

Параметарски и непараметарски тестови

6.час

12. април 2016.

Поступци којима се применом статистичких метода утврђује да ли се, на основу узорка може, и са којом вероватноћом прихватити претпоставка о конкретној бројчаној вредности неког параметра су **тестирања статистичких хипотеза**. Ови тестови могу бити параметарски и непараметарски.

Свака претпоставка (хипотеза) о непознатом параметру расподеле назива се **параметарска хипотеза**, а поступак њеног потврђивања или одбијања на основу узорка је **параметарски тест**. Статистикакоје се користи у том поступку је **тест статистика**.

Хипотезе о расподели обележја које се не односе на параметре, већ на саму расподелу обележја су **непараметарски тестови** или **тестови сагласности** (обележја са расподелом).

Основни појмови

- нулта и алтернативна хипотеза
- просте и сложене хипотезе
- критична област
- праг значајности
- грешке првог и другог реда

H_0	True	Not True
Accept		Type II Error
Reject	Type I Error	

Параметарски тестови

Тестирање хипотеза о математичком очекивању

Тестирамо хипотезе:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ против } H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$$H_0 : \mu \geq \mu_0 \text{ против } H_1 : \mu < \mu_0$$

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \text{ против } H_1 : \mu > \mu_0$$

Тест статистика је $t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s} \sqrt{n} \sim t_{n-1}$, при H_0 .

Услови који треба да буду испуњени да би се применио тест:

- зависна променљива је непрекидна
- независност података
- зависна променљива треба да има нормалну расподелу

Тестирање хипотеза о математичком очекивању

```
> daily.intake <- c(5260,5470,5640,6180,6390,6515,6805,7515,7515,8230,8770)
> mean(daily.intake)
[1] 6753.636
> sd(daily.intake)
[1] 1142.123
> quantile(daily.intake)
 0%  25%  50%  75% 100%
5260 5910 6515 7515 8770
> t.test(daily.intake,mu=7725)
```

One Sample t-test

data: daily.intake

t = -2.8208, df = 10, p-value = 0.01814

alternative hypothesis: true mean is not equal to 7725

95 percent confidence interval:

5986.348 7520.925

sample estimates:

mean of x

6753.636

Тестирање хипотеза о дисперзији

Тестирамо хипотезе:

Null Hypothesis	Alternative Hypothesis
$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$
$\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$

Тест статистика је $\frac{(n-1)S_x}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$, при H_0 .

Услови који треба да буду испуњени да би се применио тест:

- зависна променљива је непрекидна
- независност података
- зависна променљива треба да има нормалну расподелу

Тестирање хипотеза о дисперзији

```
> install.packages('EnvStats')  
> library(EnvStats)  
  
> varTest(daily.intake, sigma.squared = 1500000)
```

Results of Hypothesis Test

Null Hypothesis:	variance = 1500000
Alternative Hypothesis:	True variance is not equal to 1500000
Test Name:	Chi-Squared Test on Variance
Estimated Parameter(s):	variance = 1304445
Data:	daily.intake
Test Statistic:	Chi-Squared = 8.696303
Test Statistic Parameter:	df = 10
P-value:	0.8777049
95% Confidence Interval:	LCL = 636837.5 UCL = 4017420.4

Тестирање хипотеза о једнакости математичких очекивања

Тестирамо хипотезе:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \text{ против } H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

Тест статистика је

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} : t_{n_1+n_2-2}, \text{ при } H_0$$

Услови који треба да буду испуњени да би се применио тест:

- зависна променљива је непрекидна
- опсервације су међусобно независне
- узорци из популације са нормалном расподелом

Тестирање хипотеза о једнакости математичких очекивања

```
> a <- c(175, 168, 168, 190, 156, 181, 182, 175, 174, 179)
> b <- c(185, 169, 173, 173, 188, 186, 175, 174, 179, 180)
> t.test(a,b)
```

Results of Hypothesis Test

```
-----
Null Hypothesis:                difference in means = 0
Alternative Hypothesis:         True difference in means is not equal to 0
Test Name:                     Welch Two Sample t-test
Estimated Parameter(s):        mean of x = 174.8
                                mean of y = 178.2
Data:                          a and b
Test Statistic:                t = -0.947373
Test Statistic Parameter:      df = 15.98123
P-value:                      0.3575549
95% Confidence Interval:       LCL = -11.008795
                                UCL =  4.208795
```

paired t test

Користи се када су два мерења из исте експерименталне јединице.

```
> attach(intake)
> t.test(pre, post, paired=T)
```

Results of Hypothesis Test

```
-----
Null Hypothesis:                difference in means = 0
Alternative Hypothesis:         True difference in means is not equal to 0
Test Name:                     Paired t-test
Estimated Parameter(s):        mean of the differences = 1320.455
Data:                          pre and post
Test Statistic:                t = 11.94139
Test Statistic Parameter:      df = 10
P-value:                       3.059021e-07
95% Confidence Interval:       LCL = 1074.072  UCL = 1566.838
```

```
> t.test(pre, post) ПОГРЕШНО
```

Results of Hypothesis Test

```
-----
Null Hypothesis:                difference in means = 0
Alternative Hypothesis:         True difference in means is not equal to 0
Test Name:                     Welch Two Sample t-test
Estimated Parameter(s):        mean of x = 6753.636
                                mean of y = 5433.182
Data:                          pre and post
Test Statistic:                t = 2.624202
Test Statistic Parameter:      df = 19.92024
P-value:                       0.01628603
95% Confidence Interval:       LCL = 270.5633  UCL = 2370.3458
```

Тестирање хипотеза о једнакости дисперзија

Тестирамо хипотезе:

$$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \quad (\text{or equivalently } H_0 : \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} = 1)$$

$$H_A : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2, \quad H_A : \sigma_X^2 > \sigma_Y^2, \text{ or } H_A : \sigma_X^2 < \sigma_Y^2$$

Тест статистика је

$$\frac{s_A^2 / \sigma_A^2}{s_B^2 / \sigma_B^2} \sim F_{n_A-1, n_B-1}.$$

Услови који треба да буду испуњени да би се применио тест:

- зависна променљива је непрекидна
- опсервације су међусобно независне
- узорци из популације са нормалном расподелом

Тестирање хипотеза о једнакости дисперзија

```
> var.test(a,b)
```

Results of Hypothesis Test

```
-----  
Null Hypothesis:                ratio of variances = 1  
Alternative Hypothesis:         True ratio of variances is not equal to 1  
Test Name:                     F test to compare two variances  
Estimated Parameter(s):        ratio of variances = 2.102784  
Data:                          a and b  
Test Statistic:                F = 2.102784  
Test Statistic Parameters:     num df   = 9  
                               denom df = 9  
P-value:                       0.2834255  
95% Confidence Interval:       LCL = 0.5223017  
                               UCL = 8.4657950
```

Непараметарски тестови

- тестови независности
- тестови нормалности
- тестови случајности

χ^2 ТЕСТ НЕЗАВИСНОСТИ

Тест статистика је:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

```
> library(MASS)
> tbl = table(survey$Smoke, survey$Exer)
> tbl # tablica kontingencije
```

	Freq	None	Some
Heavy	7	1	3
Never	87	18	84
Occas	12	3	4
Regul	9	1	7

```
> chisq.test(tbl)
```

Pearson's Chi-squared test

data: tbl

X-squared = 5.4885, df = 6, p-value = 0.4828

Mann-Whitney-Wilcoxon и Kruskal-Wallis тестови

Тестови независности узорака који не користе претпоставку да су узорци из нормалне расподеле.

```
> wilcox.test(mpg ~ am, data=mtcars)
```

Wilcoxon rank sum test with continuity correction

data: mpg by am

W = 42, p-value = 0.001871

alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0

```
> attach(airquality)
```

```
> kruskal.test(Ozone ~ Month, data = airquality)
```

Kruskal-Wallis rank sum test

data: Ozone by Month

Kruskal-Wallis chi-squared = 29.2666, df = 4, p-value = 6.901e-06

Шапиро-Вилк тест

Тест статистика је:

$$W = \frac{(\sum_{i=1}^n a_i x_{(i)})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

где је $x_{(i)}$ i -та статистика поретка, тј. i -ти по величини реализована вредност обележја у узорку. Константе a_i се добијају помоћу једнакости:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{m^{TV-1}}{(m^{TV-1}V^{-1}m)^{1/2}}, m = (m_1, m_2, \dots, m_n)^T$$

при чему $m_1, m_2, \dots, m_n$ представљају очекиване вредности независних и једнако расподељених статистика поретка.

Неопходно је да ове случајне променљивих имају стандардизовану нормалну расподелу. Параметар V представља коваријациону матрицу ових статистика поретка.

Нулта хипотеза се одбија ако је тест статистика W мања од унапред одређеног прага значајности.

Шапиро-Вилк тест

```
> a<-rnorm(100,mean = 5,sd = 3)
> shapiro.test(a)
```

Shapiro-Wilk normality test

data: a

W = 0.9856, p-value = 0.3507

```
> b <- rt(n = 100,4)
> shapiro.test(b)
```

Shapiro-Wilk normality test

data: b

W = 0.6868, p-value = 2.683e-13

Шапиро-Франциа тест

Шапиро и Франциа су за апроксимацију тест статитиске W претпостављали да су за велике узорке статитистике поретка независне.

$$W' = (a^*x)^2 / ((n-1)s^2)$$

где је $a^* = m^T / \sqrt{m^t m}$. Дакле, W' представља квадрат Пирсоновог коефицијента корелације између x и a^* . Видимо да Шапиро-Франциа тест за тестирање хипотезе о нормалности, изискује само познавање очекиваних вредности статистика поретка m_i .

```
> library(nortest)
> sf.test(a)
```

```
Shapiro-Francia normality test
data:  a
W = 0.9838, p-value = 0.2227
```

Тестирање случајних низова

Немогуће је дефинитивно утврдити случајност низова, али их можемо подвргнути неким статистичким тестовима. Ако прођу већину тих тестова, повећава се шанса случајности датих низова, односно знамо да је генератор који их је генерисао бољи. То су **тестови случајности**. Уколико низови не прођу тест случајности (или више њих), онда се неки параметри могу променити или треба да користимо друге случајне податке који ће задовољавати дате услове и проћи тест.

Тестирање случајности низа бројева обухвата:

- постављање хипотезе о некој особини случајне променљиве,
- утврђивање потребног и довољног интервала поверења и
- проверу хипотезе.

Хипотезе дефинишемо на следећи начин:

- H_0 – низ бројева јесте случајан
- H_1 – низ бројева није случајан

У зависности од резултата и унапред задатог интервал поверења хипотеза се прихвата или одбацује.

Тест тачака заокрета

Тест статистика је:

$$Y_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{n-1},$$

где је $Y_j = 1$ ако је $(X_{j-1} < X_j \wedge X_j > X_{j+1})$ или $(X_{j-1} > X_j \wedge X_j < X_{j+1})$, иначе $Y_j = 0$.

За велики обим узорка ($n > 50$) тест статистика Z_n^* има приближно стандардну нормалну расподелу, где је

$$Z_n^* = \frac{Z_n - \frac{2(n-2)}{3}}{\sqrt{\frac{16n-29}{90}}}.$$

Тест тачака раста

Тест статистика је:

$$R_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n,$$

где је $Y_j = 1$ ако је $(X_{j-1} < X_j)$, $Y_j = 0$ ако је $(X_{j-1} \geq X_j)$.

R_n је статистика која представља бројач тачака раста. Погодност статистике R_n је брза конвергенција ка нормалној расподели ($n > 12$).

Тест разлика рангова

Тест статистика је:

$$Z_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{n-1},$$

где је $Y_j = |R_{j+1} - R_j|$, а $(R_1, \dots, R_{n-1})$ је низ рангова низа случајних бројева $(X_1, \dots, X_n)$. Z_n^* има приближно стандардну нормалну расподелу,

где је

$$Z_n^* = \frac{Z_n - \frac{(n-1)(n+1)}{3}}{\sqrt{\frac{(n-2)(n+1)(4n-7)}{90}}}.$$

Бартелсов тест

Тест статистика је:

$$B_n = \frac{12Z_n}{n(n-1)},$$

где је $Z_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{n-1}$, а сада немамо више збир разлика рангова, већ збир квадрата разлика рангова:

$$Y_j = |R_{j+1} - R_j|^2,$$

где је $(R_1, R_2, \dots, R_{n-1})$ низ рангова случајних бројева $(X_1, X_2, \dots, X_n)$. B_n^* има приближно стандардну нормалну расподелу, где је

$$B_n^* = \frac{B_n - 2}{\sqrt{\frac{4}{n}}}.$$

Тестови случајности у R -у

```
> library(randtests)
```

```
> turning.point.test(a)
```

Turning Point Test

data: a

statistic = 1.5957, n = 100, p-value = 0.1106

alternative hypothesis: non randomness

```
> bartels.rank.test(a)
```

Bartels Ratio Test

data: a

statistic = 1.2812, n = 100, p-value = 0.2001

alternative hypothesis: nonrandomness