

1 Неодређеност и информација

1. Баца се фер новчић до прве појаве писма. Нека је X случајна величина која представља број потребних бацања. Наћи неодређеност случајне величине X .
2. Показати да за дискретну случајну величину X важи неједнакост $H(g(X)) \leq H(X)$, где је g произвољна неслучајна функција.
3. Струјно коло чине 22 сијалице. Ако једна прегори, остале не могу да сијају, јер је електрично коло прекинуто. На располагању имамо омметар којим можемо да измеримо отпор између сваке две тачке у струјном колу. Колики је минималан број мерења да би пронашли прегорену сијалицу?
4. Од 27 новчића 1 је фаличан и нешто лакши од осталих. На располагању имамо вагу за мерење са два таса. Колико мерења је потребно да се одреди фаличан новчић?
5. Од 27 новчића 1 је фаличан, нешто лакши или тежи од осталих. На располагању имамо вагу за мерење са два таса. Колико мерења је потребно да се одреди који новчић је фаличан, као и да ли је тежи или лакши од осталих?
6. Дата је заједничка расподела

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
1	0	$\frac{1}{3}$

Наћи $H(X)$, $H(Y)$, $H(X|Y)$, $H(Y|X)$, $H(X, Y)$ и $I(X; Y)$ и представити их Веновим дијаграмом.

7. Нека су X_1 и X_2 дискретне случајне величине, које узимају различите вредности и X случајна величина дефинисана као

$$X = \begin{cases} X_1, & \text{са вероватноћом } \alpha \\ X_2, & \text{са вероватноћом } 1 - \alpha \end{cases}$$

Наћи ентропију $H(X)$ у функцији од $H(X_1)$, $H(X_2)$ и α .

8. Показати да је неодређеност расподеле вероватноће $(p_1, \dots, p_i, \dots, p_j, \dots, p_m)$ мања од неодређености расподеле $(p_1, \dots, \frac{p_i + p_j}{2}, \dots, \frac{p_i + p_j}{2}, \dots, p_m)$.

9. Показати да за случајне величине X , Y и Z важе следеће неједнакости и наћи услове при којима важе једнакости.
- $H(X, Y|Z) \geq H(X|Z)$
 - $I(X, Y; Z) \geq I(X; Z)$
 - $H(X, Y, Z) - H(X, Y) \leq H(X, Z) - H(X)$
 - $I(X; Z|Y) \geq I(Z; Y|X) - I(Z; Y) + I(X; Z)$
10. Наћи пример случајних величина X , Y и Z тако да важи
- $I(X; Y|Z) < I(X; Y)$,
 - $I(X; Y|Z) > I(X; Y)$.
11. Нека су X и Y случајне величине које узимају вредности $x_1, \dots, x_r$ и $y_1, \dots, y_s$, респективно и нека је $Z = X + Y$.
- Показати да важи $H(Z|X) = H(Y|X)$.
 - Ако су X и Y независне, тада важи $H(Y) \leq H(Z)$ и $H(X) \leq H(Z)$.
 - Наћи пример (зависних) случајних променљивих за које важе неједнакости $H(X) > H(Z)$ и $H(Y) > H(Z)$.
 - Под којим условом је $H(Z) = H(X) + H(Y)$?
12. Играчи A и B играју карте. Побеђује онај играч који први победи у 4 партије. Нека је X случајна величина која представља исходе ове игре и Y случајна величина која представља број одиграних партија. Ако предпоставимо да играчи A и B имају једнаке шансе да добију сваку партију и да су партије међусобно независне, израчунати $H(X)$, $H(Y)$, $H(Y|X)$ и $H(X|Y)$.
13. У кутији се налази r црвених, w белих и b црних куглица. Да ли већу неодређеност има извлачење k куглица са понављањем или без понављања?
14. Ако је $X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \dots \rightarrow X_n$ ланац Маркова, односно ако важи једнакост

$$p(x_1, \dots, x_n) = p(x_1)p(x_2|x_1)\dots p(x_n|x_{n-1}),$$

упростити израз $I(X_1; X_2, \dots, X_n)$.

15. Доказати да је условна неодређеност $H(X_0|X_n)$ неоппадајућа по n за сваки ланац Маркова.

16. Нека случајна величина X узима три могуће вредности $\{a, b, c\}$. Посматрајмо две расподеле вероватноће ове случајне величине

	$p(x)$	$q(x)$
a	$1/2$	$1/3$
b	$1/4$	$1/3$
c	$1/4$	$1/3$

Израчунати $H(p)$, $H(q)$, $KL(p||q)$ и $KL(q||p)$.

17. Претходни задатак говори да је у општем случају $KL(p||q) \neq KL(q||p)$. Наћи пример две расподеле вероватноће p и q тако да једнакост $KL(p||q) = KL(q||p)$ важи.
18. Нека су X , Y и Z случајне величине са заједничком расподелом $p(x, y, z)$. Кулбак-Лајблерово растојање између заједничке расподеле и производа одговарајућих маргиналних је

$$KL(p(x, y, z)||p(x)p(y)p(z)) = E \left[\log \frac{p(x, y, z)}{p(x)p(y)p(z)} \right]$$

Изразити Кулбак-Лајблерово растојање преко неодређености. Када је ово растојање једнако нули?

19. Посматрајмо низ од n бинарних случајних величина $X_1, X_2, \dots, X_n$. Сваки низ са парним бројем јединица има вероватноћу $2^{-(n-1)}$ и сваки низ са непарним бројем јединица има вероватноћу 0 . Наћи информације:

$$I(X_1; X_2), I(X_2; X_3|X_1), \dots, I(X_{n-1}; X_n|X_1, \dots, X_{n-2}).$$

20. Нека је $X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3$ ланац Маркова такав да $X_1 \in \{1, 2, \dots, n\}$, $X_2 \in \{1, 2, \dots, k\}$ и $X_3 \in \{1, 2, \dots, m\}$, где је $k < n$, $k < m$. Показати да је $I(X_1; X_3) \leq \log k$.
21. Нека су X, Y, Z три случајне величине са Бернулијевом расподелом са параметром $\frac{1}{2}$ које су независне у паровима.
- Одредити минималну вредности неодређености $H(X, Y, Z)$.
 - Навести пример случајних величина за које се постиже минимум.
22. Под којим условима важи једнакост $H(X|g(Y)) = H(X|Y)$?
23. а) Имамо на располагању "фер" новчић. Одредити заједничку информацију између писма и главе.
- б) Имамо на располагању "фер" коцкицу. Одредити заједничку информацију између горње стране и бочних страна коцкице.

24. Упоредити изразе:

- а) $H(X)$ и $H(5X)$
- б) $I(g(X); Y)$ и $I(X; Y)$
- в) $\frac{H(X, Y)}{H(X) + H(Y)}$ и 1

25. Користећи Венове дијаграме можемо приметити да се заједничка информација три случајне величине X , Y и Z може дефинисати као

$$I(X; Y; Z) = I(X; Y) - I(X; Y|Z).$$

Израз $I(X; Y; Z)$ не мора бити ненегативан. Наћи X , Y и Z за које је $I(X; Y; Z) < 0$ и показати да важе следеће једнакости:

$$I(X; Y; Z) = H(X, Y, Z) - H(X) - H(Y) - H(Z) + I(X; Y) + I(Y; Z) + I(Z; X)$$

$$I(X; Y; Z) = H(X, Y, Z) - H(X, Y) - H(Y, Z) - H(Z, X) + H(X) + H(Y) + H(Z)$$

26. Претпоставимо да имамо n новчића међу којима постоји један фаличан, који је тежи или лакши од осталих. На располагању имамо теразије које могу имати три исхода. Нека је k најмањи број мерења потребних да се утврди који новчић је фаличан као и да ли је тежи или лакши.

- а) Показати да важи $3^k \geq 2n$.
- б) На који начин се 12 новчића може декларисати помоћу 3 мерења?

27. Нека су $X_1, X_2, \dots$ независне једнако расподељене случајне величине са функцијом расподеле $p(x)$. Наћи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [p(X_1, X_2, \dots, X_n)]^{\frac{1}{n}}.$$

28. Нека су $X_1, X_2, \dots$ независне једнако расподељене случајне величине расподелом

$$X = \begin{cases} 1, & \text{са вероватноћом } \frac{1}{2} \\ 2, & \text{са вероватноћом } \frac{1}{4} \\ 3, & \text{са вероватноћом } \frac{1}{4} \end{cases}$$

Наћи граничну вредност израза

$$(X_1 X_2 \cdots X_n)^{\frac{1}{n}}.$$

29. Бацају се фер коцкица и фер новчић независно. Нека је X вредност на коцкици, а Y узима вредност нула ако је пало писмо и 1 ако је пала глава. Нека је $Z = X + Y$, наћи $H(Z)$ и $I(Z; X)$.

30. Ако је $I(X; Z|Y) = 0$, показати да је $I(X; Y) \geq I(X; Z)$. Под којим условима важи једнакост?

2 Теорија кодирања

1. Нека је дата случајна променљива

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \end{pmatrix},$$

где су S_i кодиране азбуком која има D симбола. Ако су дужине кодираних речи $(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6) = (1, 1, 2, 3, 2, 3)$, наћи одговарајућу доњу границу за D .

2. Размотримо случајну величину

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ 0.49 & 0.26 & 0.12 & 0.04 & 0.04 & 0.03 & 0.02 \end{pmatrix}.$$

- а) Наћи бинарни Хафманов код за X .
- б) Наћи средњу дужину речи за то кодирање.
- в) Наћи тројни (терцијарни) Хафманов код за X .

3. Наћи бинарни Хафманов код за расподелу $(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{15}, \frac{2}{15})$. Показати да је овај код такође оптималан за расподелу $(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$.
4. Који од понуђени кодова није Хафманов код ни за једну расподелу вероватноћа?
- а) $\{0, 10, 11\}$
 - б) $\{00, 01, 10, 110\}$
 - в) $\{10, 01\}$
5. Наћи бинарни и тројни (терцијарни) Хафманов код за случајну величину X чија је расподела вероватноће

$$p = (\frac{1}{21}, \frac{2}{21}, \frac{3}{21}, \frac{4}{21}, \frac{5}{21}, \frac{6}{21}).$$

Колика је средња дужина речи у оба случаја?

6. Слова А, Е, И, О, У јављају се са фреквенцијама 0.3, 0.2, 0.1, 0.25 и 0.15. Одредити оптимално бинарно кодирање и средњу дужину кодираних речи.
7. Наћи бинарни Хафманов код за расподелу:
- а) $\mathbf{p} = (\frac{10}{41}, \frac{9}{41}, \frac{8}{41}, \frac{7}{41}, \frac{7}{41})$
 - б) $\mathbf{p} = (\frac{9}{10}, \frac{9}{10}, \frac{1}{10}, \frac{9}{10} (\frac{1}{10})^2, \frac{9}{10} (\frac{1}{10})^3, \dots)$

8. Наћи услов да Хафманов бинарни код са 4 симбола и расподелом $p_1 = p_2 \geq p_3 = p_4$ има све речи дужине 2.
9. Нека Хафманов код има 5 кодних речи над азбиком $\{0, 1\}$ и нека је $p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq p_4 \geq p_5 = q$. Наћи максималну могућу вредност за p_5 тако да реч која се појављује са вероватноћом p_5 има дужину 4.
10. Наћи најмању вредност q тако да бинарни Хафманов код са четири кодне речи са вероватноћама $p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq p_4 = q$ има све речи једнаке дужине 2.
11. Извор има три симбола са вероватноћама $p_1 \geq p_2 \geq p_3$. Показати да бинарни Хафманов код има средњу дужину речи $2 - p_1$. Шта је одговарајући резултат ако извор има четири симбола са вероватноћама $p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq p_4$?
12. Нека је $Y = X + Z(\text{mod} 11)$ дискретан канал без меморије, где је

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

и $X \in \{0, 1, \dots, 10\}$. Ако претпоставимо да су Z и X независне, наћи капацитет канала.

13. Наћи капацитет канала са датом матрицом условних вероватноћа.

	$Y = 0$	$Y = 1$
$X = 0$	1/4	3/4
$X = 1$	3/4	1/4
$X = 2$	3/4	1/4
$X = 3$	1/4	3/4

14. Наћи капацитет канала са датом матрицом условних вероватноћа.

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 0$	1/2	1/6	1/3
$X = 1$	1/3	1/2	1/6
$X = 2$	1/6	1/3	1/2

15. Наћи капацитет канала и дистрибуцију на улазу за који се он постиже.

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 0$	1/4	0	3/4
$X = 1$	0	1	0
$X = 2$	3/4	0	1/4

16. Наћи капацитет канала

	a	b	c	d
0	$\frac{1-p}{2}$	$\frac{1-p}{2}$	$\frac{p}{2}$	$\frac{p}{2}$
1	$\frac{p}{2}$	$\frac{p}{2}$	$\frac{1-p}{2}$	$\frac{1-p}{2}$

17. Постамбрајмо 26 слова на тастатури.

а) Ако се притисне типка резултат је одговарајуће слово, одредити капацитет таквог канала.

б) Ако се притисне типка резултат је то слово или слово до њега са једнаким вероватноћама. Према томе, $A \rightarrow A$ или $B, \dots, Z \rightarrow Z$ или A . Шта је капацитет у том случају?

18. Размотримо два дискретна канала без меморије $(X_1, p(y_1|x_1), Y_1)$ и $(X_2, p(y_2|x_2), Y_2)$ са капацитетима C_1 и C_2 респективно. Формирамо нови канал $(X_1 \times X_2, p(y_1|x_1) \times p(y_2|x_2), Y_1 \times Y_2)$ који истовремено кодира $(x_1, x_2) \rightarrow (y_1, y_2)$. Наћи капацитет тог канала.

19. Наћи капацитет канала чија је матрица условних вероватноћа

	$Y = 0$	$Y = 1$
$X = 0$	1	0
$X = 1$	1/2	1/2

20. Наћи капацитет канала $C_1 \cdot C_2$ ако су матрице канала C_1 и C_2

	$Y = 0$	$Y = 1$
$X = 0$	1/3	2/3
$X = 1$	2/3	1/3

	$Z = 0$	$Z = 1$
$Y = 0$	5/9	4/9
$Y = 1$	4/9	5/9

21. Нека је C капацитет канала

	0	1
0	1/3	2/3
1	2/3	1/3

Ако је C_n капацитет n редно везаних канала $C_n = C \cdot C \cdot \dots \cdot C$, наћи $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n$

22. Наћи чему тежи капацитет канала C_n ако је $C_n = C \cdot C_{n-1}$, $C_1 = C$, где је C канал са матрицом

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 0$	$1/3$	0	$2/3$
$X = 1$	0	1	0
$X = 2$	$1/4$	0	$3/4$

23. Наћи капацитет канала

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 0$	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$1/4$	$1/4$
$X = 1$	$1/8$	$1/8$	$1/4$	$1/8$	$1/8$	$1/8$
$X = 2$	$1/4$	$1/4$	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$1/8$

24. Наћи капацитет канала и дистрибуцију на улазу за коју се остварује.

	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$	$Y = 4$	$Y = 5$
$X = 1$	$1/4$	$1/4$	$1/2$	0	0
$X = 2$	$1/2$	$1/4$	$1/4$	0	0
$X = 3$	$1/4$	$1/2$	$1/4$	0	0
$X = 4$	0	0	0	$1/4$	$3/4$
$X = 5$	0	0	0	$3/4$	$1/4$

25. Дат је канал везе и дистрибуција на улазу.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix},$$

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 0$	0.2	0.6	0.2
$X = 1$	0.3	0.3	0.4
$X = 2$	0.1	0.1	0.8

Наћи

- шему декодовања за идеалног посматрача
- шему декодовања за посматрача максималне веродостојности (идеалног посматрача при равномерној дистрибуцији).

26. Дат је канал C

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 0$	1	0	0
$X = 1$	0	p	$1 - p$
$X = 2$	0	q	$1 - q$

Који услов треба да задовољавају p и q тако да идеални посматрач, за равномерну расподелу на улазу, декодира примљену вредност као ону која је послата?

27. Нека је

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

матрица провере линеарног кода. Одредити број информационих карактера, број карактера провере и кодне речи.

28. Дате су кодне речи 00010, 11001 и 11111. Одредити матрицу провере линеарног кода са највећим могућим бројем карактера провере. Колики је број број информационих, а колики број бита провере тог кода?

29. Нека је

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

матрица провере линеарног кода. Одредити број информационих карактера, број карактера провере и кодне речи.

Ако се исправљају обрасци грешака најмање тежине у косету, наћи један начин декодирања.

30. Дате су кодне речи 0000, 1001, 1111 и 0110.

а) Наћи матрицу провере линеарног кода, број бита провере и број информационих бита.

б) Ако се исправљају обрасци грешака најмање тежине у косету, наћи један начин декодирања.