

Конформна пресликавања у $\mathbb{C}$

$\Omega \subseteq \mathbb{C}$ област, $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ области

деф 1: $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ је конформно ако је холоморфна на Ω и $f'(z) \neq 0 \forall z \in \Omega$

деф 2: $f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ је конформно ако је f $1-1$ и холоморфна из Ω_1 на Ω_2 .

ОБЕ ДЕФ. НИСУ ЕКВИВАЛЕНТНЕ!

Наводи се да јер се у литератури срећу обе дефиниције.

Ми ћемо користити деф 2. (обрати пажњу у литератури о којој је деф. рех)

Лема 1: Нека је $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ холоморфна. Тада је f локално $1-1$ ако је $f'(z) \neq 0, \forall z \in \Omega$.

Закле f $1-1$, хол. $\Rightarrow f'(z) \neq 0 \forall z \in \Omega$

($\Leftarrow$: гет 2 $\Rightarrow$ гет 1)

гет 1 $\not\Rightarrow$ гет 2: пресликавање $f(z) = e^z$ је пример

$f'(z) = e^z \neq 0$, f није $1-1$ у $\mathbb{C}$, али
локално јесте $1-1$

покушај:

(f локално $1-1$ у Ω ако за свако $z \in \Omega$ постоји $U(z)$ на којој је
 f $1-1$)

Ако је $f'(z_0) \neq 0$, онда $\exists U(z_0)$ так. је f $1-1$ на $U(z_0)$.

Ако је $f = u + iv$ $Df = \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix}$

$$J_f = \det Df = u_x v_y - u_y v_x = u_x^2 + v_x^2 = |f'|^2$$

кр. услови

$$u_x = v_y$$

$$u_y = -v_x$$

$$f' = f_x$$

$$if_y = -iu_x - u_x = -f_x$$

$$f_x = u_x + iv_x, f_y = u_y + iv_y = -v_x + iu_x$$

$$f_z = \frac{1}{2}(f_x - if_y) = \frac{1}{2}(f_x + f_x) = f_x$$

Закле, за f^{-1} и холон. у Ω је и $Jf \neq 0$ на Ω .

Лемма 2: $f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ бијективно холморфно пр. $\Rightarrow f^{-1}$ је холморфна

Закле, конформно пресликавање (деф 2) је бихолморфно, тј. f и f^{-1} су холморфне функције.

Лемма 3: Конформно пресликавање чува углове између кривих.
(ово важи за обе деф.)

Лемма 4: f неконстантна, холморфна, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, Ω област

Ако је $f(z_0) = w_0$, онда постоји $k \geq 1$ и холморфна φ

на некој околини $U(z_0)$ тј. је $\varphi(z_0) = 0, \varphi'(z_0) \neq 0$ и

$$f(z) = w_0 + (\varphi(z))^k, \forall z \in U(z_0).$$

k је најмањи цео број тј. је $f^{(k)}(z_0) \neq 0$

$$\Omega \subseteq \mathbb{C} \quad \text{Aut}(\Omega) = \{ f: \Omega \rightarrow \Omega \mid f \text{ конформно} \}$$

деф 3: Ако постоји конформно пр. из Ω_1 у Ω_2 кажемо да су Ω_1 и Ω_2 конформно еквивалентне.

$$\text{Aut}(\mathbb{D}) = \left\{ e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} : z_0 \in \mathbb{D}, \alpha \in \mathbb{R} \right\} \quad (\text{доказати то})$$

$$\text{Aut}(\mathbb{C}) = \left\{ \frac{az+b}{cz+d} : a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad-bc \neq 0 \right\} \quad (\text{сви Мобијуси})$$

$$\text{Aut}(\mathbb{C}) = \left\{ az+b : a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0 \right\} \quad \begin{matrix} (\text{доказати то}) \\ (\text{сљеди из заг. 1}) \end{matrix}$$

① Ако је $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ холморфна (односно цела) функција, доказати да је $f(z) = az+b$, за неке $a, b \in \mathbb{C}$ и све $z \in \mathbb{C}$. ($a \neq 0$)

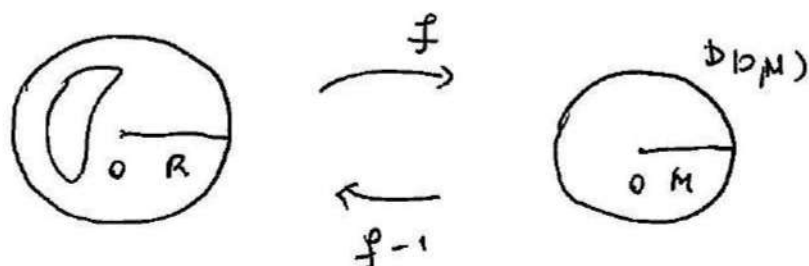
$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ $\leftarrow$ доказати да ово важи, па ће следи из заг из ка да је f полином (заг. 11.3. у Толамовој збирци)

Нека је $M > 0$ произвољно.

Докажи да постоји $R > 0$ так да је за $|z| > R$ испуњено $|f(z)| > M$.

$\overline{D(0, M)}$ је компактно $\Rightarrow f^{-1}(\overline{D(0, M)})$ је компактан, па је затворен и ограничен

$$\Rightarrow (\exists R > 0) f^{-1}(\overline{D(0, M)}) \subseteq D(0, R)$$



$$\Rightarrow \text{за } |z| > R \text{ је } (\exists \text{ так да } f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}) \quad |f(z)| > M \quad \Rightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$$

Сада на основу поменутих задатака, важи да је f полином.

$$n = \deg f$$

$$\text{или } n \geq 2$$

тада $f(z) = 0$ има n корена, па пошто је f 1-1

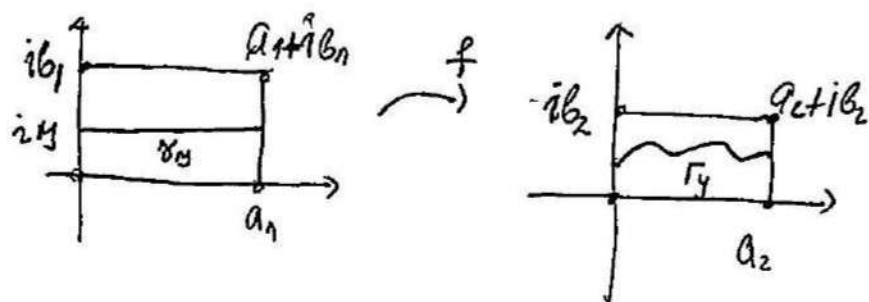
корени морају бити исти $\Rightarrow f(z) = c(z - z_0)^n$

Али тада је $f(z_0 + 1) = c = f(z_0 + e^{i \frac{2\pi}{n}})$ што је у контрадикцији са тим да је f 1-1.

$$\Rightarrow \boxed{n = 1} \quad (n \neq 0 \text{ јер је } \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty)$$

Закле, $f(z) = az + b$, $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{C}$.

- ② Ако је f h - h конформно преликавање (конформно) правоугаоника $R_1 = \{z = x+iy \in \mathbb{C} : 0 < x < a_1, 0 < y < b_1\}$ на правоугаоник $R_2 = \{w = u+iv \in \mathbb{C} : 0 < u < a_2, 0 < v < b_2\}$ које помера слик у шмену w . $f(0)=0, f(a_1)=a_2, f(ib_1)=ib_2$ и $f(a_1+ib_1)=a_2+ib_2$, доказати да је тада R_1 и R_2 слични, тј. $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$.



I начин:

$\gamma_y(x) = x+iy$, y фиксиран, $x \in [0, a_1]$

$\Gamma_y = f \circ \gamma_y$ Γ_y слика станице парал. са y осом у R_2
(јер се помера сликају у одговарајућа шмена,
па онда и станице у одговарајуће станице)

$$\Rightarrow \ell(\Gamma_y) \geq a_2 \quad \forall y \in [0, b_1]$$

$$a_2 \leq \int_{\Gamma_y} |dw| = \int_0^{a_1} |f'(x+iy)| dx, \quad y \in [0, b_1]$$

интегрирамо обе стране $\int_0^{b_1} dy$, па се добија

$$a_2 b_1 \leq \int_0^{b_1} \left(\int_0^{a_1} |f'(x+iy)| dx \right) dy = \iint_{\text{фигура } [0, a_1] \times [0, b_1]} |f'(x+iy)| dx dy \leq \iint_{R_1} |f'(x+iy)| dx dy \leq \iint_{R_2} |dw|$$

$$\sqrt{\iint_{R_1} |f'(x+iy)|^2 dx dy \cdot \iint_{R_1} dx dy} = \sqrt{a_1 b_1 \cdot \iint_{R_2} du dv} = \sqrt{a_1 b_1 a_2 b_2}$$

$f: R_1 \rightarrow R_2$

мена променљиве

$$\left[\text{јер } Jf = |f'|^2 \right]$$

$$\Rightarrow b_1^2 a_2^2 \leq a_1 b_1 a_2 b_2 \quad \text{тј.} \quad b_1 a_2 \leq a_1 b_2 \quad \text{тј.} \quad \frac{a_1}{b_1} \geq \frac{a_2}{b_2}$$

Применом аналогног поступка на f^{-1} добија се

$$b_1 a_2 \geq a_1 b_2$$

Закле $b_1 a_2 = a_1 b_2$, па је $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$, тј.

правобугаоници су слични.

II начин: применом принципа рефлексије (симетрије)

Шварцов принцип симетрије (ШПС)

Нека је G^+ област у горњој полуправи $H^+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ и L сегмент у $\mathbb{R}$.

($G^+ \subseteq H^+$, $L \subseteq \mathbb{R}$, G^+ област, L сегмент)

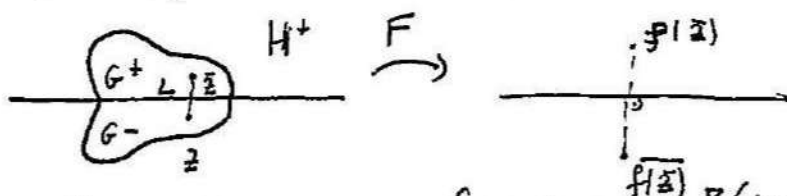
Ако је $G^- = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in G^+\}$ област симетрична са G^+ у односу на $\mathbb{R}$ (реалну осу)

тако да је $G^+ \cup L \cup G^-$ област и f је холоморфна на G^+ ,

непреступна на $G^+ \cup L$ и $f(x) \in \mathbb{R}$ за све $x \in L$,

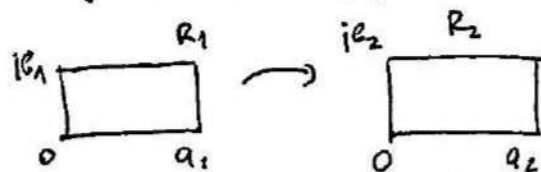
тада постоји f -ја F холоморфна на $G^+ \cup L \cup G^-$ тј. је $F(z) = \overline{f(\bar{z})}$ $\forall z \in G^+$.

Ова f -ја задовољава релацију: $F(z) = \overline{f(\bar{z})}$, $\forall z \in G^-$.



Упоштаба се на праћен када је унето решење се било која права? (релација се показује)

III. $f: R_1 \rightarrow R_2$ конформно



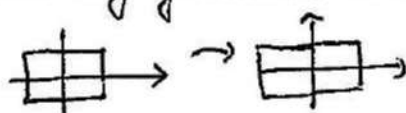
Пошто се шенена сликају на шенена, и стране се сликају на одговарајуће стране, што је за $L = [0, a_1]$, $f(x) \in \mathbb{R}$ $\forall x \in [0, a_1]$ ($x \in L$)

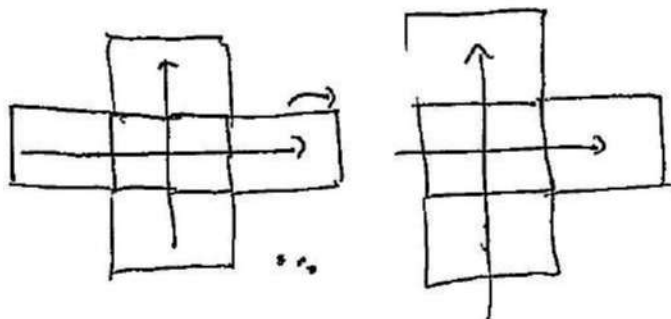
f задовољава услове ШПС (f је хол. на R_1 , непр. на $R_1 \cup L$)

$\Rightarrow f$ се може продужити холоморфно на $0 \square_{a_1}$ вели правобугаоник

и слика је такође симетрична у односу на x осу?

Сада на основу уопштења ШПС проширујемо даље симетрично?





добитно проширене na holomorfnu bijekciju iz $\mathbb{C}$ u $\mathbb{C}$

Na osnovu zadatka ① je $f(z) = az + b$, $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} \text{zbog uslova } f(0) = 0, \text{ dobijamo } b = 0, \text{ tj. } f(z) = az, a \neq 0 \\ \text{zbog uslova } f(ib_1) = ib_2, \text{ dobijamo } ib_2 = a \cdot ib_1, \text{ pa je } a = \frac{b_2}{b_1} \in \mathbb{R} \\ \text{zbog uslova } f(a_1) = a_2 \text{ dobijamo } a_2 = a a_1 \text{ tj.} \end{cases}$$

konacno $a = \frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1}$, pa su pravougaonici slicitni.

Принцип рефлексије се уопштавља и када унесемо ситенити праве L и неко кружни лук. Тада је симетрија инверзија у односу на кружницу која садржи исти лук. $\left[F(z) = f(z^*)^* \left(z^* = z_0 + \frac{R^2}{z - z_0} \right) \right]$
 $G^- = G^* = \{z \in \mathbb{C} : z^* \in G\}$

③ Одредити највећи диск са центром у 0 тј. је $f(z) = z^2 + z$ 1-1 у том диску.

$$f(z_1) = f(z_2) \Leftrightarrow z_1^2 + z_1 = z_2^2 + z_2$$

$$\Leftrightarrow (z_1 - z_2)(z_1 + z_2) + (z_1 - z_2) = 0$$

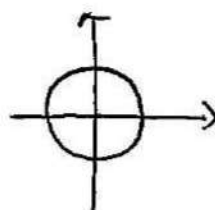
$$\Leftrightarrow (z_1 - z_2)(z_1 + z_2 + 1) = 0$$

$$\text{за } z_1 + z_2 \neq -1 \text{ је } z_1 = z_2$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \text{ за } |z_1|, |z_2| < \frac{1}{2} \text{ је}$$

$$|z_1 + z_2| < 1 \text{ па је } z_1 + z_2 \neq -1 \text{ за } z_1, z_2 \in D(0, \frac{1}{2}).$$

Закле, f је 1-1 на $D(0, \frac{1}{2})$.



$$\text{за } z_1, z_2 \in D(0, \frac{1}{2} + 2\epsilon) : \text{ нпр. за } z_1 = -\frac{1}{2} - \epsilon, z_2 = -\frac{1}{2} + \epsilon$$

$$\text{испуњено } z_1 + z_2 = -1, \text{ па је } f(z_1) = f(z_2)$$

$$\text{тј. } f \text{ није 1-1 у } D(0, \frac{1}{2} + 2\epsilon), \epsilon > 0.$$

Закле, $D(0, \frac{1}{2})$ је највећи диск?