_k^s премија штедње, односно

$$\Pi_k^s = v \cdot {}_{k+1}V_x - {}_kV_x,$$

а Π_k^r ризико премија, односно

$$\Pi_k^r = v(c_{k+1} - {}_{k+1}V_x)q_{x+k}.$$

Задатак 74. Десетогодишње мешовито осигурање са осигураном сумом 1000 издато је особи старости 50 година. Премија се плаћа годишње током трајања осигурања. Одредити премију за штедњу и ризико премију. Користити таблице смртности и $i = 4\%$.

Решење. R

✓

У техничком смислу, резерве нето премија „припадају” осигуранику и могу се у принципу користити да помогну модификацију финансирања полисе осигурања у било ком тренутку. Једна могућност је да се преостале нето премије замене једнократном премијом која потиче од нето резерве (*paid-up insurance*). Ако особа која је имала x година у тренутку потписивања уговора доживотног осигурања жели да у тренутку k изврши такву промену, наведена једнократна премије је једнака резерви нето премије у k -тој години, а осигурана сума је

$$\frac{{}_kV_x}{A_{x+k}}.$$

Задатак 75. Полиса двадесетогодишњег потпуно дискретног мешовитог осигурања од 1000 је издата особи старости 35 година на основу таблица смртности и $i = 5\%$. Одредити осигурану суму редукованог *paid-up* осигурања доступног на крају 5-те године, а пред доспеће 6-те премије. Претпоставити да читава резерва је доступна за исплаћивање полисе.

Решење. Јасно је да је осигурана сума у наведеном тренутку

$$\frac{{}_5V_{35}}{A_{40:\overline{15}|}} = \frac{A_{40:\overline{15}|} - P_{35:\overline{20}|}\ddot{a}_{40:\overline{15}|}}{A_{40:\overline{15}|}} = 1 - \frac{P_{35:\overline{20}|}\ddot{a}_{40:\overline{15}|}}{A_{40:\overline{15}|}} = 1 - \frac{A_{35:\overline{20}|}\ddot{a}_{40:\overline{15}|}}{\ddot{a}_{35:\overline{20}|}A_{40:\overline{15}|}}.$$

остатак решења се налази у R -у.

✓

Расподела укупног губитка током трајања полисе

Нека је Λ_k губитак осигуравача настао током $(k+1)$ -године. Тада је

$$\Lambda_k = \begin{cases} 0, & K \leq k-1, \\ c_{k+1} \cdot v - ({}_kV + \Pi_k), & K = k, \\ {}_{k+1}V \cdot v - ({}_kV + \Pi_k), & K \geq k+1. \end{cases}$$

Може се показати да је очекивани губитак осигуравача у току k -те године једнак 0.

Укупан губитак осигуравача је дефинисан са $L = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_k v^k$. Одговарајућа дисперзија је

$$DL = \sum_{k=0}^{\infty} v^{2k} D\Lambda_k = \sum_{k=0}^{\infty} v^{2k+2} (c_{k+1} - {}_{k+1}V)^2 \cdot {}_{k+1}p_x \cdot q_{x+k}.$$

Задатак 76. Дати су следећи подаци за потпуно дискретно трогодишње мешовито осигурање издато особи старости x :

k	c_{k+1}	q_{x+k}
0	2	0.20
1	3	0.25
2	4	0.50

Константне годишње нето премије у износу 1 се плаћају на почетку сваке године док је особа жива. Осигурана сума мешовитог осигурања је једнака нето резерви премија за 3 године. Ефективна годишња каматна стопа је $i = \frac{1}{9}$. Израчунати дисперзију губитка осигуравача у првој години додељеног полиси из задатка 57.

Решење. Из задатка 69. знамо да је

$${}_{k+1}V_x = \begin{cases} 0.8889, & k = 0, \\ 1.7984, & k = 1, \\ 2.2187, & k = 2. \end{cases}$$

Према томе,

$$\Lambda_1 = \begin{cases} 0, & K = 0, \\ 3 \cdot \frac{9}{10} - (0.8889 + 1) = 0.811, & K = 1, \\ 1.7984 \cdot \frac{9}{10} - (0.8889 + 1) = -0.27044, & K \geq 2. \end{cases}$$

Користећи вероватноће из табеле, добија се да је закон расподеле губитка осигураваача у првој години

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} -0.27044 & 0 & 0.811 \\ 0.8 \cdot 0.75 & 0.2 & 0.8 \cdot 0.25 \end{pmatrix}.$$

С обзиром да је $E\Lambda_1 = 0$, тражена дисперзија је $D\Lambda_1 = 0.1754$. ✓

Резерва нето премије непрекидног осигурања

Претпоставимо да се и осигурана сума и премија мењају непрекидно, а да се осигурана сума исплаћује у тренутку смрти осигураног лица. Нека је $c(t)$ осигурана сума у тренутку t , а $\pi(t)$ износ премије који се уплаћује у тренутку t . Резерва нето премије у тренутку t је

$$V(t) = \int_t^\infty c(s)v^{s-t} {}_{s-t}p_{x+t} \mu_{x+s} ds - \int_t^\infty \pi(s)v^{s-t} {}_{s-t}p_{x+t} ds.$$

Ако је осигурана сума и/или премија фиксна наведени интеграл се свде на стандардна непрекидна осигурања, односно непрекидне ренте.

Задатак 77. Размотримо 10-годишњи уговор привременог животног осигурања закључен са особом старости 20 година према којем се осигурана сума у износу 1 исплаћује у тренутку смрти осигураног лица. Под претпоставком да се премије исплаћују непрекидно током трајања уговора, а смртност је прати де Моивров закон са старосном границом $\omega = 100$, одредите износ нето резерве у тренутку $t = 4$. Каматна стопа је 9%.

Решење. Резерва нето премије у тренутку t овог осигурања је

$$V(t) = \bar{A}_{20+t:\overline{10-t}|}^1 - \bar{P}(\bar{A}_{20:\overline{10}|}^1) \cdot \bar{a}_{20+t:\overline{10-t}|}.$$

Користећи податак да ако смртност прати де Моавров закон, онда заправо $T \in \mathcal{U}[0, 100 - x]$, следи

$$\begin{aligned} \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 &= \int_0^n e^{-\delta s} f(s) ds = \frac{1}{100 - x} \int_0^n e^{-\delta s} ds = \frac{1 - e^{-n\delta}}{(100 - x)\delta}, \\ \bar{a}_{x:\overline{n}|} &= \int_0^n e^{-\delta s} {}_s p_x ds = \int_0^n e^{-\delta s} \frac{100 - x - s}{100 - x} ds \\ &= \frac{\delta(100 - x) - 1 - e^{-\delta n}(\delta(100 - x - n) - 1)}{\delta^2(100 - x)}. \end{aligned}$$

Према томе

$$\begin{aligned}\bar{P}(\bar{A}_{20:\overline{10}|}^1) &= \frac{\bar{A}_{20:\overline{10}|}^1}{\bar{a}_{20:\overline{10}|}} = \frac{\frac{1-e^{-10\delta}}{80\delta}}{\frac{80\delta-1-e^{-10\delta}(70\delta-1)}{80\delta^2}} = \frac{(1-e^{-10\delta})\delta}{80\delta-1-e^{-10\delta}(70\delta-1)} = 0.0132, \\ \bar{A}_{20+t:\overline{10-t}|}^1 &= \frac{1-e^{-(10-t)\delta}}{(80-t)\delta}, \\ \bar{a}_{20+t:\overline{10-t}|} &= \frac{\delta(80-t)-1-e^{-\delta(10-t)}(70\delta-1)}{\delta^2(80-t)}.\end{aligned}$$

Заменом у горњу формулу добија се

$$V(4) = \frac{1-e^{-6\delta}}{76\delta} - 0.0132 \frac{76\delta-1-e^{-6\delta}(70\delta-1)}{76\delta^2} = 0.002.$$

✓

Вишеструки декремент

Модел вишеструког декремента је уопштење стандардног модела смртности, код кога до истека уговора о осигурању долази због више различитих случајних догађаја. Престанак уговора се зове **декремент**.

Узрок декремента је дискретна случајна величина J , $J \in \{1, 2, \dots, m\}$. Претпостављаћемо да су узроци декремента међусобно независни. Случајна величина T се назива преостало време до истека. Можемо одредити следће вероватноће:

$f_j(t)dt = P\{t < T < t+dt, J = j\}$, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ заједничка расподела за T и J ,

$P\{J = j|T = t\} = \frac{f_j(t)}{f(t)}$ условна вероватноћа за узрок декремента j ,

${}_tq_{j,x} = P\{T < t, J = j\} = \int_0^t f_j(y)dy$ вероватноћа да до декремента дође због узрока j и до тренутка t ,

${}_tq_{j,x+s} = P\{T < t+s, J = j|T \geq s\} = \frac{\int_s^{s+t} f_j(y)dy}{1-F(s)}$ вероватноћа да до декремента дође до тренутка $t+s$, под условом да до декремента није дошло до тренутка s ,

${}_\infty q_{j,x} = \int_0^\infty f_j(y)dy$ вероватноћа да до декремента због узрока j дође било када у будућности (маргинална расподела).

Као и раније, овом случају такође важи

$${}_tq_x = P\{T < t\} = F(t) = \int_0^t f(y)dy, \quad {}_tp_x = P\{T \geq t\} = 1 - {}_tq_x$$

Стопа декремента у тренутку $x+t$ за особу старости x због узрока j је одређена са

$$\mu_{j,x+t} = \frac{f_j(t)}{1-F(t)} = \frac{f_j(t)}{{}_tp_x}.$$

Такође, $\mu_{x+t} = \mu_{1,x+t} + \mu_{2,x+t} + \dots + \mu_{m,x+t}$ и

$$\mu_{x+t} = -\frac{d}{dt} \ln {}_tp_x.$$

Према томе

$$\begin{aligned} {}_t p_x &= e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds}, \\ f_j(t) dt &= P\{t < T \leq t + dt, J = j\} = {}_t p_x \cdot \mu_{j,x+t} dt, \\ P\{J = j | T = t\} &= \frac{\mu_{j,x+t}}{\mu_{x+t}}. \end{aligned}$$

Расподела целобројног преосталог време до истека се добија из

$$P\{K = k, J = j\} = {}_k p_x \cdot q_{j,x+k}, \quad j \in \{1, 2, \dots, m\}, k \in \mathbb{N},$$

где је

$$\begin{aligned} q_{j,x+k} &= P\{T < k + 1, J = j | T \geq k\}, \\ {}_k p_x &= (1 - q_x)(1 - q_{x+1}) \cdots (1 - q_{x+k-1}). \end{aligned}$$

Расподеле (T, J) и (K, S, J) се могу повезати на исти начин као и раније уз увођење додатних претпоставки.

Задатак 78. Ако је стопа декремента због узрока j једнака $\frac{j}{150}$, $j = 1, 2, 3$, и $t > 0$. Одредити очекивано преостало време до истека, ако је познато да је дошло до трећег узрока декремента.

Решење. Траба одредити $E(T|J = 3)$. Да би се одредило условно очекивање, прво ћемо одредити условну расподелу, односно

$$P\{T \leq t | J = 3\} = \frac{P\{T \leq t, J = 3\}}{P\{J = 3\}}.$$

Како су интензитети константни у односу на T , то је

$$P\{J = 3\} = \frac{\mu_{3,x+t}}{\mu_{x+t}}.$$

Пошто је

$$\mu_{x+t} = \mu_{1,x+t} + \mu_{2,x+t} + \mu_{3,x+t} = \frac{1}{25},$$

то следи

$$P\{J = 3\} = \frac{1}{2}.$$

Са друге стране,

$$P\{T \leq t, J = 3\} = {}_t q_{3,x} = \int_0^t f_3(y) dy,$$

где је

$$f_3(t) = \mu_{3,x+t} \cdot {}_t p_x = \mu_{3,x+t} e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds} = \frac{3}{150} e^{-\frac{t}{25}}.$$

Према томе

$$P\{T \leq t, J = 3\} = \frac{1}{2} (1 - e^{-\frac{t}{25}}).$$

Заменом у полазну формулу, добија се

$$P\{T \leq t | J = 3\} = 1 - e^{-\frac{t}{25}},$$

односно $T | J = 3 \in \mathcal{E}(\frac{1}{25})$. Према томе $\implies E(T | J = 3) = 25$. ✓

Задатак 79. Дата је табела

x	$q_{1,x}$	$q_{2,x}$
25	0.01	0.15
26	0.02	0.10

а) За групу од 10000 људи старости $x = 25$ година одредити очекивани број људи који су преживели једну годину и доживели декремент због узрока $j = 1$ у следећој години.

б) Одредити утицај на резултат из а) ако је $q_{2,25} = 0.25$.

Решење. а) Тражено очекивање је

$$\begin{aligned} 10000P\{K(25) = 1, J = 1\} &= 10000 \cdot p_{25} \cdot q_{1,26} \\ &= 10000 \cdot (1 - q_{25}) \cdot q_{1,26} \\ &= 10000 \cdot (1 - q_{1,25} - q_{2,25}) \cdot q_{1,26} \\ &= 10000 \cdot 0.84 \cdot 0.02 = 168. \end{aligned}$$

б) Ново очекивање, према истој формули, је

$$10000(1 - 0.01 - 0.25) \cdot 0.02 = 148.$$

✓

Задатак 80. У моделу двоструког декремента важи $\mu_{1,x+0.5} = 0.02$, $q_{2,x} = 0.01$ и вероватноћа да до сваког од узрока декремента дође у току године је линеарна функција. Одредити $q_{1,x}$.

Решење. Из претпоставке о линеарности вероватноће да до узрока j декремента дође у току године важи

$${}_u q_{j,x+k} = u \cdot q_{j,x+k}, \quad j \in \{1, \dots, m\}, 0 < u < 1.$$

Према томе

$$\mu_{j,x+k+u} = \frac{f_j(k+u)}{k+u p_x}.$$

Како је $T = K + S$, где су K и S независне случајне величине и $S \in \mathcal{U}[0, 1)$, то следи

$$\begin{aligned} P\{t < T < t + s, J = j\} &= P\{K = k, u < S < u + s, J = j\} \\ &= P\{K = k, J = j\} P\{u < S < u + s | K = k, J = j\} \\ &= {}_k p_x \cdot q_{j,x+k} \cdot s. \end{aligned}$$

Односно $f_j(k+u) = {}_k p_x \cdot q_{j,x+k}$. користећи добијено следи

$$\mu_{1,x+0.5} = \frac{q_{1,x}}{0.5 p_x} = \frac{q_{1,x}}{1 - 0.5 \cdot q_x}.$$

Знамо да је $q_x = q_{1,x} + q_{2,x}$, односно

$$q_x = (1 - 0.5 q_x) \mu_{1,x+0.5} + q_{2,x}.$$

Резавањем израза добија се $q_x = \frac{0.02+0.01}{1.01} = 0.0297$. Односно, тражена вероватноћа је $q_{1,x} = q_x - q_{2,x} = 0.0197$. ✓

Општи тип осигурања

Све до сада размотрене врсте осигурања се могу уопштити за модел вишеструког декремента. У општем случају важи

дискретно осигурање: ако је $c_{j,k}$ вредност осигуране суме у j -тој години ако је до декремента дошло због узрока j , садашња вредност осигуране суме је $Z = c_{j,K+1} \cdot v^{K+1}$, а одноварајућа једнократна нето премија

$$EZ = \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{\infty} c_{j,k+1} \cdot v^{k+1} \cdot {}_k p_x \cdot q_{j,x+k},$$

непрекидно осигурање: ако је $c_j(t)$ вредност осигуране суме у тренутку t ако је до декремента дошло због узрока j , садашња вредност осигуране суме је $Z = c_j(T) \cdot v^T$, а одноварајућа једнократна нето премија

$$EZ = \sum_{j=1}^m \int_0^{\infty} c_j(t) \cdot v^t \cdot f_j(t) dt.$$

Задатак 81. Полиса животног осигурања обезбеђује да у случају смрти услед незгоде у јавном превозу буде исплаћено 3000, ако смрт наступи услед других незгода исплаћује се 2000, а у случају смрти услед неких других узрока исплаћује се 1000. Ако је, за свако $t \geq 0$, $\mu_{1,x+t} = 0.01$ стопа декремента због незгода у јавном превозу, $\mu_{2,x+t} = 0.03$ стопа декремента због других незгода, $\mu_{3,x+t} = 0.03$ стопа декремента због других разлога и $\delta = 0.03$. Одредити годишњу нето премију за особу која има x година претпостављајући да се премија плаћа непрекидно и исплата осигуране суме се врши у тренутку смрти.

Решење. Знамо да је

$$\mu_{x+t} = \mu_{1,x+t} + \mu_{2,x+t} + \mu_{3,x+t} = 0.07,$$

односно

$${}_t p_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds} = e^{-0.07t}.$$

Очекивање садашње вредности осигуране суме је

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \int_0^{\infty} c_j \cdot v^s \cdot {}_s p_{x+t} \cdot \mu_{j,x+s} ds &= \int_0^{\infty} 3000 \cdot e^{-\delta s} \cdot e^{-0.07s} \cdot \mu_{1,x+t} ds \\ &+ \int_0^{\infty} 2000 \cdot e^{-\delta s} \cdot e^{-0.07s} \cdot \mu_{2,x+t} ds \\ &+ \int_0^{\infty} 1000 \cdot e^{-\delta s} \cdot e^{-0.07s} \cdot \mu_{3,x+t} ds \\ &= 120 \int_0^{\infty} e^{-0.1s} ds = 1200, \end{aligned}$$

док је садашња вредност уплата $P_x \bar{a}_x = P_x \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \cdot {}_t p_x dt = 10P_x$. Према томе,

$$P_x = \frac{1200}{\bar{a}_x} = 120.$$

✓

Задатак 82. Полиса двогодишњег осигурања за особу старости x година обезбеђује добит у износу 2 ако смрт наступи услед несреће и 1 ако смрт наступи на други начин. Осигурана сума се исплаћује у тренутку смрти. Ако је, за свако $t \geq 0$, $\mu_{1,x+t} = \frac{t}{20}$ стопа декремента због незгоде, $\mu_{2,x+t} = \frac{t}{10}$ стопа декремента због других разлога и $\delta = 0$, одредити једнократну нето премију.

Решење. Како је $\delta = 0$, то $v = 1$. Такође,

$$\mu_{x+t} = \mu_{1,x+t} + \mu_{2,x+t} = \frac{3t}{20}.$$

Једнократна нето премија је

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \int_0^2 c_j \cdot v^s \cdot {}_s p_{x+t} \cdot \mu_{j,x+t+s} ds &= 2 \int_0^2 e^{-\int_0^s \mu_{x+t} dt} \cdot \mu_{1,x+s} ds + \int_0^2 e^{-\int_0^s \mu_{x+t} dt} \cdot \mu_{2,x+s} ds \\ &= 2 \int_0^2 e^{-\int_0^s \frac{3t}{20} ds} \cdot \frac{s}{20} ds + \int_0^2 e^{-\int_0^s \frac{3t}{20} ds} \cdot \frac{s}{10} ds \\ &= \frac{4}{3} (1 - e^{-\frac{3}{10}}) = 0.34558. \end{aligned}$$

✓

Задатак 83. Модел вишеструког декремента има два узрока: несрећа и други узрок. Потпуно непрекидно доживотно осигурање издато особи старости x исплаћује износ c_1 ако смрт наступи услед незгоде и c_2 ако смрт наступи услед другог узрока. Стопа првог декремента је позитивна константа μ_1 . Показати да су нето годишње премије за ово осигурање $c_2 \bar{P}_x + (c_1 - c_2) \mu_1$, где је $\bar{P}_x$ периодична нето премија потпуно непрекидног доживотног осигурања.

Решење. Очекивање садашње вредности осигурања је

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} c_1 v^s {}_s p_x \mu_{1,x+s} ds + \int_0^{\infty} c_2 v^s {}_s p_x \mu_{2,x+s} ds &= c_1 \mu_1 \int_0^{\infty} v^s {}_s p_x ds + c_2 \int_0^{\infty} v^s {}_s p_x (\mu_{x+s} - \mu_{1,x+s}) ds \\ &= c_1 \mu_1 \bar{a}_x + c_2 \bar{A}_x - c_2 \mu_1 \bar{a}_x \end{aligned}$$

Периодична нето премија је

$$\frac{c_1 \mu_1 \bar{a}_x + c_2 \bar{A}_x - c_2 \mu_1 \bar{a}_x}{\bar{a}_x} = c_2 \bar{P}_x + (c_1 - c_2) \mu_1.$$

✓

Модел осигурања више особа

Претпостављамо да се на основу једног уговора осигурава више особа. У том случају мора се прецизно дефинисати када се прекида уговор (смрћу једног осигураног лица, неколико њих или свих осигураника из групе).

Преживљавање под унапред одређеним условима се зове **статус интереса** и мора се прецизно дефинисати.

Претпоставимо да је уговором обухваћено m осигураника са почетним годинама $x_1, x_2, \dots, x_m$ и преосталим дужинама живота $T_1, T_2, \dots, T_m$. Размотрићемо два статуса интереса:

- статус заједничког доживљења,
- статус последњег преживелог.

Статус заједничког доживљења

Статус заједничког доживљења $u = x_1 : x_2 : \dots : x_m$ постоји док је свих m особа из групе живо. **Преостало време до окончања статуса** заједничког доживљења је

$$T(u) = \min\{T_1, \dots, T_m\}.$$

Претпоставимо да су $T_1, \dots, T_m$ независне случајне величине. Вероватноћа опстанка статуса је

$${}_t p_{x_1:x_2:\dots:x_m} = {}_t p_{x_1} {}_t p_{x_2} \cdots {}_t p_{x_m},$$

а вероватноћа окончања статуса је

$${}_t q_{x_1:x_2:\dots:x_m} = 1 - {}_t p_{x_1:x_2:\dots:x_m}.$$

Тренутна стопа окончања статуса се може одредити по формули

$$\mu_{u+t} = -\frac{d}{dt} \ln {}_t p_u = -\frac{d}{dt} \ln {}_t p_{x_1} {}_t p_{x_2} \cdots {}_t p_{x_m} = \sum_{k=1}^m \mu_{x_k+t}.$$

Задатак 84. У одређеној популацији пушач има стопу смртности два пута већу од непушача. За непушача функција преживљавања је $s(x) = 1 - \frac{x}{75}$, $0 \leq x \leq 75$. Одредити очекивану вредност у статусу заједничког доживљења за пушача старости 55 година и не пушача старости 65 година чији су животи независни.

Решење. Треба одредити

$${}_t e_{55:65} = \int_0^{10} {}_t p_{55:65} dt.$$

Вероватноћа преживљавања за непушача је

$${}_t p_x = \frac{75 - x - t}{75 - x}, \quad 0 \leq t \leq 75 - x,$$

а интензитет смртности пушача је $\mu'_{x+t} = 2\mu_{x+t}$. Према томе, вероватноћа преживљавања пушача је

$${}_t p'_x = e^{-\int_0^t \mu'_{x+s} ds} = e^{-2 \int_0^t \mu_{x+s} ds} = ({}_t p_x)^2.$$

Тражено очекивање је

$$\begin{aligned}\dot{e}_{55:65} &= \int_0^{10} {}_t p_{55:65} dt = \int_0^{10} {}_t p'_{55} {}_t p_{65} dt = \int_0^{10} ({}_t p_{55})^2 {}_t p_{65} dt \\ &= \int_0^{10} \left(\frac{20-t}{20} \right)^2 \frac{10-t}{10} dt = 3.54167.\end{aligned}$$

✓

У случају када је уговор потписан са статусом заједничког доживљења, нето премија дискретног доживотног осигурања се може одредити по формули

$$A_{x_1:x_2:\dots:x_m} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \cdot {}_k p_{x_1:x_2:\dots:x_m} \cdot q_{x_1:x_2:\dots:x_m+k},$$

док нето премија дискретне доживотне ренте се рачуна по формули

$$\ddot{a}_{x_1:x_2:\dots:x_m} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot {}_k p_{x_1:x_2:\dots:x_m}.$$

Слично као раније, важи веза између осигурања и ренте

$$A_{x_1:x_2:\dots:x_m} = 1 - (1-v) \cdot \ddot{a}_{x_1:x_2:\dots:x_m}.$$

Аналогно се разматрају и остале врсте осигурања.

Статус последњег преживелог

Статус последњег преживелог $u = \overline{x_1 : x_2 : \dots : x_m}$ постоји док је бар једна особа из групе жива. **Преостало време до окончања статуса заједничког доживљења** је

$$T(u) = \max\{T_1, \dots, T_m\}.$$

Претпоставимо да су $T_1, \dots, T_m$ независне случајне величине. Вероватноћа прекида статуса је

$${}_t q_{\overline{x_1:x_2:\dots:x_m}} = {}_t q_{x_1} {}_t q_{x_2} \cdots {}_t q_{x_m},$$

док је вероватноћа опстанка статуса

$${}_t p_{\overline{x_1:x_2:\dots:x_m}} = 1 - {}_t q_{\overline{x_1:x_2:\dots:x_m}}.$$

У случају када је уговор потписан са статусом заједничког доживљења, Ннто премија дискретног доживотног осигурања се може одредити по формули

$$A_{\overline{x_1:x_2:\dots:x_m}} = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq m} A_{x_1:x_2:\dots:x_m},$$

а нето премија доживотне ренте је

$$a_{\overline{x_1:x_2:\dots:x_m}} = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq m} a_{x_1:x_2:\dots:x_m}.$$

Задатак 85. Полиса потпуно непрекидног осигурања је издата особама старости x и y година. Када наступи друга по реду смрт исплаћује се 10000. Премија се плаћа непрекидно до друге по реду смрти и то у износу c док је особа која је имала x година у тренутку потписивања уговора жива и смањује се на $0.5c$ након смрти те особе ако она прва премине. Износ премије се одређује из принципа еквиваленције. Ако је каматна стопа 5%, вредност непрекидне ренте за особу старости x 12, за особу старости y 15 и вредност ренте у статусту заједничког доживљења 10, одредити c .

Решење. Знамо да је $\bar{a}_x = 12$, $\bar{a}_y = 15$ и $\bar{a}_{x:y} = 10$. Такође,

$$10000\bar{A}_{x:y} = c\bar{a}_x + 0.5c(\bar{a}_y - \bar{a}_{x:y}).$$

Према томе,

$$\begin{aligned} c &= \frac{10000\bar{A}_{x:y}}{\bar{a}_x + 0.5(\bar{a}_y - \bar{a}_{x:y})} = \frac{10000(1 - \delta \cdot \bar{a}_{x:y})}{\bar{a}_x + 0.5(\bar{a}_y - \bar{a}_{x:y})} \\ &= \frac{10000(1 - \delta(\bar{a}_x + \bar{a}_y - \bar{a}_{x:y}))}{\bar{a}_x + 0.5(\bar{a}_y - \bar{a}_{x:y})} = 103.448. \end{aligned}$$

✓

Задатак 86. Потпуно дискретно осигурање са статусом последњег преживелог са осигураном сумом 1 издато је двома особама чија су времена преживљавања независна и имају 35 година. Годишња нето премија се плаћа до прве смрти. Ако је каматан стопа 5% и смртност прати таблице, одредити годишњу нето премију.

Решење. Из текста задатка закључујемо да је

$$A_{\overline{x:x}} = P \cdot \ddot{a}_{x:x}.$$

Са друге стране

$$A_{\overline{x:x}} = 2A_x - A_{x:x}.$$

Према томе

$$P = \frac{A_{\overline{x:x}}}{\ddot{a}_{x:x}} = \frac{2A_x - A_{x:x}}{\ddot{a}_{x:x}}.$$

Остатак решења се налази у R -у.

✓

Задатак 87. Непрекидно доживотно осигурање издато особама старости x и y година са статусом последњег преживелог исплаћује осигурану суму у износу 1. Додатно, ако особа која је у тренутку потписивања уговора имала x година умре пре особе која је у тренутку потписивања уговора имала y година, исплаћује се 0.5 у тренутку смрти. Ако је познато да је интензитет смртности $\mu_{z+t} = Bc^{z+t}$, $t \geq 0$, показати да је једнократна нето премија осигурања $\bar{A}_x + \bar{A}_y - \bar{A}_{x:y}(1 - 0.5c^{x-\omega})$, где је $c^\omega = c^x + c^y$.

Решење. једнократна нето премија је

$$\begin{aligned} P &= \bar{A}_{x:y} + 0.5\bar{A}_{x:y}^1 \\ &= \bar{A}_x + \bar{A}_y - \bar{A}_{x:y} + 0.5 \int_0^\infty v^t \cdot {}_t p_{x:y} \cdot \mu_{x+t} dt. \end{aligned}$$

Како је

$$\mu_{x+t:y+t} = \mu_{x+t} + \mu_{y+t} = B(c^{x+t} + c^{y+t}),$$

то следи

$$\mu_{x+t} = \frac{\mu_{x+t:y+t}}{c^{x+t} + c^{y+t}} c^{x+t}.$$

Према томе

$$\begin{aligned} P &= \bar{A}_x + \bar{A}_y - \bar{A}_{x:y} + 0.5 \int_0^\infty v^t \cdot {}_t p_{x:y} \cdot \frac{\mu_{x+t:y+t}}{c^x + c^y} c^x dt \\ &= \bar{A}_x + \bar{A}_y - \bar{A}_{x:y} + 0.5 \frac{c^{x+t}}{c^{x+t} + c^{y+t}} \bar{A}_{x:y}. \end{aligned}$$

Одакле следи тврђење. ✓

Задатак 88. Користећи таблице смртности и $i = 5\%$, одредити ануитет заједничког доживљења ($a_{x:y}$) и ануитет последњег преживелог ($a_{\overline{x}:y}$) за независне животе $x = 65$ и $y = 60$.

Решење. R ✓

Несиметрични статус

Претпоставимо да је уговором обухваћено m осигураника са почетним годинама $x_1, x_2, \dots, x_m$ и независним преосталим дужинама живота $T_1, T_2, \dots, T_m$. Статус заједничког доживљења траје док су све особе живе. Међутим, статус заједничког доживљења може да се дефинише тако да постоји док одређени осигураник не премине као прва (уколико нека друга особа премине као прва статус се окончава) или док одређени осигураник не премине као r -ти по реду (у свим осталим опцијама статус се окончава).

Задатак 89. Таблица смртности

x	q_x
80	0.5
81	0.75
82	1

уз претпоставку да је вероватноћа смртности у разломљеним деловима године линеарна функција, примењује се на сваки од два независна живота. Одредити вероватноћу опстанка током годину дана за две особе старости 80 и 81 годину

- а) са статусом заједничког доживљења,
- б) са статусом последњег преживелог,
- в) са статусом заједничког доживљења ако особа старости 80 година прва премине,
- г) са статусом заједничког доживљења ако особа старости 81 година друга премине.

Решење.

а) $q_{80:81} = 1 - p_{80:81} = 1 - p_{80} \cdot p_{81} = 1 - 0.5 \cdot 0.25 = 0.875$

б) $q_{\overline{80:81}} = q_{80} \cdot q_{81} = 0.75$

в) Из ${}_uq_x = u \cdot q_x$ следи да је

$$\mu_{80+t} = \frac{q_{80}}{1 - t \cdot q_{80}} = \frac{0.5}{1 - 0.5t}.$$

Према томе

$$\begin{aligned} q_{80:81}^1 &= P\{T_{80} < 1, T_{80} < T_{81}\} = \int_0^1 P\{T_{81} > t\} f_{80}(t) dt \\ &= \int_0^1 {}_tp_{81} \cdot {}_tp_{80} \mu_{80+t} dt = \int_0^1 (1 - 0.5t) \cdot (1 - 0.75t) \cdot \frac{0.5}{1 - 0.5t} dt \\ &= 0.5 \int_0^1 (1 - 0.75t) dt = 0.3125. \end{aligned}$$

г) Слично као у претходном случају следи

$$\begin{aligned} q_{80:81}^2 &= P\{T_{80} < T_{81} < 1\} = \int_0^1 P\{T_{80} < t\} \cdot f_{81}(t) dt \\ &= \int_0^1 {}_tq_{80} \cdot {}_tp_{81} \cdot \mu_{81+t} dt = \int_0^1 0.5t \cdot (1 - 0.75t) \cdot \frac{0.75}{1 - 0.75t} dt \\ &= 0.75 \cdot 0.5 \int_0^1 t dt = 0.1875. \end{aligned}$$

✓

Задатак 90. Мушкарци у одређеној популацији имају стопу смртности $\mu = 0.04$, док је расподела преживљавања жена униформна на интервалу $(0, 100)$. Одредити вероватноћу да мушка особа која има 50 година премине после женске особе која има 50 година.

Решење. Тражена вероватноћа одговара статусу заједничког доживљења код којег женска особа треба прва да премине. Приметимо да

$$P\{T_z < T_m\} = \int_0^{50} P\{T_m > t\} f_F(t) dt = \int_0^{50} {}_tp_x^M \frac{1}{50} dt = \frac{1}{50} \int_0^{50} e^{-\mu_{x+t}^M t} dt = 0.432.$$

✓

Опште осигурање са статусом заједничког доживљења обезбеђује износ $c_j(t)$ ако особа j умре прва у тренутку t . Нето премија оваквог осигурања је

$$\sum_{j=1}^m \int_0^\infty c_j(t) \cdot v^t \cdot {}_tp_{x_1:x_2:\dots:x_m} \cdot \mu_{x_j+t} dt.$$

Ако је $c_k(t) = 1$ и $c_j(t) = 0$ за $j \neq k$, односно исплаћује се једна јединица ако k -та особа премине прва а у супротном се не исплаћује ништа, нето премија је

$$\overline{A}_{x_1:\dots:x_{k-1}:x_k:x_{k+1}:\dots:x_m}^1 = \int_0^\infty v^t \cdot {}_tp_{x_1:x_2:\dots:x_m} \mu_{x_k+t} dt.$$

Задатак 91. Нека је Z садашња вредност осигурања два лица старости x и y година дефинисано са

$$Z = \begin{cases} v^{T(y)}, & T(y) > T(x) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Особа које је у тренутку потписивања уговора имала x година има константну стопу смртности 0.07, док особа која је у тренутку потписивања уговора имала y година има константну стопу смртности 0.09. Каматна стопа је $\delta = 0.06$. Одредити DZ .

Решење. Како је

$$\begin{aligned} EZ &= E(v^{T(y)} I\{T(y) > T(x)\}) = \int_0^\infty v^t P\{T(x) < t\} f(t) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-0.06t} (1 - e^{-0.07t}) 0.09 e^{-0.09t} dt = \frac{0.09}{0.22} = 0.19, \\ EZ^2 &= E(v^{2T(y)} I\{T(y) > T(x)\}) = \int_0^\infty v^{2t} P\{T(x) < t\} f(t) dt = 0.11, \end{aligned}$$

Следи $DZ = EZ^2 - (EZ)^2 = 0.07$.

✓