

Комплексне функције, Увод у комплексну анализу
21.08.2025.

1. Нека је $u(x, y) = x \cos x \operatorname{ch} y + y \sin x \operatorname{sh} y + e^x \cos y$. Одредити целу функцију f тако да је $\operatorname{Re} f = u$ на $\mathbb{C}$ и $f(0) = 1$. Доказати да је $\left| \int_{\gamma} \left(\frac{f(z)}{z} - \cos z \right) dz \right| \leq \pi e$, при чему је $\gamma(t) = e^{it}$ за све $t \in [0, \pi]$.
2. а) Одредити билинеарно пресликавање f које слика тачке $4i$ и $2i$ редом у -4 и 0 , а кружницу $\{z \in \mathbb{C} : |z - 4i| = 2\}$ слика на праву $\{w = u + iv \in \mathbb{C} : v = u\}$.
б) Добијеним пресликавањем f пресликати област $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z - 4 - 4i| < 2\}$.
3. Одредити вредност интеграла $\int_0^{2\pi} \frac{(1+2 \cos t)^n \cos nt}{1-a-2a \cos t} dt$, у зависности од параметара $a \in (-1, \frac{1}{3})$ и $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
4. Одредити број нула функције $f(z) = e^{iz^2} + z^4 + 2$ у првом квадранту $K_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$.

Увод у комплексну анализу, Комплексне функције
03.09.2025.

1. Нека је $f = u + iv$ цела функција тако да важи $u = x^4 + y^4 - 6x^2y^2 - 4xy$ и $f(0) = i$. Одредити број нула функције f у $D(0, 2) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ и израчунати интеграл $\int_{|z|=2} \frac{z^3}{f(z)} dz$.
2. а) Одредити билинеарно пресликавање f које слика тачке -2 и 0 редом у 0 и i , а кружницу $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ слика на праву $\{w \in \mathbb{C} : |w + i| = 1\}$.
б) Добијеним пресликавањем f пресликати област $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$.
3. Одредити вредност интеграла $\int_0^{2\pi} \frac{\cos nt}{(1-2a \cos t + a^2)^2} dt$, у зависности од параметара $a \in \mathbb{R}$, $|a| \neq 1$ и $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
4. а) Ако је $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ цела функција за коју важи $|f(z)| \leq c_n |z|^n + c_{n-1} |z|^{n-1} + \dots + c_1 |z| + c_0$ за све $z \in \mathbb{C}$ и фиксиране $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, показати да тада важи да је f полином степена мањег или једнаког n .
б) Наћи све целе функције такве да важи $|f(z)| \leq |z^2 - 1|$.

Увод у комплексну анализу, Комплексне функције
23.09.2025.

1. Нека је $f = u + iv$ цела функција тако да важи $v = 3x^2y - 6xy + 3y - y^3 + 1$ и $f(0) = i$. Ако је $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < 1\}$, одредити $\max_{z \in \Omega} |f(z)|$.
2. а) Одредити билинеарно пресликавање f које слика тачке $-i$ и 2 редом у 0 и $\frac{3-i}{4}$, а кружницу $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ слика на кружницу $\{w \in \mathbb{C} : |w - i| = 1\}$.
б) Добијеним пресликавањем f пресликати област $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1, \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$.
3. Одредити вредност интеграла $\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z-5)(1-z^n)}$ и $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos nx}{x^2+x+1} dx$, где је $n \in \mathbb{N}$.
4. Нека су $a, b \in \mathbb{C}$ такви да је $|a - b| = 1$ и нека је $D_{a,b} = \{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{a+b}{2}| < \frac{3}{2}\}$ и γ је позитивно оријентисана граница диска $D_{a,b}$. Ако је f аналитичка функција на области која садржи криву γ и $M > 0$ тако да је $|f(z)| \leq M$ за $z \in \gamma$, доказати неједнакости:

$$|f(a) - f(b)| \leq \frac{3}{2}M, \quad |f'(a) - f'(b)| \leq \frac{9}{2}M.$$

Увод у комплексну анализу, Комплексне функције
06.10.2025.

1. Нека је $f = u + iv$ цела функција тако да важи $u = e^{-y} \cos x + x^2 - y^2 + 2$ и $f(0) = 3$. Одредити број нула функције f у горњој полуравни $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$.
2. Нека је $\phi(z)$ билинеарно пресликавање које праве $l = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 2\}$ и $p = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 3\}$ пресликава на $q = \{\omega \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \omega = -2\}$ и $K = \{\omega \in \mathbb{C} : |\omega + \frac{7i}{2}| = \frac{3}{2}\}$, тим редом, при чему важи $\phi(i) = i$. Одредити $\phi(V)$, где је $V = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$.
3. а) Израчунати $J(r) = \int_{|z|=r} \frac{z^3}{z+1} e^{\frac{1}{z}} dz$, у зависности од реалног параметра $r \neq 1$.

б) Израчунати вредност интеграла

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{a + \sin x} dx,$$

за $n \in \mathbb{N}$ и $a > 1$.

4. Одредити све целе функције f такве да је $\int_{|z|=2} \frac{n^2 f'(z)}{(nz-1)^2} dz = 0$, за све $n \in \mathbb{N}$.

Увод у комплексну анализу, Комплексне функције 18.10.2025.

- Нека је $f = u + iv$ цела функција тако да важи $\operatorname{Re} f' = 3x^2 - 4y - 3y^2$, $f(1+i) = 0$ и $f'(0) = 0$. Одредити број нула функције f у јединичном диску $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.
- Израчунати интеграл $\int_{|z|=1} \frac{z^4}{1+4iz-z^2} dz$, а затим одредити вредности интеграла $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 4t}{2-\sin t} dt$ и $\int_0^{2\pi} \frac{\sin 4t}{2-\sin t} dt$.
- Нека је ϕ билинеарно пресликавање које слика тачке $\frac{-1}{2}$ и 0 редом у ∞ и $4+i$, а кружницу $k = \{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{1}{2}| = 1\}$ слика на праву $p = \{\omega \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \omega = 1\}$. Одредити $\phi(V)$, ако је $V = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > -\frac{3}{2}, |z + \frac{3}{2}| < 1\}$.
- Нека је f цела функција таква да је $|f(z)| \leq \ln(|z|+1)$, за све $z \in \mathbb{C}$. Доказати да је f константна функција.

Увод у комплексну анализу, Комплексне функције 31.10.2025.

- Нека је $f = u + iv$ цела функција таква да је $u(x, y) + v(x, y) = x^2 - y^2$ и $f(0) = 1 + i$. Одредити $\max_{\Omega} |f(z)|$, где је $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 1\}$.
- Нека је ϕ билинеарно пресликавање које кружницу $k_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 1\}$ пресликава на кружницу $k_2 = \{\omega \in \mathbb{C} : |\omega - \frac{13}{3}| = \frac{2}{3}\}$, при чему је $\phi(3i) = \frac{7}{2}$ и $\phi(0) = 5$. Одредити $\phi(V)$, где је $V = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, |z + \frac{i}{2}| > \frac{1}{2}\}$.
- Израчунати вредност интеграла $\int_{|z|=1} (\operatorname{Im} z + \alpha) \frac{\cos z}{z} dz$, где је $\alpha \in \mathbb{C}$.
- Нека су f и g холоморфне функције на области $\Omega \subseteq \mathbb{C}$.
 - Показати да за свако $z_0 \in \Omega$, постоји холоморфна функција облика $h(z) = c_1 f(z) + c_2 g(z)$, таква да је $h(z_0) = |h(z_0)|$.
 - Ако функција $|f| + |g|$ достиже максимум у тој области Ω , доказати да су f и g константне функције.

Увод у комплексну анализу, Комплексне функције 7.рок

- Нека је f цела функција и нека је $g = f' = u + iv$ таква да је $v(x, y) = x(2y - 1)$ и $f(0) = g(0) = 0$. Одредити $\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^3} dz$.
- Нека је $R > 0$. Одредити билинеарно пресликавање ϕ_R које слика диск $D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ на $\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w > 0\}$, тако да слика R у 0 и 0 у 1. Ако је $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$, одредити $\phi_1(\Omega)$ и $\phi_2(\Omega)$.
- Нека је $\alpha > 0$. Израчунати интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx.$$

- Одредити све функције f холоморфне у диску $\mathbb{D}$, такве да је $f''(\frac{1}{5^n}) = f'(\frac{1}{5^n})$, за све $n \in \mathbb{N}$.