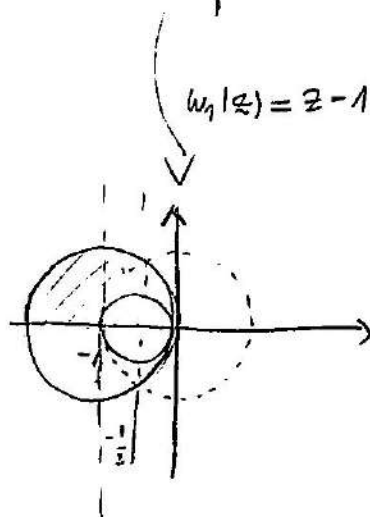
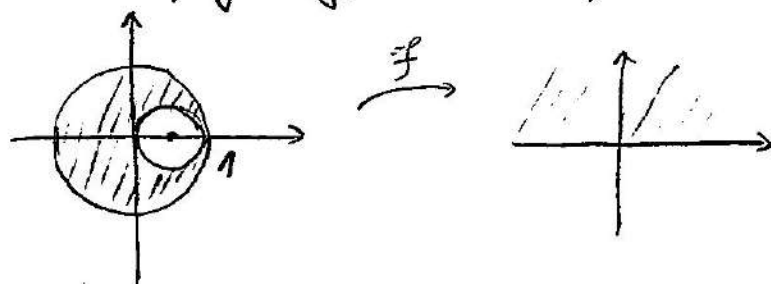
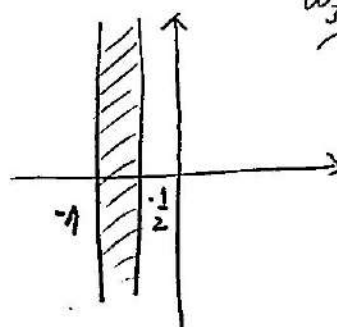


⑤ Одредити бар једну функцију f којом се облааи

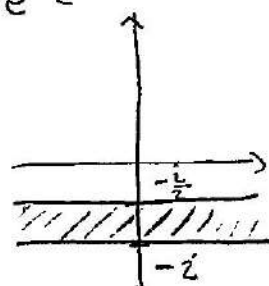
$\Omega = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1, |z - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2} \}$. Конформно пресликава
на горњу полураван $\mathbb{H} = \{ w \in \mathbb{C} : \text{Im } w > 0 \}$.



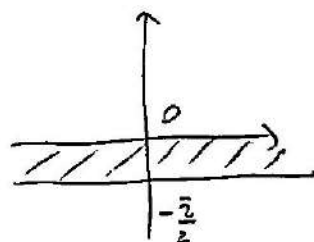
$$w_2(w_1) = \left(\frac{1}{w_1} \right)$$



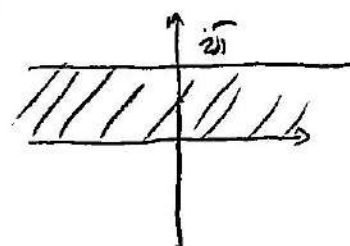
$$w_3(w_2) = w_2 \cdot i = w_2 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$



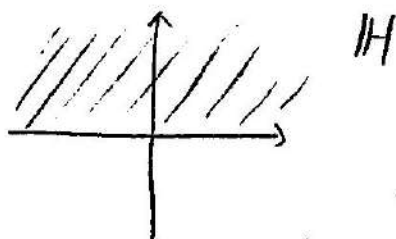
$$w_4(w_3) = w_3 + \frac{i}{2}$$



$$w_5(w_4) = w_4 \cdot (-2\pi i)$$



$$w_6(w_5) = e^{w_5}$$



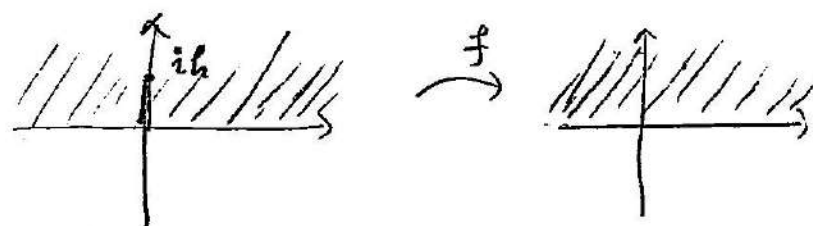
$$\Rightarrow f(z) = e^{-2\pi i \cdot \left(\frac{i}{2} + i \cdot \frac{1}{z-1} \right)} = e^{-2\pi i \cdot \frac{z-1+2}{z(z-1)}} = e^{-2\pi i \cdot \frac{z+1}{z-1}}$$

⑥ Определити бар 1 конформно пресликавање области

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 0, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq h\}, h > 0$$

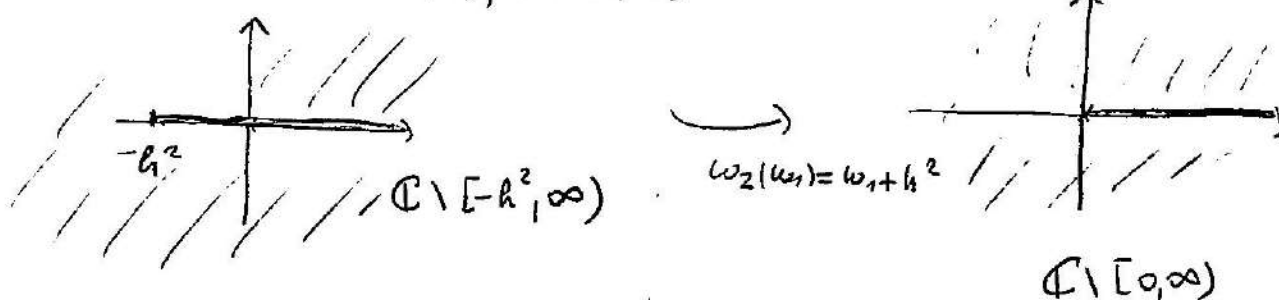
$$(\text{иш. } \Omega = \mathbb{H} \setminus [0, ih])$$

на горњу полураван $\mathbb{H} = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w > 0\}$.



$$\begin{aligned} \omega_1(z) &= z^2 \\ z &= \rho e^{i\varphi}, z^2 = \rho^2 e^{2i\varphi} \\ \varphi &\in (0, \pi), 2\varphi \in (0, 2\pi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_3(\omega_2) &= \sqrt{\omega_2} \\ &= \sqrt{|\omega_2|} e^{i \frac{\arg \omega_2}{2}} \\ \arg \omega_2 &\in (0, 2\pi) \end{aligned}$$



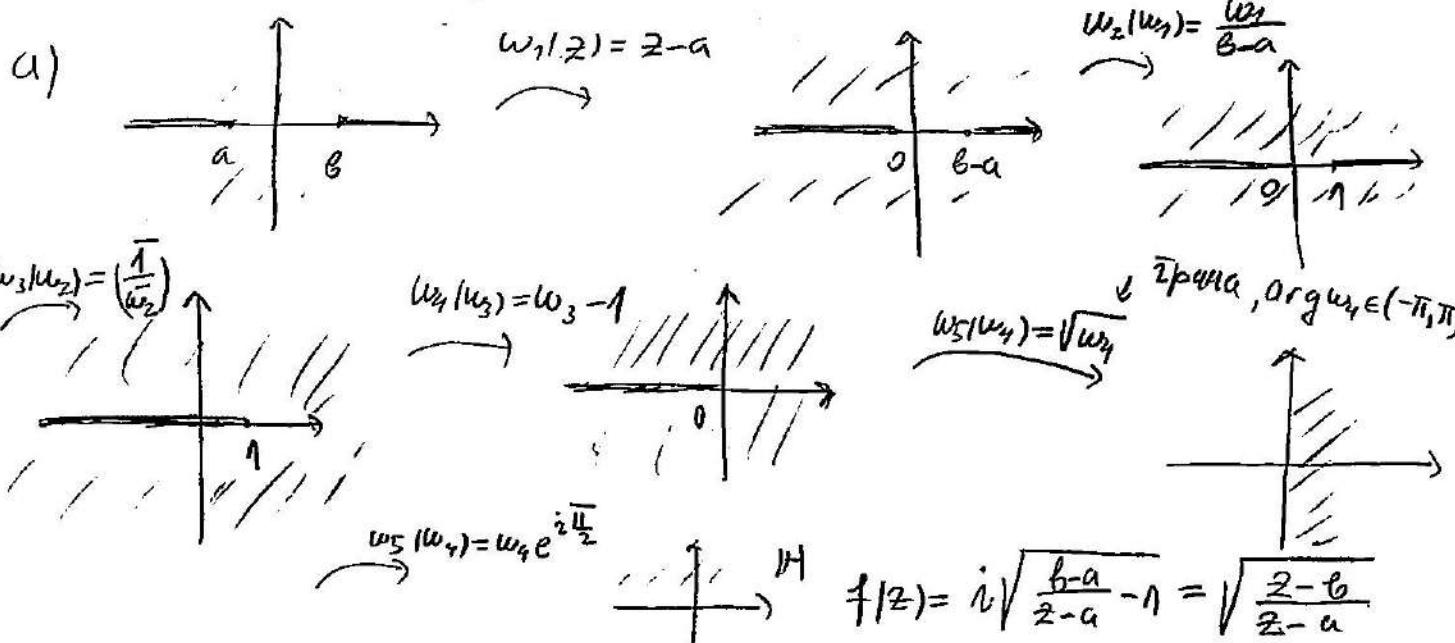
$$\Rightarrow f(z) = \sqrt{z^2 + h^2} \quad (\text{грана корена са } \arg(z^2 + h^2) \in (0, 2\pi))$$

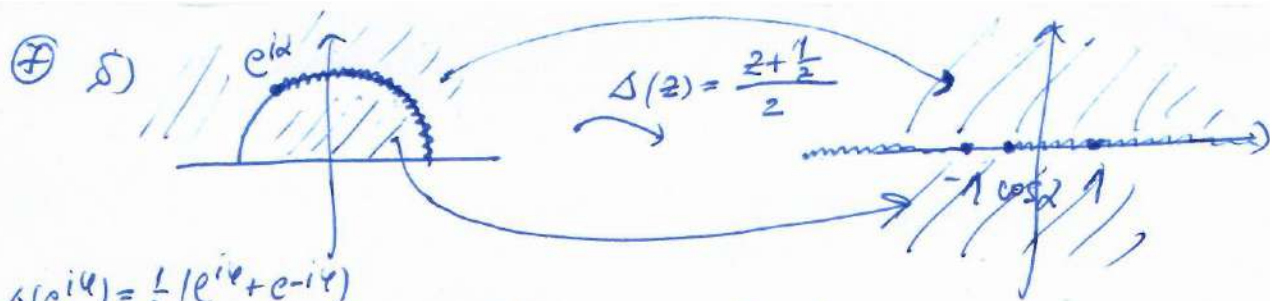
⑦ Определити бар 1 конформно пресликавање којим се области

$$a) \Omega_1 = \mathbb{C} \setminus ((-\infty, a] \cup [b, \infty)), -\infty < a < b < +\infty$$

$$b) \Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \{e^{i\varphi} : \varphi \in [0, \alpha]\}, \alpha \in (0, \pi)$$

пресликава на горњу полураван $\mathbb{H} = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w > 0\}$.





$$\Delta(e^{i\varphi}) = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$$

$$\Delta(e^{i\alpha}) = \cos \alpha \in [-1, 1]$$

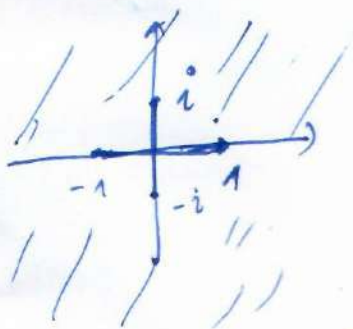
$$\Delta(e^{i\varphi}) = \cos \varphi \in [-1, 1] \quad \forall \varphi \in [\alpha, \lambda]$$

$$\Delta(\Omega_2) = \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [\cos \alpha, \infty))$$

Сада применимо гео дог а) На $a = -1$, $b = \cos \alpha$

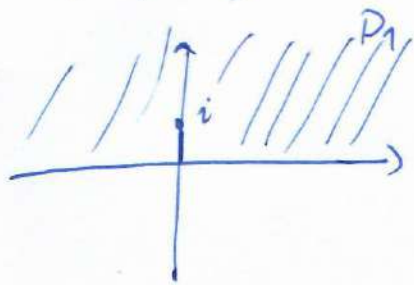
$$\Rightarrow f(z) = \sqrt{\frac{\Delta(z) - \cos \alpha}{\Delta(z) + 1}}$$

⊗ 8) Области $\mathbb{C} \setminus ([-1, 1] \cup [-i, i]) = \Omega$ пресликају
конформно на $\mathbb{D} = \{\omega \in \mathbb{C} : |\omega| < 1\}$.

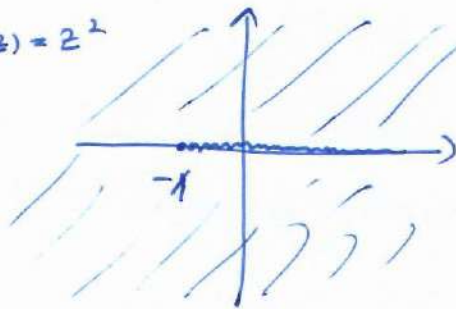


Нека је $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\} \setminus [0, i]$

и $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\} \setminus [-i, 0]$



$$\omega_1(z) = z^2$$

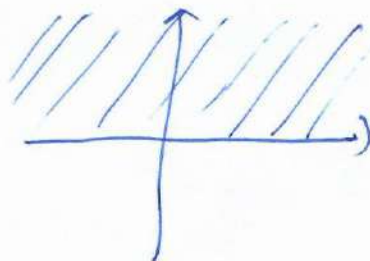


$$\omega_2 = \omega_1 + 1$$



$$\omega_3 = \sqrt{\omega_2} = \sqrt{|\omega_2|} e^{i \frac{\arg \omega_2}{2}}$$

$\arg \omega_2 \in (0, 2\pi)$



$$W(z) = \sqrt{z^2 + 1} \text{ слика } D_1 \text{ на } \mathbb{H}$$

$$\arg(z^2 + 1) \in (0, 2\pi)$$

Пресликавање ω_1 проширујемо непр. до границе D_1 (без $\perp$)

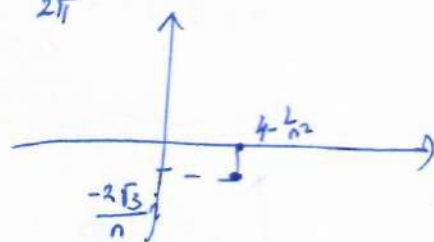
и) на $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ иј. је слика од $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ јачи $\mathbb{R} \setminus [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.



Пр. 3а $z = -\sqrt{3}$

$$z_n = -\sqrt{3} + \frac{i}{n} \in D, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

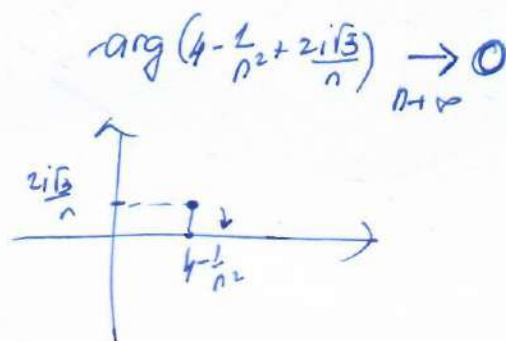
$$\begin{aligned} w(z_n) &= \sqrt{(-\sqrt{3} + \frac{i}{n})^2 + 1} = \sqrt{3 - 2\sqrt{3}\frac{i}{n} - \frac{1}{n^2} + 1} = \sqrt{4 - \frac{2i\sqrt{3}}{n} - \frac{1}{n^2}} \\ &= \sqrt{4 - \frac{1}{n^2} - \frac{2i\sqrt{3}}{n}} \cdot e^{i \frac{1}{2} \arg(4 - \frac{1}{n^2} - \frac{2i\sqrt{3}}{n})} = 2e^{i\pi} = -2 \end{aligned}$$



Пр. 3а $z = \sqrt{3}$

$$z_n = \sqrt{3} + \frac{i}{n} \in D, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$w(z_n) = \sqrt{(\sqrt{3} + \frac{i}{n})^2 + 1} = \sqrt{4 + \frac{2i\sqrt{3}}{n} - \frac{1}{n^2}} = \sqrt{4 - \frac{1}{n^2} + \frac{2i\sqrt{3}}{n}} e^{i \frac{1}{2} \arg(4 - \frac{1}{n^2} + \frac{2i\sqrt{3}}{n})}$$



Црга су нредано га је јачије :

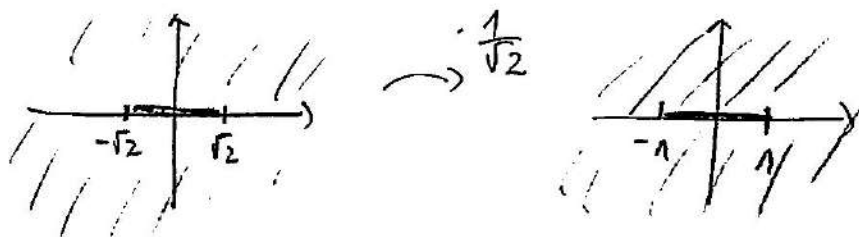
$$\omega(z) = \sqrt{z^2 + 1} \text{ слика } D_1 \text{ на } \mathbb{H}$$

$$\text{одсекак } \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \text{ се слика на } \mathbb{R} \setminus [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

На основу принципа симетрије Шварца можемо ω проширити на $D_1 \cup D_2 \cup \mathbb{R} \setminus [-1, 1] = \Omega \cup \{\infty\}$

$$\omega(\bar{z}) = \overline{\omega(z)} = \lambda \left| \omega(\bar{z}) = \sqrt{z^2 + 1} \right|$$

слика је сада $\mathbb{C} \setminus [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$



фја Нумовској слика $D^* = D \cup \{\infty\}$ на $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$

и слика D на $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, та зрана
њене инверзне фје одабрана тако да
је $\Delta^{-1}(\infty) = 0$ слика $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ на D

$$\Rightarrow \text{мрањена фја је } \Delta^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \omega(z)\right)$$

где је Δ^{-1} зрана инверзне фје шг.
је $y \neq \infty$ једнака 0, а ω пројекције
фје $\sqrt{z^2 + 1}$.

Замети: Наћи експлицитно Δ^{-1} и одредити која зрана
слика ∞ у 0.