Комплексна анализа А, М смер
Септембар 1, 11.09.2021.

1. Испитати да ли постоји холоморфна функција f на $\Pi = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ таква да је за неко ϕ испуњено $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y) = \phi(\frac{x^2+y^2}{x})$, за све $z = x + iy \in \Pi$. Ако таква функција постоји, одредити је.

2. Нека је $f(z) = \frac{\sin z}{\cos z^3 - 1}$. Наћи све сингуларитете функције f, одредити Лоранов развој функције f у околини 0 (нпр. до трећег степена) и израчунати интеграл $\int\limits_{|z|=1} f(z)dz$.

3. Ако је $k \in \mathbb{N}$ паран природан број, одредити вредност интеграла $I_k = \int\limits_0^\infty \frac{\sin kx}{(x^2+1)\sin x} dx$.

4. **а)** Пресликавањем $f(z) = \frac{z}{z-1}$ пресликати област $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \arg z \in (0, \frac{\pi}{4})\}$.

   б) Одредити бар једно $1-1$ холоморфно пресликавање којим се $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \setminus \{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{d}{2}| \leq \frac{d}{2}\}$ пресликава на $\{w \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} w\}$, где је $d > 0$.

5. Нека је $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ област таква да је $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \subseteq \Omega$ и нека су f и g функције холоморфне на Ω и непрекидне на $\overline{\Omega}$ такве да је $f(\overline{\Omega}) \cup g(\overline{\Omega}) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$ и $g(\partial\Omega) = \partial\mathbb{D}$. Ако је функција $\frac{f}{g}$ ограничена на $\Omega \setminus g^{-1}(\{0\})$, доказати да је $|f(z)| \leq |g(z)|$, за све $z \in \Omega$.

Комплексна анализа А, М смер
Септембар 1, 11.09.2021.

1. Испитати да ли постоји холоморфна функција f на $\Pi = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ таква да је за неко ϕ испуњено $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y) = \phi(\frac{x^2+y^2}{x})$, за све $z = x + iy \in \Pi$. Ако таква функција постоји, одредити је.

2. Нека је $f(z) = \frac{\sin z}{\cos z^3 - 1}$. Наћи све сингуларитете функције f, одредити Лоранов развој функције f у околини 0 (нпр. до трећег степена) и израчунати интеграл $\int\limits_{|z|=1} f(z)dz$.

3. Ако је $k \in \mathbb{N}$ паран природан број, одредити вредност интеграла $I_k = \int\limits_0^\infty \frac{\sin kx}{(x^2+1)\sin x} dx$.

4. **а)** Пресликавањем $f(z) = \frac{z}{z-1}$ пресликати област $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \arg z \in (0, \frac{\pi}{4})\}$.

   б) Одредити бар једно $1-1$ холоморфно пресликавање којим се $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \setminus \{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{d}{2}| \leq \frac{d}{2}\}$ пресликава на $\{w \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} w\}$, где је $d > 0$.

5. Нека је $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ област таква да је $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \subseteq \Omega$ и нека су f и g функције холоморфне на Ω и непрекидне на $\overline{\Omega}$ такве да је $f(\overline{\Omega}) \cup g(\overline{\Omega}) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$ и $g(\partial\Omega) = \partial\mathbb{D}$. Ако је функција $\frac{f}{g}$ ограничена на $\Omega \setminus g^{-1}(\{0\})$, доказати да је $|f(z)| \leq |g(z)|$, за све $z \in \Omega$.