

Билинеарна пресликавања

(други назив: Мобијусове трансформације)

$\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ Риманова сфера (или проширена комплексна равнина)

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$ такви да је $ad - bc \neq 0$

$f: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$

$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ се назива билинеарно пресликавање

$$f(\infty) = \begin{cases} \frac{a}{c}, & c \neq 0 \\ \infty, & c = 0 \end{cases} \quad f\left(\frac{-d}{c}\right) = \infty \text{ за } c \neq 0$$

f је бијекција (проверити!)

$$\begin{aligned} \underline{c \neq 0}: f(z) &= \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{c}(cz+d) - \frac{ad}{c} + b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cz+d)} \\ &= \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c} \cdot \frac{1}{c(z+\frac{d}{c})} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \left(\frac{1}{z+\frac{d}{c}}\right) \end{aligned}$$

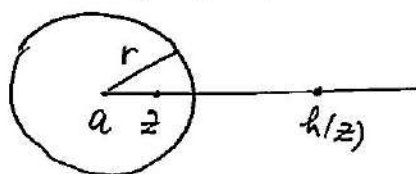
Композиција је
транслације,
ротације, хомотеције
симетрије и инверзије

$c = 0$: $f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ линеарно пресликавање

- 1) $w_1(z) = z + \frac{d}{c}$ транслација
- 2) $w_2(w_1) = \frac{1}{w_1}$ инверзија у односу на јединичну кружницу са центром у 0
- 3) $w_3(w_2) = \bar{w}_2$ симетрија у односу на x осу (рефлексија)
- 4) $w_4(w_3) = \frac{bc-ad}{c^2} \cdot w_3$ композиција ротације и хомотеције ($\frac{bc-ad}{c^2} = A = |A|e^{i\arg A}$)
- 5) $w_5(w_4) = \frac{a}{c} + w_4$ транслација

$$\boxed{f = w_5 \circ w_4 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_1}$$

* Инверзија у односу на $K = \partial D(a, r)$



h инверзија

$$|z-a| \cdot |h(z)-a| = r^2$$

a, z и $h(z)$ су на истој полуправој $\Rightarrow \arg(z-a) = \arg(h(z)-a)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow h(z)-a &= |h(z)-a| e^{i\arg(h(z)-a)} = \frac{r^2}{|z-a|} \cdot e^{i\arg(z-a)} = \frac{r^2}{|z-a|} \cdot \frac{z-a}{|z-a|} \\ &= \frac{r^2(z-a)}{|z-a|^2} = \frac{r^2(z-a)}{(z-a)\overline{(z-a)}} = \frac{r^2}{\overline{z-a}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{h(z) = a + \frac{r^2}{\overline{z-a}}}$$

Формула инверзије

Специјално: $a=0, r=1$

$$h(z) = \frac{1}{\bar{z}}$$

$$D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}$$

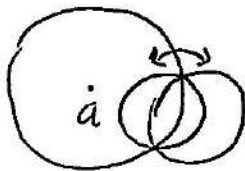
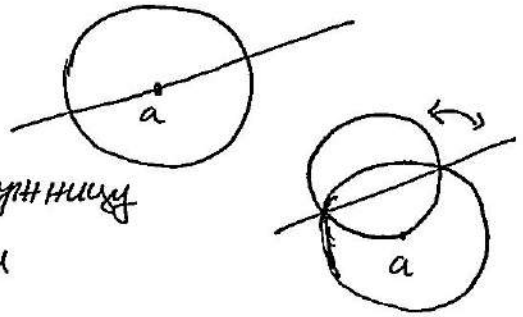
формула инверзије: $h(z) = \frac{r^2}{\bar{z}-\bar{a}} + a$

$$h: \begin{matrix} \infty \rightarrow a \\ a \rightarrow \infty \end{matrix}$$

инверзију називамо и симetriја у односу на кружницу

Особине инверзије:

1. Тачке из унутрашњости $D(a, r)$ се сликају у тачке из спољашњости и обротно.
2. Тачке са рубом $\partial D(a, r)$ су фиксне
3. Права која садржи a се слика на себе
4. Права која не садржи a се слика на кружницу која садржи a и пресеке тачке праве и кружнице.
5. Кружница која садржи a се слика у праву која не садржи a
6. Кружница која не садржи a се слика у кружницу која не садржи a .



Сматрамо да права садржи ∞ .

Такву праву свртавамо заједно са кружницом у појан уопштена кружница.

! Инверзија уопштене кружнице слика на уопштене кружнице.

Аналитички доказ:

Први час: једначина праве $\bar{A}z + A\bar{z} + c = 0$, $A \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{R}$

једначина кружнице $|z|^2 + \bar{A}z + A\bar{z} + c = 0$, $A \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{R}$

Једначина уопштене кружнице је онда:

$$B|z|^2 + \bar{A}z + A\bar{z} + c = 0, A \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{R}$$

($B \in \mathbb{R}$ нпр. али можемо истражити и да буде 0 или 1).

$$\left. \begin{aligned} B|z|^2 + \bar{A}z + A\bar{z} + C &= 0 \text{ се слика инверзијом } \zeta(z) = \frac{1}{z} = w \text{ на :} \\ B \cdot \left| \frac{1}{w} \right|^2 + \bar{A} \cdot \frac{1}{w} + A \cdot \frac{1}{\bar{w}} + C &= 0 \quad | \cdot |w|^2 \\ B + \bar{A} \cdot w + A \bar{w} + C|w|^2 &= 0 \text{ описује општену кружницу} \end{aligned} \right\} (*)$$

Једначина $B|z|^2 + \bar{A}z + A\bar{z} + C = 0$:

- За $B \neq 0$ представља кружницу и за $C \neq 0$ она ^{не} садржи 0, а за $C = 0$ она садржи 0
- За $B = 0$ представља праву која за $C \neq 0$ не садржи 0, а за $C = 0$ садржи 0

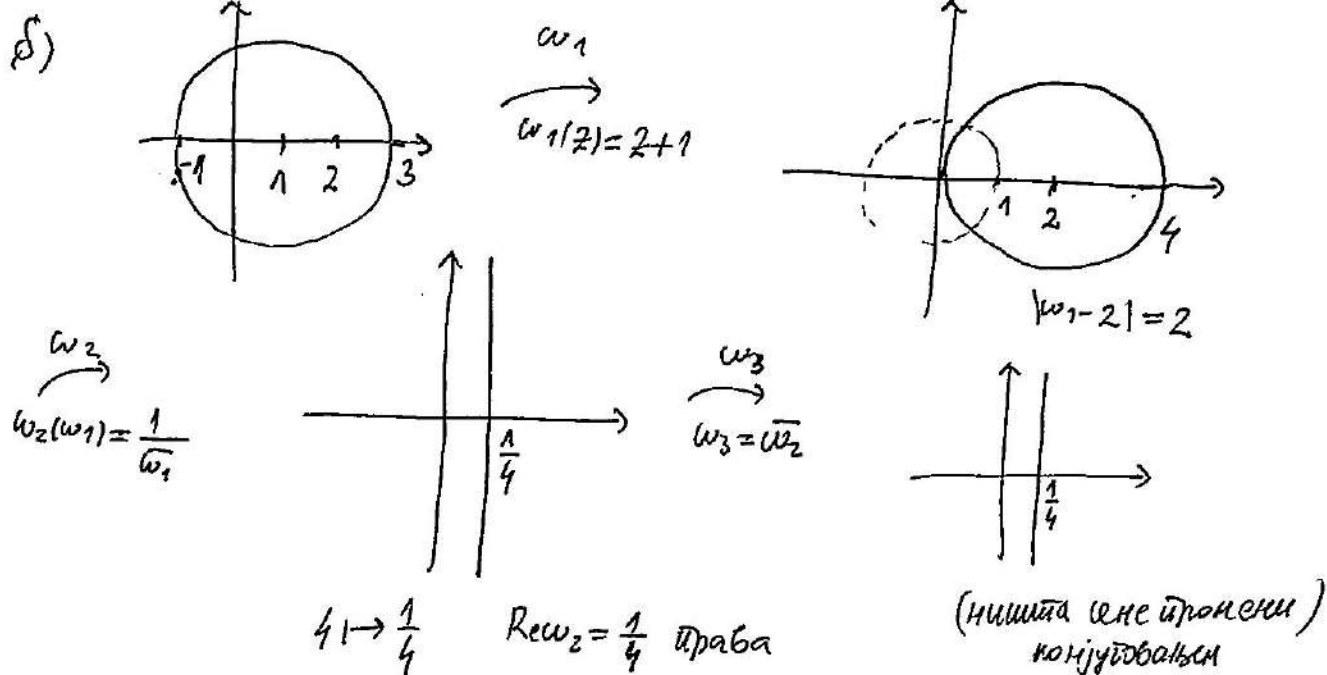
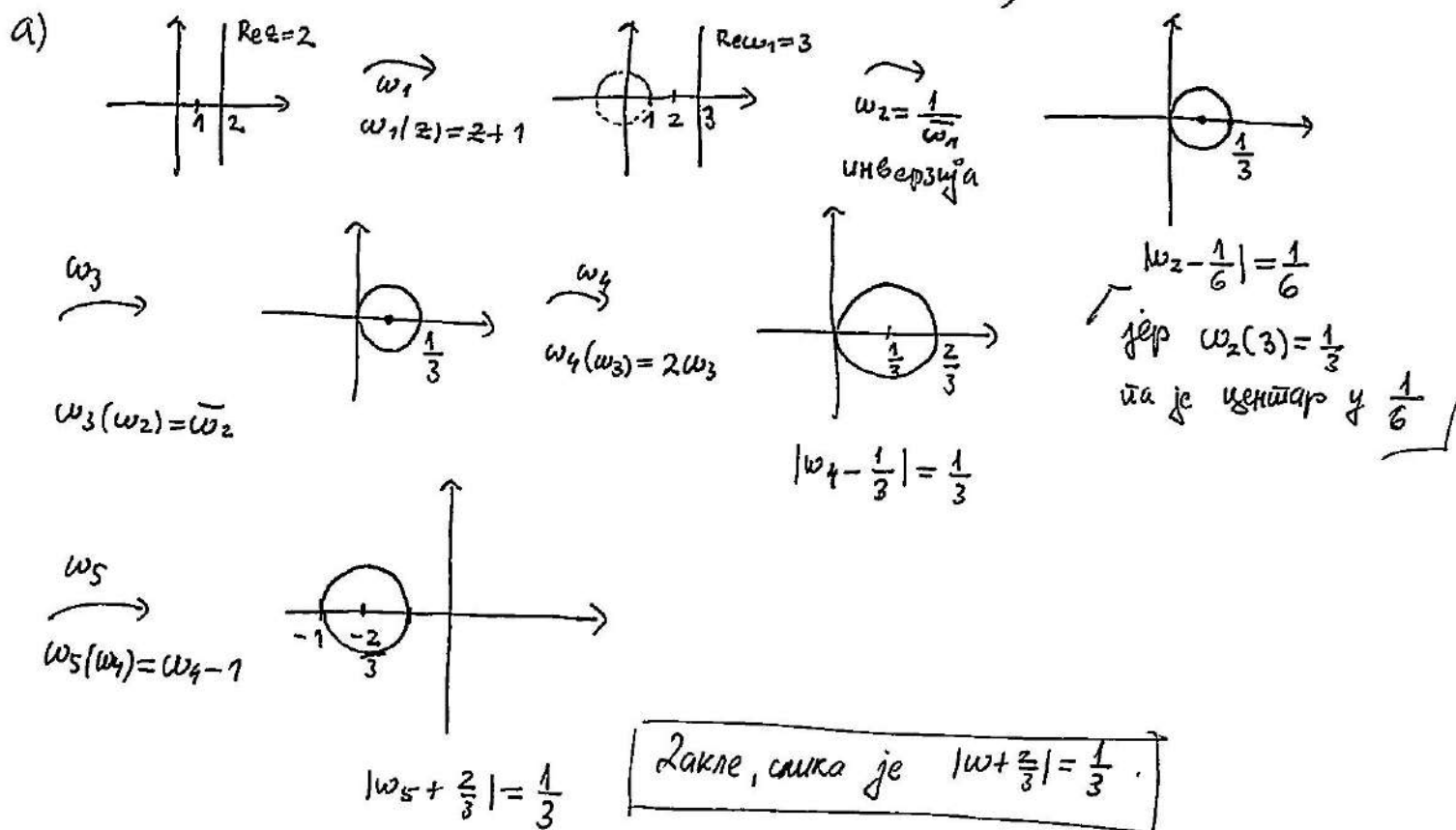
Сада је јасно да из (*) добијемо да важи 3. 4. 5. и 6. (за случај $a=0$)
специјално

а) функцијом $f(z) = \frac{1-z}{1+z}$ пресликавати

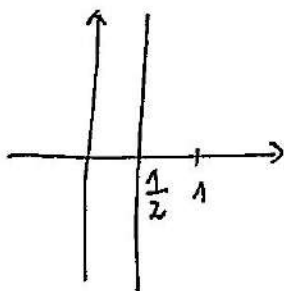
а) праву $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 2\}$

б) кружницу $\{z \in \mathbb{C} : |z-1|=2\}$

$$f(z) = \frac{1-z}{1+z} = \frac{-(1+z)+2}{1+z} = -1 + \frac{2}{1+z} = -1 + 2 \cdot \overline{\left(\frac{1}{1+z}\right)}$$



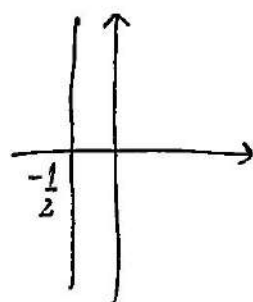
$$\omega_4 = 2\omega_3$$



$$\operatorname{Re} \omega_4 = \frac{1}{2}$$

$$\omega_5$$

$$\omega_5(\omega_4) = \omega_4 - 1$$



$$\operatorname{Re} \omega_5 = -\frac{1}{2}$$

Закључак је права $\operatorname{Re} \omega = -\frac{1}{2}$.

Теорема 1: Нека су $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ различите тачке и $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \mathbb{C}$ такође различите тачке у Римановој сфери $\bar{\mathbb{C}}$. Тада постоји јединствено билинеарно пресликавање $\omega = f(z)$ ил. је $f(z_i) = \omega_i$, $i=1, 2, 3$ и ванни:

$$\frac{\omega - \omega_2}{\omega - \omega_3} : \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 - \omega_3} = \frac{z - z_2}{z - z_3} : \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}.$$

(израз у коме се појављује ∞ мењам са 1)

② Одредити билинеарно пресликавање f тако да важи:

$f(i) = 0$, $f(-i) = \infty$ и $f(0) = -1$. Затим пресликавањем f пресликајте област $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$.

$$\omega = f(z)$$

$$\left. \begin{array}{ll} z_1 = i & \omega_1 = 0 \\ z_2 = -i & \omega_2 = \infty \\ z_3 = 0 & \omega_3 = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\omega - \infty}{\omega - (-1)} : \frac{0 - \infty}{0 - (-1)} = \frac{z - (-i)}{z - 0} : \frac{i - (-i)}{i - 0}$$

$$\frac{\omega - \infty}{0 - \infty} : \frac{\omega - (-1)}{0 - (-1)} = \frac{z + i}{z} : \frac{2i}{i}$$

$$1 : \frac{\omega + 1}{1} = \frac{z + i}{z} : 2$$

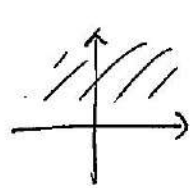
$$(\omega + 1) \frac{z + i}{z} = 2$$

$$\omega + 1 = \frac{2z}{z + i}$$

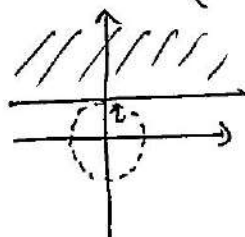
$$\omega = \frac{2z}{z + i} - 1 = \frac{2z - z - i}{z + i} = \frac{z - i}{z + i}$$

$$\boxed{f(z) = \frac{z - i}{z + i}}$$

$$\phi(z) = \frac{z-i}{z+i} = \frac{z+i-2i}{z+i} = 1 - 2i \cdot \frac{1}{z+i}$$

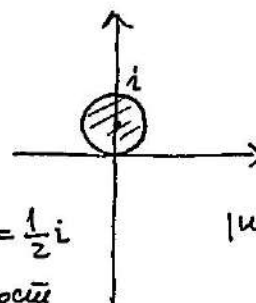


$$\omega_1 = z+i$$



$$\text{Im } \omega_1 > 1$$

$$\omega_2(\omega_1) = \frac{1}{\omega_1}$$

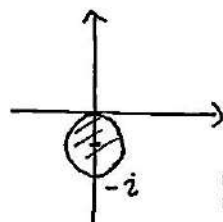


$$|\omega_2 - \frac{i}{2}| < \frac{1}{2}$$

$$2i \mapsto \frac{1}{-2i} = \frac{1}{2}i$$

$\Rightarrow$ унутрашњости
кривине је
линија правни

$$\omega_3(\omega_2) = \overline{\omega_2}$$

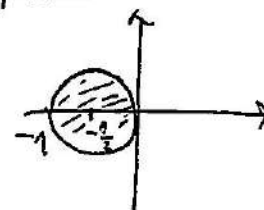


$$|\omega_3 + \frac{i}{2}| < \frac{1}{2}$$

$$\omega_4(\omega_3) = -i \omega_3$$

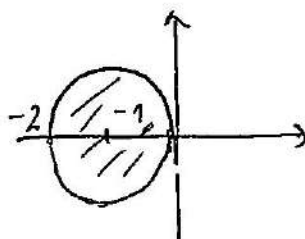
$$\omega_4(\omega_3) = e^{-i\frac{\pi}{2}} \omega_3$$

ротација за $-\frac{\pi}{2}$



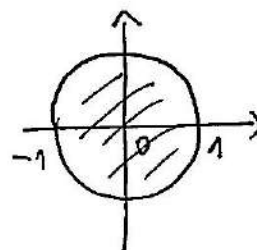
$$|\omega_4 + \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$$

$$\omega_5(\omega_4) = 2\omega_4$$



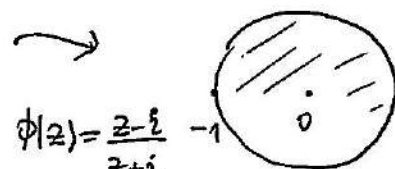
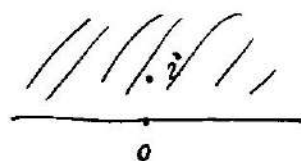
$$|\omega_5 + 1| < 1$$

$$\omega_6(\omega_5) = \omega_5 + 1$$



$$|\omega_6| < 1$$

Слика је јединични диск $|\omega| < 1$.



$$\phi(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

$$i \mapsto 0$$

$$-i \mapsto \infty$$

$$0 \mapsto -1$$

Теорема 2: Нека је K права или кружница у $\mathbb{C}$ и $\omega = \phi(z)$ билинеарно прешикавање. Тада су тачке z и z^* симетричне у односу на K ако су тачке $\phi(z)$ и $\phi(z^*)$ симетричне у односу на $\phi(K)$.

(симетрија у односу на кружницу је инверзија)