

Динамички делта хеџинг

- Посматрамо цене акција компаније *Apple* у периоду од 100 дана.
- Претпоставимо да се цене акција могу моделовати геометријским Брауновим кретањем:

$$\log \frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}} \sim \mathcal{N}\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)d, \sigma^2 d\right)$$

где је $d = t_i - t_{i-1} = \frac{1}{252}$.

- На основу претходних цена акције, оценићемо параметре овог модела.

```
> S <- A[406:505]
> #parametri
> (sigma <- sd(Return.calculate(S, method = "log")[2:100])*sqrt(252))
# d=252 broj radnih dana godisnje
[1] 0.2114309
> (greska <- sigma/(10))
[1] 0.001067833
> (mi <- mean(Return.calculate(S, method = "log")[2:100]) + sigma^2/2)
[1] 0.02380618
```

- Под претпоставком да постоји 252 радних дана годишње, оцена средње вредности модела је 0,02380618. Оцена стандардног одступања на годишњем нивоу је 0,2114309, а стандардна грешка ове оцене је 2,114309% годишње.

- Дакле, на основу посматраних података, релативна промена цене акција може се представити моделом:

$$\log \frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}} \sim \mathcal{N}(0, 00009446897, 0.000177393)$$

- Претпоставимо да смо 51. дана продали једну кол опцију на акцију посматране компаније, која је на новцу (at the money), односно цена акције у посматраном тренутку једнака је уговореној цени: $S_{51} = K = 99.1731$.
- Новац који смо добили од продаје опције искористићемо како би применили ***Black-Sholes delta-hedging*** до времена доспећа и одредили укупан губитак у тренутку доспећа.

- За сваку вредност цене акције које имамо на располагању рачунамо Δ , количину акција коју треба да купимо или продамо, цену коју треба да платимо за ту количину акција и нагомилане трошкове.

```
> T_dospeca <- 100
> vreme <- c(51:100)
> cena_akcije <- as.vector(S[51:100])
> d1 <- (log(cena_akcije/K)+(r_f*252+sigma^2)*((T_dospeca-vreme)/252))/
      (sigma*sqrt((T_dospeca-vreme)/252))

> delta<- pnorm(d1)
> kupljene_akcije <- delta - c(0,delta[1:49])
> cena_kupljenih_akcija <- cena_akcije*kupljene_akcije
> troskovi <- c()
> troskovi[1] <- cena_kupljenih_akcija[1]
> for(i in 2:50)
+ troskovi[i] <- troskovi[i-1]*(1+r_f)+cena_kupljenih_akcija[i]
```

- У следећој табели видимо шта треба да урадимо при свакој промени цене акције, тако да наш портфолио у сваком тренутку буде делта неутралан.

```
delta_hedging <- cbind(cena_akcije,delta,kupljene_akcije,cena_kupljenih_akcija,troskovi)
```

```
delta_hedging
```

	cena_akcije	delta	kupljene_akcije	cena_kupljenih_akcija	troskovi
[1,]	99.17310	0.5742026	5.742026e-01	5.694545e+01	56.94545
[2,]	99.67637	0.5948426	2.064004e-02	2.057324e+00	59.01294
[3,]	101.45717	0.6673459	7.250333e-02	7.355983e+00	66.37947
[4,]	101.83462	0.6824070	1.506108e-02	1.533740e+00	67.92506
[5,]	101.72816	0.6786732	-3.733852e-03	-3.798379e-01	67.55735
[6,]	103.30572	0.7387145	6.004131e-02	6.202610e+00	73.77202
[7,]	103.88641	0.7601807	2.146622e-02	2.230048e+00	76.01525
[8,]	103.53800	0.7492738	-1.090694e-02	-1.129283e+00	74.89954
[9,]	104.52518	0.7844906	3.521681e-02	3.681044e+00	78.59396
[10,]	105.88014	0.8279017	4.341109e-02	4.596372e+00	83.20436
[11,]	105.10587	0.8066002	-2.130142e-02	-2.238905e+00	80.98032
[12,]	105.35751	0.8163491	9.748864e-03	1.027116e+00	82.02189
[13,]	105.65883	0.8275425	1.119341e-02	1.182682e+00	83.21922
[14,]	105.96017	0.8385973	1.105479e-02	1.171367e+00	84.40545
[15,]	105.78520	0.8357757	-2.821594e-03	-2.984829e-01	84.12204

[37,]	108.49714	0.9754388	3.004464e-04	3.259757e-02	99.91959
[38,]	106.66002	0.9525417	-2.289706e-02	-2.442201e+00	97.49523
[39,]	105.20199	0.9228668	-2.967491e-02	-3.121859e+00	94.39078
[40,]	103.76339	0.8767294	-4.613744e-02	-4.787377e+00	89.62026
[41,]	106.34898	0.9662664	8.953697e-02	9.522165e+00	99.15843
[42,]	109.49833	0.9965817	3.031531e-02	3.319476e+00	102.49561
[43,]	108.65266	0.9961083	-4.733509e-04	-5.143084e-02	102.46248
[44,]	109.78021	0.9992639	3.155552e-03	3.464172e-01	102.82720
[45,]	109.39140	0.9995996	3.357508e-04	3.672825e-02	102.88229
[46,]	108.87623	0.9998129	2.132928e-04	2.322251e-02	102.92388
[47,]	110.80083	0.9999994	1.864611e-04	2.066005e-02	102.96292
[48,]	110.72308	1.0000000	6.085365e-07	6.737903e-05	102.98138
[49,]	109.37196	1.0000000	1.971810e-09	2.156607e-07	102.99977
[50,]	107.29183	1.0000000	8.137935e-14	8.731339e-12	103.01816

- У почетном тренутку посмарања добијамо да је $\Delta = 0.5742026$. То значи да треба да купимо Δ акција на коју се ова опција односи, морамо да позајмимо 56.94545 новца за ту куповину (цена једне акције је 99.17310).
- Другог дана цена акције је порасла до 99.67637. Да би портфолио био делта неутралан треба да купимо још 0.02064004 акција, и позајмимо још 2.057324 новца.
- У тренутку истека, опција ће се активирати, јер је цена акције већа од уговорене цене и делта је 1.
- Укупни трошкови у тренутку истека једнаки су 103.01816. Пошто ће се опција активирати, власник опције ће од нас купити ту акцију по уговореној цени, па је укупан губитак у тренутку једнак 3.845054.
- У случају да нисмо применили овај поступак обезбеђења од ризика, укупан губитак би у тренутку истека опције био једнак 8.118727.