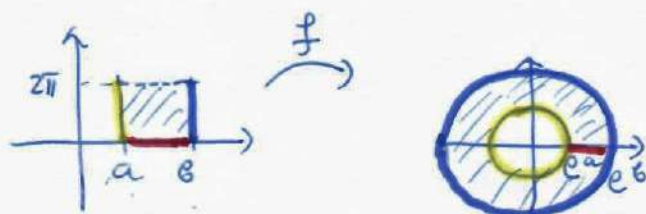


Напомена:



$$f(z) = e^z \quad z = a + iy, y \in [0, 2\pi)$$

$$f(a + iy) = e^a e^{iy} \text{ кад } y \text{ иде од } 0 \text{ до } 2\pi$$

тад f иде по кружном кол. e^a

$$f(b + iy) = e^b e^{iy}$$

f је конформно па чува екстремалне дужине
фамилија кривих? (доказати то и то)

Нека је Γ фамилија кривих које спајају стране правоугаоника
које су паралелне у осн (изв. стране) и нека је

$$\Gamma' = \{f \circ \gamma : \gamma \in \Gamma\} \text{ - Тада криве из } \Gamma' \text{ спајају}$$

кружнице $2D(0, e^a)$ и $2D(0, e^b)$.

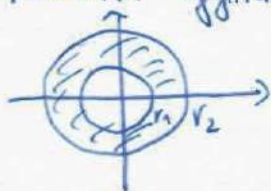
$$\lambda(\Gamma) = \frac{b-a}{2\pi} \text{ (по задатку са неким претходним тачама)}$$

$$\lambda(\Gamma') = \frac{1}{2\pi} \cdot \ln \frac{e^b}{e^a} = \frac{b-a}{2\pi}$$

$$\text{Значи је } \lambda(\Gamma) = \lambda(\Gamma').$$

* Модул правоугаоника се дефинише као количник страна
(геометријски) или као екстремална дужина фамилије Γ .

* Модул прстена се дефинише као $\log \frac{r_2}{r_1}$ или као 2π пута
екстремална дужина фамилије кривих које спајају $|z|=r_1$ и $|z|=r_2$.

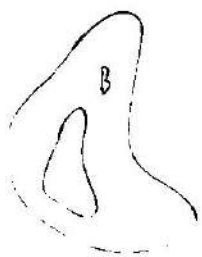


* Сваки квадрилатерал се може конформно преликаати на неки правоугаони.
(задајак). Тај правоугаоник називамо канонски правоугаоник.

Модул квадрилатерала се може дефинисати као количник страница канонског правоугаоника. ($M(Q) = \frac{a}{b}$)

* Сваки двоструко повезан домен (ПРСТЕН ДОМЕН, ТОПОЛОШКИ ПРСТЕН) се може конформно преликаати на неки прстен, називамо га канонски прстен.

Модул прстена домена можемо дефинисати као модул његовог канонског прстена.



Двоструко повезан домен $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}$ има 2 координатне повезаности

* γ ^{пречи} прелиходност је квазиконформно преликавање једно у другом регуларно квазиконформно (C^1 дифеоморфизам).

* Геометријска дефиниција квазиконформног преликавања: (не мора бити регуларно сада)

Хомеоморфизам $w: G \rightarrow G'$ који чува оријентацију на

домену G се назива квазиконформно пр. ако је његова

максимална дилатација $K(G) = \sup_{Q \in G} \frac{M(w(Q))}{M(Q)}$ коначна, где је

$\sup$ узет по свим квадрилатералима из G . (к-кватк. ако је $K(G) \leq k$)

* Аналитичка дефиниција еквивалентна са геометријском (када не захтевамо регуларност)

Хомеоморфизам $w: G \rightarrow G'$ који чува оријентацију на

домену G се назива K -кватконформно пр. ако

1) w је апсолутно непрекидно на граници (АСГ)

2) за свако $z \in G$ важи $Df(z) \leq K$.

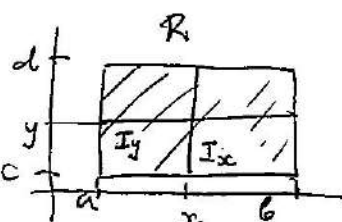
Напомена: Геометријска и аналитичка дефиниције су еквивалентне. (предавања)

У геометријској дефиницији квадрирамола се могу узети и прости домети.
(доказује се еквив.)

Подсетимо се: ACL

* f је апсолутно непрекидна на интервалу I ако
за свако $\epsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ так. је $\sum |f(v_i) - f(a_i)| < \epsilon$
за сваки коначан низ неpreseцајућих интервала (a_i, v_i)
так. $[a_i, v_i] \subseteq I$ и за које важи $\sum (v_i - a_i) < \delta$.

* f је апсолутно непрекидно на линијана (ACL) у G
ако је за сваки правоугаоник $R = \{x + iy : a < x < b, c < y < d\}$
 $\bar{R} \subseteq G$, f апсолутно непр као $f|_x$ по x на скоро свим
сегментима $I_y = \{x + iy : a < x < b\}$ и као $f|_y$ по y на скоро свим
сегментима $I_x = \{x + iy : c < y < d\}$.



* Сингуларна функција: $f|_x$ ограничена варијације и/или извод 0 у скоро свим
тачкама интервала I (не може бити AC и неконична сингуларна функција!
(јер за AC функцију важи $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx$)

Канторов скин:

(p_n) низ из $(0, 1)$

из средине $[0, 1]$ избришемо отворен интервал I_{n1} дужине p_1

из средине преостала два интервала бришемо интервале

дужине $\frac{1}{2} \cdot p_2 (1 - p_1)$ I_{21} и I_{22}

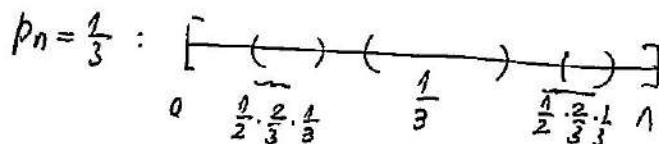
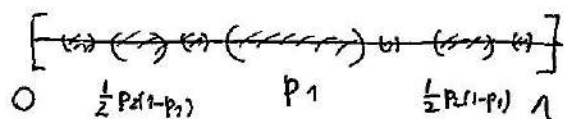
$\vdots$

у сваком кораку из средине 2^{n-1} интервала бришемо отворене

интервале дужине $\frac{1}{2^{n-1}} \cdot p_n (1 - p_1)(1 - p_2) \dots (1 - p_{n-1})$ $I_{n1}, I_{n2}, \dots, I_{nk}, \dots, I_{n2^{n-1}}$

Канторов скин $E(p_1, p_2, \dots) := I \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_{nk}$

(за $p_n = \frac{1}{3}$ им I_{n1} дужине $\frac{1}{3}$ $\dots$ $I_{n1}, \dots, I_{n2^{n-1}}$ су дужине $\frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$
 I_{21}, I_{22} дужине $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{3}$



$$\begin{aligned}
 \ell(E) &= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \ell(I_{nk}) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} p_n(1-p_1) \dots (1-p_{n-1}) \\
 &= 1 - (p_1 + p_2(1-p_1) + p_3(1-p_1)(1-p_2) + \dots + p_n(1-p_1) \dots (1-p_{n-1}) + \dots) \\
 &= 1 - p_1 - p_2(1-p_1) - (p_3(1-p_1)(1-p_2) + \dots) \\
 &= (1-p_1)(1-p_2) - (p_3(1-p_1)(1-p_2) + \dots) \\
 &\vdots \\
 &= (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3) \dots (1-p_n) \dots \\
 &= \prod_{n=1}^{\infty} (1-p_n)
 \end{aligned}$$

прецизије:

$$\begin{aligned}
 S_N &= 1 - \sum_{n=1}^N p_n(1-p_1) \dots (1-p_{n-1}) = 1 - p_1 - p_2(1-p_1) - p_3(1-p_1)(1-p_2) - \dots - p_N(1-p_1) \dots (1-p_{N-1}) \\
 &= (1-p_2)(1-p_1) - p_3(1-p_1)(1-p_2) - \dots - p_N(1-p_1) \dots (1-p_{N-1}) \\
 &= \dots = (1-p_1)(1-p_2) \dots (1-p_N)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \prod_{n=1}^{\infty} (1-p_n)$$

$$\text{за } p_n = \frac{1}{3} \text{ је } \ell(E) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

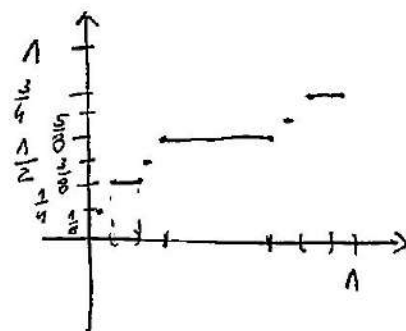
Дефинишемо функцију $g(x) = \frac{2^{k-1}}{2^n}$ за $x \in I_{nk}$

$$g(x) = \frac{1}{2} \text{ за } x \in I_{11}$$

$$g(x) = \frac{1}{4} \text{ за } x \in I_{21}, g(x) = \frac{3}{4} \text{ за } x \in I_{22}$$

$$g(x) = \frac{1}{8} \text{ за } x \in I_{31}, g(x) = \frac{3}{8} \text{ за } x \in I_{32} \text{ и } g(x) = \frac{5}{8} \text{ за } x \in I_{33}$$

...



g је неопадajuћа на $[0, 1]$, вредности су јој нуле у $[0, 1]$ због
за свако $x \in I$ дефинишемо $f(x) = \lim_{t \rightarrow x} g(t)$ (пошлoјте?)

f је непрекидна ф-ја?

f је константна на I_{nk} (иа је $f'(x) = 0$ за све $x \in I \setminus E$)

за $p_n = \frac{1}{3}$ је $\ell(E) = 0$, па је тада f сингуларна ф-ја?

f називамо Канторова ф-ја