

ОДАБРАНА ПОГЛАВЉА АНАЛИЗЕ

Јунски рок, 12.06.2018.

1. Нека је $ABCDEF$ конвексан шестоугао код кога је $AB \parallel DE$. Ако су K и L средишта дужи које спајају средишта преостала два пара наспрамних страница, доказати да је $K = L$ акко $AB \cong DE$. Користити комплексне бројеве.
2. Нека је f холоморфна функција која слика полураван $A_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ у полураван $A_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 0\}$ тако да је $f(1) = -1$. Доказати да је $|f'(1)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ и да је $|f(1+2i)| \leq 3+2\sqrt{2}$. Да ли може бити $f(4) = -i$?
3. Дата је функција $u(x, y) = xe^x \cos y - ye^x \sin y + (x-1) \sin x \operatorname{sh} y - y \cos x \operatorname{ch} y$. Доказати да је функција u хармонијска на $\mathbb{R}^2$. Да ли постоји цела функција f таква да је $\operatorname{Ref}(z) = u(x, y)$, где је $z = x + iy$? Ако постоји, одредити све такве функције.
4. Одредити број нула функције $h(z) = z^{2018} + 2e^{iz} + 5$ у горњој полуравни $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$.
5. Израчунати суму

$$S(x) = \binom{18}{1} \sin x + \binom{18}{2} \sin 2x + \binom{18}{3} \sin 3x + \cdots + \binom{18}{17} \sin 17x + \binom{18}{18} \sin 18x,$$

а затим наћи вредност израза

$$\binom{18}{1} - \binom{18}{3} + \binom{18}{5} - \binom{18}{7} + \binom{18}{9} - \binom{18}{11} + \binom{18}{13} - \binom{18}{15} + \binom{18}{17}.$$

ОДАБРАНА ПОГЛАВЉА АНАЛИЗЕ

Јунски рок, 12.06.2018.

1. Нека је $ABCDEF$ конвексан шестоугао код кога је $AB \parallel DE$. Ако су K и L средишта дужи које спајају средишта преостала два пара наспрамних страница, доказати да је $K = L$ акко $AB \cong DE$. Користити комплексне бројеве.
2. Нека је f холоморфна функција која слика полураван $A_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ у полураван $A_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 0\}$ тако да је $f(1) = -1$. Доказати да је $|f'(1)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ и да је $|f(1+2i)| \leq 3+2\sqrt{2}$. Да ли може бити $f(4) = -i$?
3. Дата је функција $u(x, y) = xe^x \cos y - ye^x \sin y + (x-1) \sin x \operatorname{sh} y - y \cos x \operatorname{ch} y$. Доказати да је функција u хармонијска на $\mathbb{R}^2$. Да ли постоји цела функција f таква да је $\operatorname{Ref}(z) = u(x, y)$, где је $z = x + iy$? Ако постоји, одредити све такве функције.
4. Одредити број нула функције $h(z) = z^{2018} + 2e^{iz} + 5$ у горњој полуравни $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$.
5. Израчунати суму

$$S(x) = \binom{18}{1} \sin x + \binom{18}{2} \sin 2x + \binom{18}{3} \sin 3x + \cdots + \binom{18}{17} \sin 17x + \binom{18}{18} \sin 18x,$$

а затим наћи вредност израза

$$\binom{18}{1} - \binom{18}{3} + \binom{18}{5} - \binom{18}{7} + \binom{18}{9} - \binom{18}{11} + \binom{18}{13} - \binom{18}{15} + \binom{18}{17}.$$