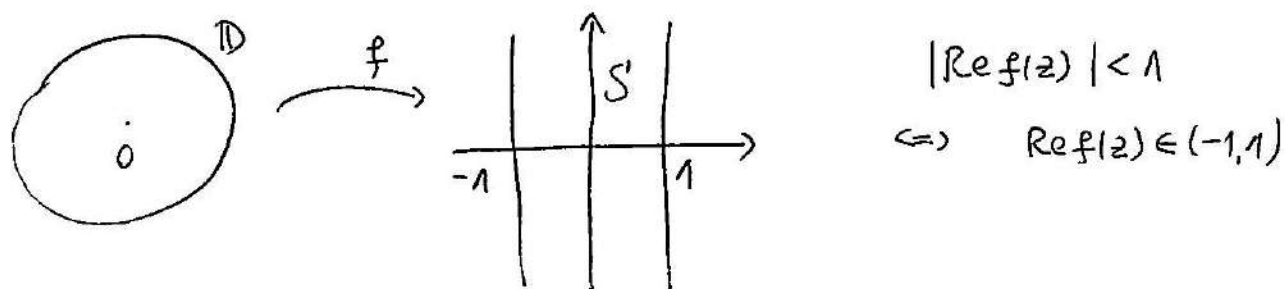
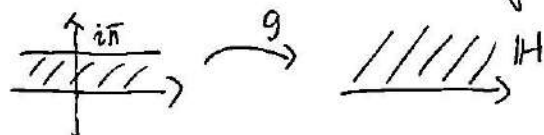


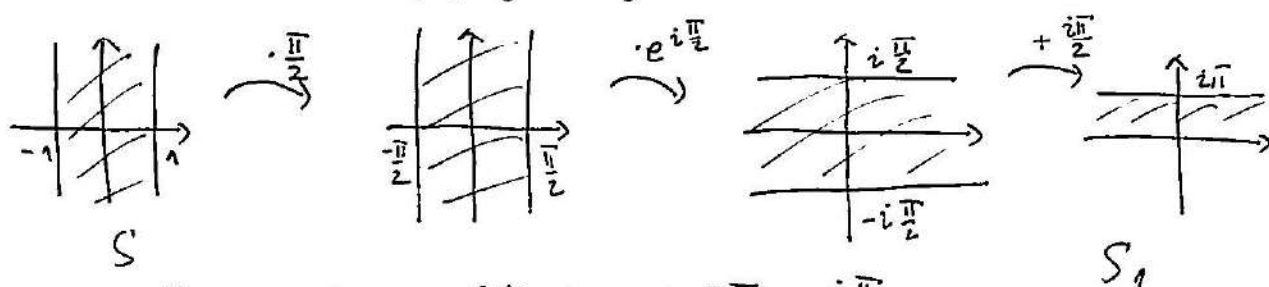
- (5) Нека је функција f холоморфна у $\mathbb{D}$, при чему је $f(0)=0$ и $|\operatorname{Re} f(z)| < 1$ за све $z \in \mathbb{D}$. Доказати га је: $|f'(0)| \leq \frac{4}{\pi}$.



Нека је $S = \{w \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Re} w < 1\}$, аа f слика $\mathbb{D}$ у S .
 Познато је да $g(z) = e^z$ слика праму
 $S_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ на хорну полураван $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$



Сада је јасно да можемо направити пресликавање из $\mathbb{D}$ у $\mathbb{D}$ и искористити Шварцову лему.

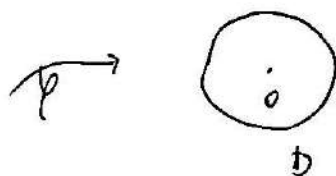
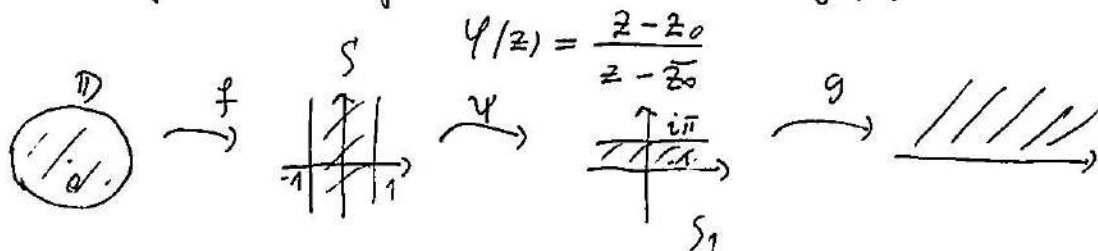


• пресликавање $\Psi(z) = z \cdot i \frac{\pi}{2} + i \frac{\pi}{2}$

слика S на S_1

$$\Psi(z) = i \frac{\pi}{2} \cdot (z+1)$$

• полураван на диск $\mathbb{D}$ сликамо стандардно



$F = \Psi \circ g \circ \Psi \circ f$ слика $\mathbb{D}$ у $\mathbb{D}$

хотимо $F(0)=0$?

$$z_0 = g(\Psi(f(0))) = e^{i \frac{\pi}{2} (f(0)+1)} = e^{i \frac{\pi}{2} \cdot 1}$$

Примено Шварцову лему на $F \Rightarrow |F'(0)| \leq 1$

$$F'(z) = \Psi'(g(\Psi(f(z)))) \cdot g'(\Psi(f(z))) \cdot \Psi'(f(z)) \cdot f'(z)$$

$$\Psi'(z) = \frac{z - \bar{z}_0 - z + z_0}{(z - \bar{z}_0)^2} = \frac{z_0 - \bar{z}_0}{(z - \bar{z}_0)^2}, \quad g'(z) = e^z, \quad \Psi'(z) = \frac{i\pi}{2}$$

$$F'(0) = \Psi'(g(\Psi(0))) \cdot g'(\Psi(0)) \cdot \Psi'(0) \cdot f'(0), \quad \Psi(0) = \frac{i\pi}{2}$$

$$F'(0) = \Psi'(e^{i\pi/2}) \cdot g'(\frac{i\pi}{2}) \cdot \Psi'(0) \cdot f'(0)$$

$$z_0 = i$$

$$F'(0) = \Psi'(i) \cdot g'(\frac{i\pi}{2}) \cdot \frac{i\pi}{2} f'(0)$$

$$\Psi'(i) = \frac{i - \bar{i}}{(i - \bar{i})^2} = \frac{1}{i - \bar{i}} = \frac{1}{2i} = \frac{-i}{2}$$

$$F'(0) = \frac{-i}{2} \cdot e^{i\pi/2} \cdot \frac{i\pi}{2} f'(0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{i\pi}{2} f'(0) = \frac{i\pi}{4} f'(0)$$

$$|F'(0)| \leq 1 \Rightarrow |f'(0)| \leq \frac{4}{\pi}$$

* пресмеквајте $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = -i \cdot \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$

$$\operatorname{tg} z = -i \cdot \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}$$

$$\Psi(w) = \frac{w-1}{w+1}, \quad -i = e^{-i\pi/2}, \quad \Psi(z) = z \cdot (-i) = z \cdot e^{-i\pi/2}$$

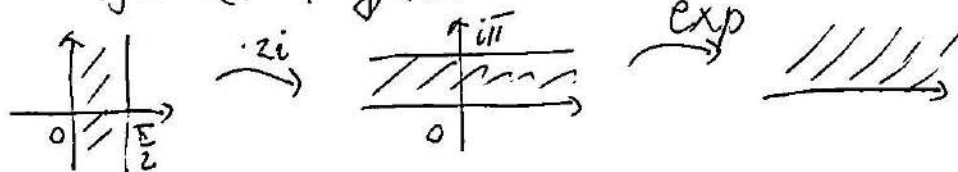


↓
ротација
за $-\frac{\pi}{2}$

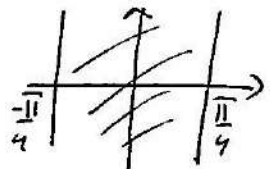
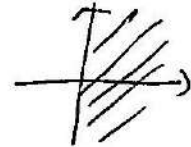
лиња јесту допуричан у $\mathbb{D}$

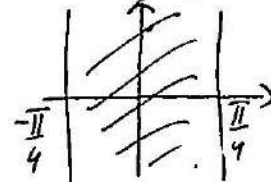
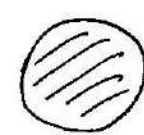
$$g(z) = e^{2iz}$$

$$\operatorname{tg} z = (\Psi \circ \Psi \circ g)(z)$$

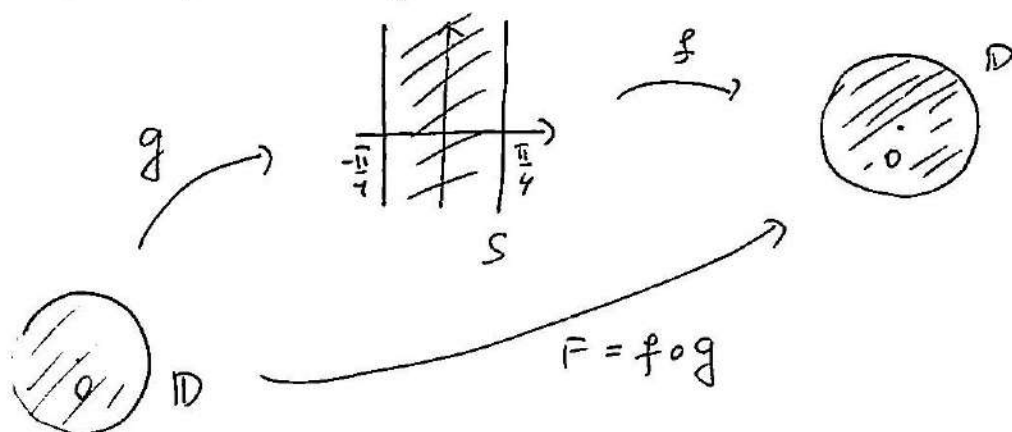


$$e^{2iz} \cdot e^{-i\pi/2} = e^{2i(z - \frac{\pi}{4})}$$

Слика e^{2iz} слика  на  ?

Закле, $\tanh z$ слика  на  $\mathbb{D}$? $\tanh 0 = 0$

⑥ Нека је f аналитичка фја у области $S = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < \frac{\pi}{4}\}$ за коју је $|f(z)| < 1$, за све $z \in S$ и $f(0) = 0$. Доказати да је $|f(z)| \leq |\tanh z|$ за све $z \in S$.



Хотимо $g: \mathbb{D} \rightarrow S$ и g је холоморфно, 1-1 и на 0 .

$$g(0) = 0.$$

Патда је $F = f \circ g$ пресликавање из $\mathbb{D}$ у $\mathbb{D}$ $F(0) = f(g(0)) = f(0) = 0$ и F је холоморфно, па можемо применити Шварцову лему на F .

За g можемо узети инверз од $\tanh z$? (А можемо га правити и обрнуто)

$$\tanh z = w$$

$$-i \cdot \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} = w$$

$$-i(e^{2iz} - 1) = w(e^{2iz} + 1)$$

$$e^{2iz}(-i - w) = w - i$$

$$e^{2iz} = \frac{i - w}{i + w}$$

$$2iz = \log \frac{i - w}{i + w}$$

$$z = \frac{1}{2i} \left(\log \left| \frac{i - w}{i + w} \right| + i \arg \frac{i - w}{i + w} \right)$$

$$g(z) = \frac{1}{2i} \left(\log \left| \frac{i - w}{i + w} \right| + i \arg \frac{i - w}{i + w} \right)$$

$$g^{-1}(z) = \tanh z$$

узичемо страну $\log w$.

$$\arg \frac{i - w}{i + w} \in (-\pi, \pi)$$

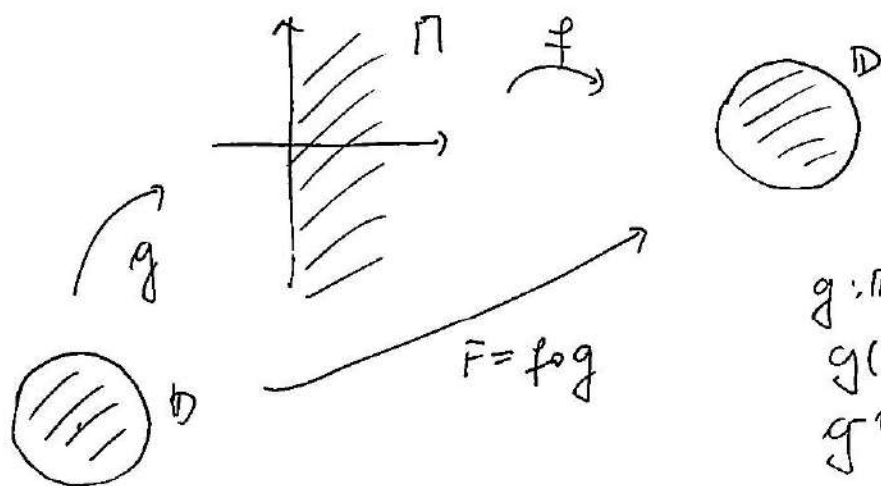
Из Шварцове леме следи: $|f(z)| \leq |z|$

$$|f(g(z))| \leq |z| \quad \begin{matrix} \omega \\ g'(w) \end{matrix} \quad \begin{matrix} g \text{ bijekcija} \\ g(z) \in S \end{matrix}$$

$$|f(w)| \leq |g^{-1}(w)|$$

$$\boxed{|f(w)| \leq |g(w)|} \quad \forall w \in S$$

- ⑦ Нека је $f: \Pi \rightarrow \mathbb{D}$ холоморфна функција, где је $\Pi = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ десна полураван, при чему важи $f(i\mathbb{N}) = \{0\}$.
Доказати да је функција f идентички једнака 0.



F слика $\mathbb{D}$ у $\mathbb{D}$!

F је холоморфна
Зовемо да је доказати да
је $F \equiv 0$.

$$g: \mathbb{D} \rightarrow \Pi$$

$$g(z) = ?$$

$$g^{-1}(w) = \frac{w-1}{w+1} = z$$

$$w-1 = zw+1$$

$$w(1-z) = 1+z$$

$$w = \frac{1+z}{1-z}$$

$$\boxed{g(z) = \frac{z+1}{1-z}}$$

(бијекција)

За све $n \in \mathbb{N}$ је $f(n) = 0$, па је $F(g^{-1}(n)) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
тј. $F\left(\frac{n-1}{n+1}\right) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$

F холоморфна на $\mathbb{D} \Rightarrow F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, z \in \mathbb{D}$
Пјелоров
развој

Означимо $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ ($F(a_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$)

$a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{3}, a_3 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \dots$

$F(a_1) = 0$ пошто $F(0) = 0$

ПДС: Јако F није идентички једнака 0

- онда има сви коеф. c_n једнаки 0
- Нека је $m \in \mathbb{N}$ најмањи инд. $c_m \neq 0$

$F(z) = c_m z^m + c_{m+1} z^{m+1} + \dots$

F има нулу реда m у 0

фиксирајмо природан број $n \geq 2$

$a_1, a_2, \dots, a_n$ су нуле f је F

$\Rightarrow F(z) = F_n(z) \cdot \psi_0(z)^m \cdot \prod_{j=2}^n \psi_{a_j}(z)$

згг.

$F(z) = z^m F_n(z) \cdot \prod_{j=2}^n \psi_{a_j}(z)$

$\Rightarrow c_m + c_{m+1}z + c_{m+2}z^2 + \dots = F_n(z) \prod_{j=2}^n \psi_{a_j}(z) \quad \forall z \in \mathbb{D}$

$|c_m| = |F_n(0) \prod_{j=2}^n (-a_j)| = \underbrace{|F_n(0)|}_{\leq 1} \cdot \prod_{j=2}^n a_j$
 (по Загачу)

$\Rightarrow |c_m| \leq \prod_{j=2}^n a_j = \prod_{j=2}^n \frac{j-1}{j+1}$

$\prod_{j=2}^n \frac{j-1}{j+1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{6}{8} \cdot \dots \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-1}{n+1}$
 $= \frac{2}{n(n+1)}$

$|c_m| \leq \frac{2}{n(n+1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\downarrow n \rightarrow \infty$

0

$\Rightarrow \boxed{|c_m| = 0}$

$\Rightarrow \boxed{F \equiv 0}$