

ОДАБРАНА ПОГЛАВЉА АНАЛИЗЕ

Фебруарски рок, 11.02.2018.

- Нека су H и O ортоцентар и центар описаног круга троугла $\triangle ABC$.
 - Ако су a, b и c комплексни бројеви који одговарају редом теменима A, B и C троугла $\triangle ABC$ (под претпоставком да је троугао смештен у комплексну раван тако да се тачка O поклапа са координатним почетком), доказати да је $h = a + b + c$, где је h комплексан број који одговара тачки H .
 - Ако је $AH = AO$, користећи део под a), наћи угао $\angle BAC = \alpha$.
- Нека је f холоморфна функција која слика јединични диск $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ у полураван $\Pi^- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$ тако да је $f(-\frac{i}{3}) = -\frac{i}{3}$. Доказати да је $|f'(-\frac{i}{3})| \leq \frac{3}{4}$ и да је $\frac{1}{6} \leq |f(0)| \leq \frac{2}{3}$.
- Дата је функција $u(x, y) = x \cosh y (\cos x - 2y \sin x) + \sinh y (y \sin x - \cos x (x^2 - y^2))$. Доказати да је функција u хармонијска на $\mathbb{R}^2$. Да ли постоји цела функција f таква да је $\operatorname{Ref}(z) = u(x, y)$, где је $z = x + iy$? Ако постоји, одредити све такве функције.
- Колико решења у прстену $\Pi = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}$ има једначина $z^{2018} + 2018z^2 = 2015z^3 + 1$? Колико дата једначина има реалних решења унутар диска $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$?
- Ако је $(1+z)^6 + z^6 = 0$, доказати да је $\operatorname{Re} z = -\frac{1}{2}$. Испитати да ли за сваки природан број n важи импликација

$$(1+z)^n + z^n = 0 \Rightarrow \operatorname{Re} z = -\frac{1}{2}.$$

ОДАБРАНА ПОГЛАВЉА АНАЛИЗЕ

Фебруарски рок, 11.02.2018.

- Нека су H и O ортоцентар и центар описаног круга троугла $\triangle ABC$.
 - Ако су a, b и c комплексни бројеви који одговарају редом теменима A, B и C троугла $\triangle ABC$ (под претпоставком да је троугао смештен у комплексну раван тако да се тачка O поклапа са координатним почетком), доказати да је $h = a + b + c$, где је h комплексан број који одговара тачки H .
 - Ако је $AH = AO$, користећи део под a), наћи угао $\angle BAC = \alpha$.
- Нека је f холоморфна функција која слика јединични диск $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ у полураван $\Pi^- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$ тако да је $f(-\frac{i}{3}) = -\frac{i}{3}$. Доказати да је $|f'(-\frac{i}{3})| \leq \frac{3}{4}$ и да је $\frac{1}{6} \leq |f(0)| \leq \frac{2}{3}$.
- Дата је функција $u(x, y) = x \cosh y (\cos x - 2y \sin x) + \sinh y (y \sin x - \cos x (x^2 - y^2))$. Доказати да је функција u хармонијска на $\mathbb{R}^2$. Да ли постоји цела функција f таква да је $\operatorname{Ref}(z) = u(x, y)$, где је $z = x + iy$? Ако постоји, одредити све такве функције.
- Колико решења у прстену $\Pi = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}$ има једначина $z^{2018} + 2018z^2 = 2015z^3 + 1$? Колико дата једначина има реалних решења унутар диска $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$?
- Ако је $(1+z)^6 + z^6 = 0$, доказати да је $\operatorname{Re} z = -\frac{1}{2}$. Испитати да ли за сваки природан број n важи импликација

$$(1+z)^n + z^n = 0 \Rightarrow \operatorname{Re} z = -\frac{1}{2}.$$