

ОДАБРАНА ПОГЛАВЉА АНАЛИЗЕ
Фебруарски рок, 18.02.2016.

1. Над страницама троугла $\triangle ABC$ конструисани су са спољашње стране једнакостранични троуглови $\triangle ADB$, $\triangle BEC$ и $\triangle CFA$. Доказати да су тежишта тих троуглова темена једнакостраничног троугла (Наполеонов проблем).
2. Нека је f холоморфна функција која слика горњу полураван $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ у десну полураван $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ и важи $f(i) = 2$. Доказати да је $1 \leq |f(2i)| \leq 4$.
3. Нека су $a, b \in \mathbb{R}$ произвољни. Доказати да је:
 - а) $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$.
 - б) Ако је $0 < a < b$ показати да је $\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$
4. Нека је дат троугао $\triangle ABC$ чије су странице a, b и c . Ако је његова површина P доказати да је:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}P$$

5. Доказати да је:

$$x^{2n+1} - 1 = (x - 1) \prod_{k=1}^n \left(x^2 - 2x \cos \frac{2k\pi}{2n+1} + 1 \right).$$

Користећи овај идентитет доказати једнакост:

$$\prod_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{1}{2^n}.$$