

① Нема је f Континуирана функција и $\omega(z) = z + i f(x)$, $z = x + iy$.

а) Показати да је ω хомеоморфизам квадрата $Q = [0,1] \times [0,1]$ на слику.



$$\omega(z) = z + i f(x) = x + i(y + f(x)) \quad z = x + iy$$

ω је нејединствено (јер је f нејединствено и 1 је нејединствено)

$$\omega^{-1} : \omega(z_1) = \omega(z_2) \Rightarrow x_1 + i(y_1 + f(x_1)) = x_2 + i(y_2 + f(x_2))$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 + f(x_1) = y_2 + f(x_2)$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$$

$$\Rightarrow z_1 = z_2$$

ω^{-1} ?

$$\omega(z) = z + i f(x) = \underline{z} = x + iy$$

$$X = x, Y = y + f(x)$$

$$x = X, Y = y + f(x) \Rightarrow y = Y - f(X)$$

$$\Rightarrow \omega^{-1}(z) = X + i(Y - f(X))$$

$$\text{тј. } \omega^{-1}(z) = x + i(y - f(x))$$

ω^{-1} је такође нејединствено!

(ω гласи да је f по y ос, ω^{-1} одузима f по y ос)

$\Rightarrow \omega$ јесте хомеоморфизам Q на $\omega(Q)$.

б) Показати да је $\omega_{\bar{z}} = 0$ скоро свуда на Q .

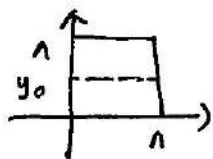
$$\omega_{\bar{z}} = \frac{1}{z} (\omega_x + i \omega_y) \quad \omega_x = 1 + i f'(x) \quad \text{за скоро све } x \in [0,1]$$

$$\omega_x = 1 \quad \text{за скоро све } x \in [0,1]$$

$$\omega_y = i \quad \text{за све } y \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \omega_{\bar{z}} = \frac{1}{z} (1 + i^2) = 0 \quad \text{за скоро све } z \in Q$$

6) Показати да ω не задовољава услов АСЛ.



$y_0 \in [0, 1]$ фиксирани

(a_i, b_i) низ непересецајућих интервала на јуни

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = y_0, 0 < \operatorname{Re} z < 1\} = L_{y_0}$$

$$b_i = b_i' + i y_0, b_i' \in (0, 1)$$

$$a_i = a_i' + i y_0, a_i' \in (0, 1)$$

$$\begin{aligned} \omega(b_i) - \omega(a_i) &= b_i + i f(b_i') - a_i - i f(a_i') \\ &= b_i' - a_i' + i (f(b_i') - f(a_i')) \end{aligned}$$

Пошто f није АС на $[0, 1]$, то ни

ω неће бити АС, јер неће бити АС

ни на једној јуни L_{y_0} !

$$|\omega(b_i) - \omega(a_i)|^2 = |b_i' - a_i'|^2 + |f(b_i') - f(a_i')|^2$$

(a_i', b_i') је низ непересецајућих интервала на $[0, 1]$

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0) \exists (b_i' - a_i') < \delta$$

$$\text{и } \sum |f(b_i') - f(a_i')| \geq \varepsilon$$

миш.

Закле, претпостављамо да није
квазиконформно?

Приметимо да је рестрикција $f|_Q$ на сваки
 правоугаоник $R_{n,k} = \{x+iy : x \in I_{n,k}, y \in J\}$
 трансляција.

$\cup R_{n,k}$ садржи скоро све тачке из Q

$$Df(z) = (|w_z| + |w_{\bar{z}}|) \cdot \frac{1}{|w_z| - |w_{\bar{z}}|} = 1 \quad \text{за скоро све } z \in Q$$

тј. Df је скоро свуда ограничено.

Али w није квазиконформно, јер
 није АС!

Фенелове неједнакости

Q квадрилатерал

$$\delta_a = \delta_a(Q) = \inf_{C \in \mathcal{C}_a} \ell(C), \quad \delta_b = \delta_b(Q) = \inf_{C \in \mathcal{C}_b} \ell(C)$$

$\mathcal{C}_a$ фамилија отворених Жорданових лукова

који спајају а стране квад. Q (унутар Q)

$\mathcal{C}_b$ - спајају б стране (унутар Q)

$M(Q)$ модул квадрилатерала

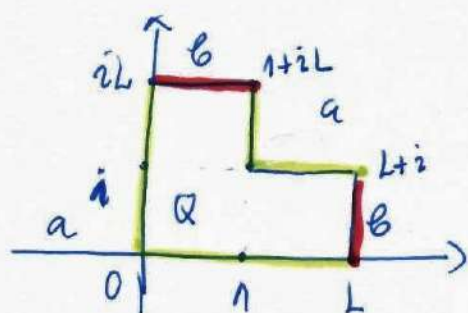
$$\frac{\delta_b(Q)^2}{m(Q)} \leq M(Q) \leq \frac{m(Q)}{\delta_a(Q)^2}$$

= важи ако је
 Q правоугаоник

$$m(Q) = \iint_Q d\sigma, \quad \ell(C) = \int_C |dz|$$

примери:

1) $Q = Q(L+i, 1+iL, iL, L)$, Q на слици, $L > 1$



$$\Delta a = 1$$

$$\Delta b = L-1 + L-1 = 2L-2$$

$$m(Q) = 1 + 2 \cdot (L-1) = 2L-1$$

Ренієлова неједнакост:

$$\frac{(2L-2)^2}{2L-1} \leq M(Q) \leq \frac{2L-1}{1}$$

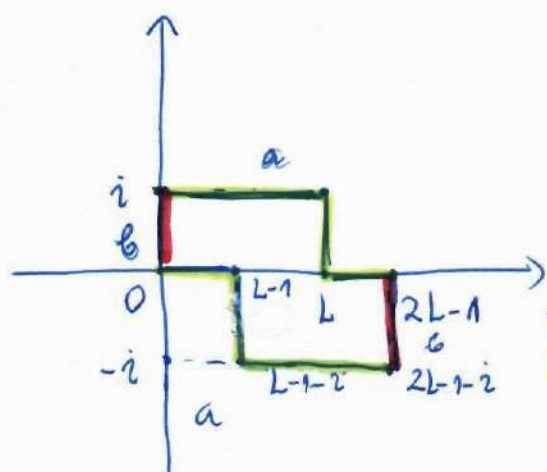
$$\frac{(2L-2)^2}{(2L-1)2L} \leq \frac{M(Q)}{2L} \leq \frac{2L-1}{2L} \quad / \lim_{L \rightarrow \infty}$$

$$\Rightarrow \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{M(Q)}{2L} = 1$$

интериор-а страна
мултиплицира-в страна

3) $L > 1$ уловни ш. пвмена $0, L-1, L-1-i, 2L-1-i, 2L-1, L, L+i, i$

$$Q = Q(2L-1, i, 0, 2L-1-i)$$



$$\Delta a = 1$$

$$\Delta b = 2L-1$$

$$m(Q) = L \cdot 1 + L \cdot 1 = 2L$$

$$\frac{\Delta b(Q)^2}{m(Q)} \leq M(Q) \leq \frac{m(Q)}{\Delta a(Q)^2} \quad (\text{Реліа})$$

$$\frac{(2L-1)^2}{2L} \leq M(Q) \leq \frac{2L}{1}$$

$$\frac{(2L-1)^2}{2L \cdot 2L} \leq \frac{M(Q)}{2L} \leq 1$$

$$\Rightarrow \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{M(Q)}{2L} = 1$$