

ОДАБРАНА ПОГЛАВЉА АНАЛИЗЕ

Јануарски рок, 25.01.2018.

1. Нека су $ALKB$ и $ACPQ$ квадрати споља конструисани над ивицама AB и AC троугла ABC и нека је X средиште странице BC . Користећи комплексне бројеве, доказати да је $AX \perp LQ$ и $LQ = 2AX$.
2. Нека је f холоморфна функција која слика полураван $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \operatorname{Im} z\}$ у диск $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ тако да је $f(1) = \frac{i}{2}$. Доказати да је $|f'(1)| \leq \frac{3\sqrt{2}}{8}$. Да ли може бити $f(2) = \frac{4}{5}i$? А $f(2) = 0$?
3. Дата је функција $u(x, y) = (x^3 - 3xy^2)e^{-y} \cos x + (y^3 - 3x^2y)e^{-y} \sin x$. Доказати да је функција u хармонијска на $\mathbb{R}^2$. Да ли постоји цела функција f таква да је $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$, где је $z = x + iy$? Ако постоји, одредити све такве функције.
4. Одредити број решења једначине $z + 7e^{-z} = 2018$ у области $\Pi = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$.
5. За $\cos x \neq 0$ израчунати суму

$$S = \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} + \frac{\cos 3x}{\cos^3 x} + \cdots + \frac{\cos nx}{\cos^n x}.$$

ОДАБРАНА ПОГЛАВЉА АНАЛИЗЕ

Јануарски рок, 25.01.2018.

1. Нека су $ALKB$ и $ACPQ$ квадрати споља конструисани над ивицама AB и AC троугла ABC и нека је X средиште странице BC . Користећи комплексне бројеве, доказати да је $AX \perp LQ$ и $LQ = 2AX$.
2. Нека је f холоморфна функција која слика полураван $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \operatorname{Im} z\}$ у диск $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ тако да је $f(1) = \frac{i}{2}$. Доказати да је $|f'(1)| \leq \frac{3\sqrt{2}}{8}$. Да ли може бити $f(2) = \frac{4}{5}i$? А $f(2) = 0$?
3. Дата је функција $u(x, y) = (x^3 - 3xy^2)e^{-y} \cos x + (y^3 - 3x^2y)e^{-y} \sin x$. Доказати да је функција u хармонијска на $\mathbb{R}^2$. Да ли постоји цела функција f таква да је $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$, где је $z = x + iy$? Ако постоји, одредити све такве функције.
4. Одредити број решења једначине $z + 7e^{-z} = 2018$ у области $\Pi = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$. Да ли постоји реално решење ове једначине и зашто?
5. За $\cos x \neq 0$ израчунати суму

$$S = \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} + \frac{\cos 3x}{\cos^3 x} + \cdots + \frac{\cos nx}{\cos^n x}.$$