

ОДАБРАНА ПОГЛАВЉА АНАЛИЗЕ

Јунски рок, 22.06.2016.

1. У равни су дати троугао $\triangle A_1A_2A_3$ и тачка P_0 . Конструирајмо тачке P_1, P_2 и P_3 на следећи начин:

P_1 се добија ротацијом тачке P_0 око тачке A_1 у смеру казаљке на сату за $\frac{2\pi}{3}$,
 P_2 се добија ротацијом тачке P_1 око тачке A_2 у смеру казаљке на сату за $\frac{2\pi}{3}$,
 P_3 се добија ротацијом тачке P_2 око тачке A_3 у смеру казаљке на сату за $\frac{2\pi}{3}$.
Доказати да важи: $P_0 = P_3$ ако је $\triangle A_1A_2A_3$ једнакостраничан.

2. Нека је f холоморфна функција која слика $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > \operatorname{Re} z\}$ на диск $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и важи $f(i) = 0$. Доказати да је $|f(-1)| \leq \cos \frac{\pi}{4}$ и $|f'(i)| \leq \cos \frac{\pi}{4}$.

3. За произвољне реалне бројеве $x, y \in (e^{-3}, e)$ доказати да важи неједнакост:

$$\left| \ln \frac{x^x}{y^y} \right| \leq 2|x - y|.$$

4. Нека је дат угао величине $\frac{\pi}{5}$. Одредити фигуру највеће површине која се може од њега одсећи кривом дужине l . Колико износи површина добијене фигуре?

(Користити теорему са предавања: Од свих затворених кривих дате дужине L , фигуру највеће површине одређује кружница. Такође користити чињеницу да је $10\frac{\pi}{5} = 2\pi$, тј. 10 датих углова чине пун угао.)

5. Израчунати суму

$$S(x) = \binom{n}{1} \sqrt{3} \sin x + \binom{n}{2} (\sqrt{3})^2 \sin 2x + \binom{n}{3} (\sqrt{3})^3 \sin 3x + \cdots + \binom{n}{n} (\sqrt{3})^n \sin nx.$$

Уз помоћ добијене суме доказати:

$$\binom{n}{1} - 3\binom{n}{3} + 9\binom{n}{5} - 27\binom{n}{7} + \cdots = \frac{2^n}{\sqrt{3}} \sin \frac{n\pi}{3}.$$

ОДАБРАНА ПОГЛАВЉА АНАЛИЗЕ

Јунски рок, 22.06.2016.

1. У равни су дати троугао $\triangle A_1A_2A_3$ и тачка P_0 . Конструирајмо тачке P_1, P_2 и P_3 на следећи начин:

P_1 се добија ротацијом тачке P_0 око тачке A_1 у смеру казаљке на сату за $\frac{2\pi}{3}$,
 P_2 се добија ротацијом тачке P_1 око тачке A_2 у смеру казаљке на сату за $\frac{2\pi}{3}$,
 P_3 се добија ротацијом тачке P_2 око тачке A_3 у смеру казаљке на сату за $\frac{2\pi}{3}$.
Доказати да важи: $P_0 = P_3$ ако је $\triangle A_1A_2A_3$ једнакостраничан.

2. Нека је f холоморфна функција која слика $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > \operatorname{Re} z\}$ на диск $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и важи $f(i) = 0$. Доказати да је $|f(-1)| \leq \cos \frac{\pi}{4}$ и $|f'(i)| \leq \cos \frac{\pi}{4}$.

3. За произвољне реалне бројеве $x, y \in (e^{-3}, e)$ доказати да важи неједнакост:

$$\left| \ln \frac{x^x}{y^y} \right| \leq 2|x - y|.$$

4. Нека је дат угао величине $\frac{\pi}{5}$. Одредити фигуру највеће површине која се може од њега одсећи кривом дужине l . Колико износи површина добијене фигуре?

(Користити теорему са предавања: Од свих затворених кривих дате дужине L , фигуру највеће површине одређује кружница. Такође користити чињеницу да је $10\frac{\pi}{5} = 2\pi$, тј. 10 датих углова чине пун угао.)

5. Израчунати суму

$$S(x) = \binom{n}{1} \sqrt{3} \sin x + \binom{n}{2} (\sqrt{3})^2 \sin 2x + \binom{n}{3} (\sqrt{3})^3 \sin 3x + \cdots + \binom{n}{n} (\sqrt{3})^n \sin nx.$$

Уз помоћ добијене суме доказати:

$$\binom{n}{1} - 3\binom{n}{3} + 9\binom{n}{5} - 27\binom{n}{7} + \cdots = \frac{2^n}{\sqrt{3}} \sin \frac{n\pi}{3}.$$