

ОДАБРАНА ПОГЛАВЉА АНАЛИЗЕ

Септембарски рок, 12.09.2018.

1. Нека су K и L тачке ивице AD и дијагонале AC паралелограма $ABCD$ такве да је $AK : KD = 1 : 3$, а $AL : LC = 1 : 4$. Користећи комплексне бројеве, доказати да су тачке K, L и B колинеарне.
2. Доказати да за $a, b \in \mathbb{D}$, где је $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, важи:
(a) $\left| \frac{a-b}{1-\bar{b}a} \right|^2 = 1 - \frac{(1-|a|^2)(1-|b|^2)}{|1-\bar{b}a|^2}$.
(б) $|1 - \bar{b}a|^2 \geq (1 - |a||b|)^2$.
(ц) $\left| \frac{|a|-|b|}{1-|a||b|} \right| \leq \left| \frac{a-b}{1-\bar{b}a} \right|$.
3. Нека је f холоморфна функција која слика диск $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ у диск $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, тако да је $f(0) = \frac{1+i}{2}$. Доказати да је $|f'(0)| \leq \frac{1}{2}$. Користећи неједнакост из претходног задатка (део под (ц)), доказати да је $\frac{2|z|-\sqrt{2}}{\sqrt{2}|z|-2} \leq |f(z)| \leq \frac{2|z|+\sqrt{2}}{\sqrt{2}|z|+2}$ за све $z \in \mathbb{D}$.
4. Дата је функција $u(x, y) = x \operatorname{sh} x \cos y - y \sin y \operatorname{ch} x + \cos x \operatorname{ch} y$. Доказати да је функција u хармонијска на $\mathbb{R}^2$. Да ли постоји цела функција f таква да је $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$, где је $z = x + iy$? Ако постоји, одредити све такве функције.
5. Одредити број решења једначине $z^5 + 3z^4 = 2z^2 + 1$ у прстену $P = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < 5\}$. Да ли је неко од тих решења реално?

ОДАБРАНА ПОГЛАВЉА АНАЛИЗЕ

Септембарски рок, 12.09.2018.

1. Нека су K и L тачке ивице AD и дијагонале AC паралелограма $ABCD$ такве да је $AK : KD = 1 : 3$, а $AL : LC = 1 : 4$. Користећи комплексне бројеве, доказати да су тачке K, L и B колинеарне.
2. Доказати да за $a, b \in \mathbb{D}$, где је $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, важи:
(a) $\left| \frac{a-b}{1-\bar{b}a} \right|^2 = 1 - \frac{(1-|a|^2)(1-|b|^2)}{|1-\bar{b}a|^2}$.
(б) $|1 - \bar{b}a|^2 \geq (1 - |a||b|)^2$.
(ц) $\left| \frac{|a|-|b|}{1-|a||b|} \right| \leq \left| \frac{a-b}{1-\bar{b}a} \right|$.
3. Нека је f холоморфна функција која слика диск $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ у диск $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, тако да је $f(0) = \frac{1+i}{2}$. Доказати да је $|f'(0)| \leq \frac{1}{2}$. Користећи неједнакост из претходног задатка (део под (ц)), доказати да је $\frac{2|z|-\sqrt{2}}{\sqrt{2}|z|-2} \leq |f(z)| \leq \frac{2|z|+\sqrt{2}}{\sqrt{2}|z|+2}$ за све $z \in \mathbb{D}$.
4. Дата је функција $u(x, y) = x \operatorname{sh} x \cos y - y \sin y \operatorname{ch} x + \cos x \operatorname{ch} y$. Доказати да је функција u хармонијска на $\mathbb{R}^2$. Да ли постоји цела функција f таква да је $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$, где је $z = x + iy$? Ако постоји, одредити све такве функције.
5. Одредити број решења једначине $z^5 + 3z^4 = 2z^2 + 1$ у прстену $P = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < 5\}$. Да ли је неко од тих решења реално?