

$$H(\Omega) = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ холоморфна}\}$$

Кошијева теорема и Кошијева интегрална формула

Кошијева т.

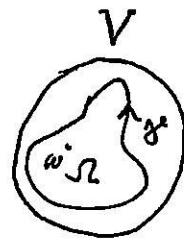
(T1) Нека је γ затворена и гео до гео тлашка крива у просто повезаној области Ω и $f \in H(\Omega)$. Тада важи:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Кошијева и.ф. (киф)

(T2) Нека је функција f холоморфна у неким отвореном скупу који садржи затворене ођрањене области $\Omega \subset \mathbb{C}$, чија је граница затворена, позитивно оријентисана и гео до гео тлашка крива γ . Ако је $w \in \Omega$ и $n \in \mathbb{N}_0$, тада важи:

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} dz.$$



$f \in H(V), V \supset \Omega$

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-w} dz \quad (\text{за } n=0) \quad 0! = 1$$

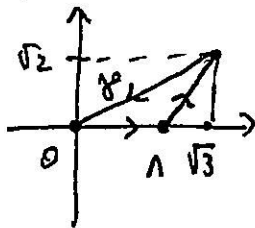
$$f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-w)^2} dz \quad (\text{за } n=1)$$

$\vdots$

(из T2 следи: f холон $\Rightarrow f$ бесконачно диф.)

(1) Израчунасти $\int_{\gamma} e^{-z^2} dz$, где је γ позитивно оријентисана граница троугла чија су штенена $\sqrt{3} + i\sqrt{2}$, 0 и 1.

$$I = \int_{\gamma} e^{-z^2} dz$$



$f(z) = e^{-z^2}$ холоморфна на $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ просто повезана

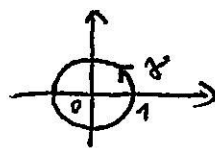
γ затворена гео до гео тлашка крива

$$\Rightarrow I = 0$$

(1)

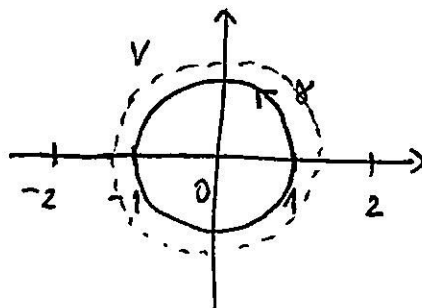
② Израчунајте $I = \int_{\gamma} \frac{e^z}{z^2 + 2z} dz$ при чему је γ позитивно оријентисана кружница са центром 0 и полупречником 1.

$$\gamma(t) = e^{it}, t \in [0, 2\pi]$$



$$f(z) = \frac{e^z}{z^2 + 2z} = \frac{e^z}{z(z+2)}$$

f је холоморфна на $\mathbb{C} \setminus \{-2, 0\}$



$g(z) = \frac{e^z}{z+2}$ је холоморфна на околности јед. диска V (истовремено напуштајући)

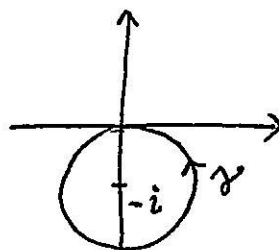
$$\text{киф} \Rightarrow I = \int_{\gamma} \frac{g(z)}{z} dz = \int_{\gamma} \frac{g(z)}{z-0} dz = \frac{2\pi i}{0!} g(0)$$

$$(g(0) = \frac{0!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(z)}{z-0} dz) \text{ киф}$$

$$I = 2\pi i \cdot \frac{e^0}{0+2} = \pi i$$

③ Израчунајте: $I = \int_{\gamma} \frac{\cos z}{z+i} dz$, при чему је $\gamma(t) = -i + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. (позит. оријентис.)

$f(z) = \cos z$ је холоморфна на $\mathbb{C}$
(иа и на околности
криве γ)



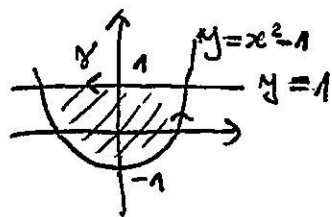
$$\text{киф} \Rightarrow \frac{0!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - (-i)} dz = f(-i)$$

$$\Rightarrow I = \int_{\gamma} \frac{\cos z}{z+i} dz = f(-i) \cdot 2\pi i = \cos(-i) \cdot 2\pi i$$

$$\cos(-i) = \frac{e^{i(-i)} + e^{-i(-i)}}{2} = \frac{e + e^{-1}}{2}$$

$$\Rightarrow I = \frac{e + \frac{1}{e}}{2} \cdot 2\pi i = i\pi(e + \frac{1}{e})$$

- ④ Израчунајте $\int_{\gamma} \frac{\cos z}{z^3} dz$ при чему је γ позитивно оријентисана тражица области ограничене кривом $y=1$ и $y=x^2-1$.



$f(z) = \cos z$ је холоморфна на околини криве γ

$$\frac{z!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-0)^3} dz \stackrel{\text{киф}}{=} f''(0)$$

$$I = \int_{\gamma} \frac{\cos z}{z^3} dz = \frac{2\pi i}{2} \cdot f''(0) = i\pi \cdot f''(0)$$

$$f(z) = \cos z, f'(z) = -\sin z, f''(z) = -\cos z$$

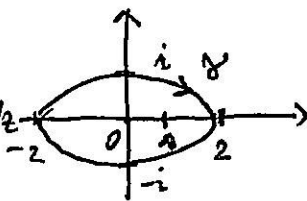
$$f''(0) = -\cos 0 = -1$$

$$\Rightarrow I = i\pi(-1) = -i\pi$$

- ⑤ Израчунајте $\int_{\gamma} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz$ при чему је γ позитивно оријентисана крива чија је једначина $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$.

$$f(z) = \frac{e^z}{z(1-z)^3} \text{ је холоморфна на } \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$$

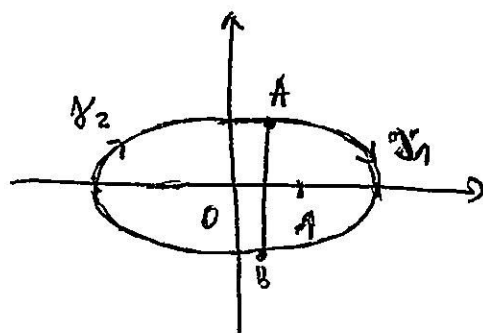
$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{BA} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \int_{AB} f(z) dz$$



$$\Gamma_1 = \gamma_1 \cup BA, \Gamma_2 = AB \cup \gamma_2$$

$$I_1 = \int_{\Gamma_1} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz$$

$$I_2 = \int_{\Gamma_2} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz$$



$$I_1 = \int_{\Gamma_1} \frac{-\frac{e^z}{z}}{(z-1)^3} dz \quad g_1(z) = \frac{-e^z}{z} \text{ је холокорфна на околинџи } \Gamma_1$$

(па околинџа се узме довољно
мала да не садржи 0)

$$\Rightarrow \text{киф} \quad \frac{2!}{2\pi i} \int_{\Gamma_1^+} \frac{g_1(z)}{(z-1)^3} dz = g_1''(1), \text{ где овде је } \Gamma_1$$

пошмљиво оријентисана
(у киф)

$$\int_{\Gamma_1} \frac{g_1(z)}{(z-1)^3} dz = - \int_{\Gamma_1^+} \frac{g_1(z)}{(z-1)^3} dz = -g_1''(1) \cdot \pi i$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_1} \frac{g_1(z)}{(z-1)^3} dz = e i \pi$$

$$g_1'(z) = \frac{-e^z z + e^z}{z^2}$$

$$g_1''(z) = e^z \frac{1-z}{z^2} + e^z \cdot \frac{-z^2 - 2z(1-z)}{z^3}$$

$$\boxed{g_1''(1) = -e}$$

$$I_2 = \int_{\Gamma_2} \frac{\frac{e^z}{(1-z)^3}}{z} dz \quad g_2(z) = \frac{e^z}{(1-z)^3} \text{ је холокорфна на околинџи } \Gamma_2$$

(где се довољно мала
да не садржи 1)

$$\Rightarrow \text{киф} \quad \frac{0!}{2\pi i} \int_{\Gamma_2^+} \frac{g_2(z)}{z} dz = g_2(0), \quad g_2(0) = \frac{e^0}{1} = 1$$

$$\int_{\Gamma_2^+} \frac{g_2(z)}{z} dz = 1 \cdot 2\pi i$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_2} \frac{g_2(z)}{z} dz = -2i\pi$$

$$\text{Значи, } \int_{\Gamma} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz = e i \pi - 2i \pi = (e-2)i \pi$$